Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Р. Шафаревич, Семейства приводимых абелевых поверхностей, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 6, 946–949

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1916>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:51:12

СЕМЕЙСТВА ПРИВОДИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

И. Р. Шафаревич

В работе доказывается, что для непостоянных семейств абелевых многообразий, определенных над кривыми, являющимися накрытиями заданной степени проективной прямой, общий член которых имеет число Пикара 3, решетка Севери общего члена может принадлежать лишь к конечному числу типов, с точностью до изоморфизма.

Мы продолжаем здесь рассматривать вопрос, разбиравшийся в работах [1] и [2]. В работе [1] рассматривались абелевы поверхности, определенные над полями алгебраических чисел K , имеющими фиксированную степень n . В предположении, что число Пикара абелевой поверхности имеет максимальное значение 4 доказывалось, что решетка Севери поверхности может принадлежать лишь к конечному числу типов, с точностью до изоморфизма. Здесь мы рассмотрим функциональный аналог этого вопроса для следующего случая, когда число Пикара равно 3.

Пусть $\mathcal{A} \rightarrow S$ — непостоянное семейство абелевых поверхностей над кривой S , общий член которого A имеет число Пикара 3. Пусть S допускает непостоянный морфизм $S \rightarrow \mathbb{P}^1$ заданной степени n .

ТЕОРЕМА. *Число неизоморфных решеток Севери S ограничено константой, зависящей только от n .*

При условиях теоремы A является или ложной эллиптической кривой, или приводимо и изогенно квадрату эллиптической кривой E . Первый случай рассмотрен в работе [2]. Здесь мы рассмотрим второй случай. Таким образом, A изогенно $E \times E$. Мы будем записывать $E \times E$ в виде $E \times E'$, где $x \rightarrow x'$ — некоторый фиксированный изