Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Мельникова, Свойства морсовской формы, определяющей компактное слоение на M_g^2 , *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 942–945

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1915>

Использование Общероссийского математического портала Math-

Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 08:24:12

СВОЙСТВА МОРСОВСКОЙ ФОРМЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ КОМПАКТНОЕ СЛОЕНИЕ НА M_g^2

И. А. Мельникова

П. Арнуа и Г. Левиттом в работах [1], [2] было показано, что топология слоения морсовской формы ω на компактном многообразии тесно связана со структурой отображения интегрирования $[\omega]: H_1(M) \rightarrow \mathbb{R}$. В данной работе рассматривается слоение морсовской формы на двумерном многообразии M_g^2 . Изучается связь подгруппы $\text{Ker}[\omega] \subset H_1(M_g^2)$ с топологией слоения. Получены следующие результаты: рассмотрена структура подгруппы $\text{Ker}[\omega]$ компактного слоения и доказан критерий компактности слоения.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00276.

1. Предварительные определения. Рассмотрим на многообразии M_g^2 замкнутую форму ω с морсовскими особенностями. На множестве $M_g^2 \setminus \text{Sing } \omega$ она определяет слоение $\mathcal{F}$.

Определим на многообразии M_g^2 слоение с особенностями $\mathcal{F}_\omega$ следующим образом.

Пусть в достаточно малой окрестности особой точки $p \in \text{Sing } \omega$ слоение $\mathcal{F}$ локально определяется уровнями функции f_p , причем $f_p(p) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Неособым слоем слоения $\mathcal{F}_\omega$ называется слой $\gamma \in \mathcal{F}$ такой, что $\forall p \in \text{Sing } \omega \quad \gamma \cap f_p^{-1}(0) = \emptyset$.

Обозначим $F_p = p \cup \{\gamma \in \mathcal{F} \mid \gamma \cap f_p^{-1}(0) \neq \emptyset\}$. Пусть $F = \bigcup_{p \in \text{Sing } \omega} F_p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Особым слоем слоения $\mathcal{F}_\omega$ называется компонента связности множества F .

Поскольку форма морсовская, то особых слоев конечное число.

Слоение $\mathcal{F}_\omega$ называется компактным, если все его слои компактны.

Замкнутая форма ω определяет отображение интегрирования по циклам $[\omega]: H_1(M_g^2) \rightarrow \mathbb{R}$. Образ $\text{Im}[\omega]$ этого отображения представляет собой группу периодов формы ω . Заметим, что $\text{rk Im}[\omega] = \text{dirg } \omega + 1$, где $\text{dirg } \omega$ – степень иррациональности формы ω .

Если $\text{dirg } \omega \leq 0$, то слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно [3]. Если $\text{dirg } \omega \geq g$, то слоение $\mathcal{F}_\omega$ имеет некомпактный слой [4]. Если же $0 < \text{dirg } \omega < g$, то слоение может оказаться как компактным, так и некомпактным. Изучение структуры подгруппы $\text{Ker}[\omega]$ позволяет и в последнем случае получить условия компактности слоения.

Рассмотрим операцию пересечения 1-циклов

$$\varphi: H_1(M_g^2) \times H_1(M_g^2) \rightarrow \mathbb{Z},$$

являющуюся невырожденным, косимметрическим билинейным отображением.

Ограничение отображения φ на подгруппу $\text{Ker}[\omega] \subset H_1(M_g^2)$ обозначим через φ_ω :

$$\varphi_\omega: \text{Ker}[\omega] \times \text{Ker}[\omega] \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Очевидно, $\text{rk Ker } \varphi_\omega \leq \text{rk Ker}[\omega] = 2g - (\text{dirg } \omega + 1)$. Для малых значений $\text{dirg } \omega$ существует лучшая оценка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $\text{rk Ker } \varphi_\omega \leq \text{dirg } \omega + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{Ker } \varphi_\omega = \langle z_1, \dots, z_k \rangle$. Обозначим через Dz_i циклы, двойственные к z_i , тогда $Dz_i \circ z_j = \delta_{ij}$. Предположим, что $\sum n_i \int_{Dz_i} \omega = 0$. Обозначим $z = \sum n_i Dz_i$, тогда, очевидно, $z \in \text{Ker}[\omega]$ и $z \circ z_j = n_j$. Поскольку $z_j \in \text{Ker } \varphi_\omega$, то все $n_j = 0$. Следовательно, интегралы $\int_{Dz_i} \omega$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и $\text{dirg } \omega \geq k - 1$. Предложение доказано.

Подгруппа $H \subset H_1(M_g^2)$ такая, что $\forall x, y \in H \quad x \circ y = 0$, называется *изотропной относительно операции пересечения циклов*. Изотропная подгруппа H называется *максимальной*, если $\forall x \notin H \quad \exists y \in H \quad x \circ y \neq 0$.

Заметим, что подгруппа $\text{Ker } \varphi_\omega$ является изотропной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть H_0 – максимальная изотропная подгруппа в группе $\text{Ker}[\omega]$. Тогда $\text{rk } H_0 = \frac{1}{2}(\text{rk Ker}[\omega] + \text{rk Ker } \varphi_\omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку отображение φ_ω является симплектической формой на пространстве $\text{Ker}[\omega] \otimes \mathbb{R}$, то утверждение следует из разложения симплектического пространства $\text{Ker}[\omega] \otimes \mathbb{R}$ в прямую сумму попарно ортогональных подпространств: двумерных невырожденных и одномерных вырожденных.

Сопоставим каждому неособому компактному слою $\gamma \in \mathcal{F}_\omega$ его гомологический класс $[\gamma]$. Образ множества неособых компактных слоев при этом отображении порождает подгруппу в $H_1(M_g^2)$. Обозначим ее H_ω . Заметим, что подгруппа H_ω является изотропной и $H_\omega \subset \text{Ker}[\omega]$.

2. Свойства морсовской формы, определяющей компактное слоение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть на многообразии M_g^2 слоение определяется морсовской формой ω . Если слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, то

$$\text{rk Ker } \varphi_\omega = \text{dirr } \omega + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неособые компактные слои слоения $\mathcal{F}_\omega$ порождают подгруппу $H_\omega \subset H_1(M_g^2)$. Число особых слоев конечно, обозначим их $\gamma_1^0, \dots, \gamma_k^0$. Рассмотрим вложения $j_s: \gamma_s^0 \rightarrow M_g^2$, $s = 1, \dots, k$, и индуцированные отображения гомологий $j_{s*}: H_1(\gamma_s^0) \rightarrow H_1(M_g^2)$. В каждой группе $H_1(\gamma_s^0)$ выберем такую максимальную подгруппу Z_s , чтобы образ $j_{s*}Z_s \subset H_1(M_g^2)$ был изотропной подгруппой.

Рассмотрим подгруппу $H_0 = \langle H_\omega, j_{s*}Z_s, s = 1, \dots, k \rangle$. Очевидно, подгруппа H_0 является изотропной и $H_0 \subset \text{Ker}[\omega]$.

Рассмотрим цикл $z \in H_1(M_g^2)$ такой, что $z \circ H_0 = 0$. Тогда $z \circ H_\omega = 0$. В работе [5] (см. доказательство теоремы 1.2) было показано, что если слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно и $z \circ H_\omega = 0$, то цикл z реализуется кривой $\alpha \subset \cup \gamma_s^0$. Будем считать, что $\alpha = \sum \alpha_s$, где $\alpha_s \subset \gamma_s^0$. По условию $z \circ j_{s*}Z_s = 0$ для всех s , следовательно, $[\alpha_s] \circ j_{s*}Z_s = 0$, поскольку при $p \neq s$ $\alpha_p \cap \gamma_s^0 = \emptyset$. Так как $\alpha_s \subset \gamma_s^0$, то $[\alpha_s] \in \text{Im } j_{s*}$, следовательно, в силу построения группы Z_s получаем, что $[\alpha_s] \in j_{s*}Z_s$ и соответственно $z \in H_0$.

Таким образом, подгруппа H_0 является максимальной в группе $H_1(M_g^2)$. Следовательно, как было показано в работе [5], $\text{rk } H_0 = g$. С другой стороны, H_0 максимальна в группе $\text{Ker}[\omega]$ и согласно предложению 2 $\text{rk } H_0 = \frac{1}{2}(\text{rk Ker}[\omega] + \text{rk Ker } \varphi_\omega)$. Поскольку $\text{dirr } \omega = 2g - 1 - \text{rk Ker}[\omega]$, то теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В обратную сторону теорема неверна, т.е. существуют некомпактные слоения, для которых приведенное равенство выполняется.

3. Критерий компактности слоения. В работе [4] было показано, что если существует g гомологически независимых компактных слоев, то все слои компактны. С учетом структуры подгруппы $\text{Ker}[\omega]$ этот признак компактности можно усилить. Рассмотрим пересечение $H_\omega \cap \text{Ker } \varphi_\omega$.

ТЕОРЕМА 2. Слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно тогда и только тогда, когда

$$\text{rk}(H_\omega \cap \text{Ker } \varphi_\omega) \geq \text{dirr } \omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{dirg } \omega \leq 0$, то слоение компактно согласно [3]. Пусть $\text{dirg } \omega \geq 1$, тогда $k = \text{rk}(H_\omega \cap \text{Ker } \varphi_\omega) \geq 1$.

Рассмотрим неособые слои $\gamma_i \in \mathcal{F}_\omega$ такие, что $H_\omega \cap \text{Ker } \varphi_\omega = \langle [\gamma_1], \dots, [\gamma_k] \rangle$. Как было показано в предложении 1, интегралы $\int_{D[\gamma_i]} \omega$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и $\text{dirg } \omega \geq k - 1$. По условию $\text{dirg } \omega \leq k$, следовательно, $\text{dirg } \omega$ определяется интегралами по $D[\gamma_1], \dots, D[\gamma_k]$ и, возможно, по некоторому циклу z .

Разрежем многообразие M_g^2 по слоям γ_i . Поскольку они гомологически независимы, в результате получим связное многообразие M' с краем. Число компонент связности края равно $2k$. Ограничение формы ω на многообразии M' обозначим ω' . Поскольку циклы $D[\gamma_i]$ при разрезании исчезают, то $\text{dirg } \omega' \leq 0$.

Заклеим каждую компоненту связности края диском D_i^2 , в результате получим многообразие M_{g-k}^2 . Продолжим форму ω' на диски D_i^2 таким образом, чтобы на каждом D_i^2 полученная форма ω'' была морсовской и имела одну особую точку типа максимума или минимума. Очевидно, $\text{dirg } \omega'' \leq 0$ и слоение $\mathcal{F}_{\omega''}$, является компактным. Следовательно, компактно и слоение $\mathcal{F}_\omega$. В одну сторону теорема доказана.

Обратно, пусть слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно. Покажем, что тогда $\text{Im}[\omega] = D \text{Ker } \varphi_\omega$. Действительно, согласно доказательству предложения 1 $D \text{Ker } \varphi_\omega \subseteq \text{Im}[\omega]$. По теореме 1 $\text{rk Ker } \varphi_\omega = \text{dirg } \omega + 1$, с другой стороны, $\text{rk Im}[\omega] = \text{dirg } \omega + 1$, следовательно, $\text{Im}[\omega] = D \text{Ker } \varphi_\omega$. Таким образом, если слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, то $H_1(M_g^2) = \text{Ker}[\omega] \oplus D \text{Ker } \varphi_\omega$.

Пусть $H_\omega = \langle [\gamma_1], \dots, [\gamma_N] \rangle$. Из доказательства теоремы 2.2 [5] следует, что $\text{dirg } \omega + 1 = \text{rk}_{\mathbb{Q}} \{ \int_{D\gamma_1} \omega, \dots, \int_{D\gamma_N} \omega \}$. Перенумеруем слои таким образом, что $\forall i \leq s \int_{D\gamma_i} \omega \neq 0$, а $\forall i > s \int_{D\gamma_i} \omega = 0$. Тогда

$\text{dirg } \omega + 1 = \text{rk}_{\mathbb{Q}} \{ \int_{D\gamma_1} \omega, \dots, \int_{D\gamma_s} \omega \} \leq \text{rk} \langle [\gamma_1], \dots, [\gamma_s] \rangle \leq \text{rk}(H_\omega \cap \text{Ker } \varphi_\omega)$, поскольку, как было показано выше, если $\int_{D\gamma_i} \omega \neq 0$, то $[\gamma_i] \in \text{Ker } \varphi_\omega$. Теорема доказана.

Таким образом, для компактности слоения достаточно существования $\text{dirg } \omega$ гомологически независимых слоев, классы гомологий которых принадлежат подгруппе $\text{Ker } \varphi_\omega$. В частности, если $\text{dirg } \omega = 1$ и существует негомологичный нулю слой γ , $[\gamma] \in \text{Ker } \varphi_\omega$, то слоение компактно.

Автор выражает благодарность профессору А. С. Мищенко за внимание к работе и полезные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: melnikova@micron.msk.ru

Поступило
18.06.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arnoux P., Levitt G. // Invent. Math. 1986. V. 84. P. 141–156.
2. Levitt G. // Invent. Math. 1987. V. 88. P. 635–667.
3. Новиков С. П. // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 3–49.
4. Мельникова И. А. // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 3. С. 158–160.
5. Мельникова И. А. Компактные слоения морсовских форм. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: МГУ, 1996.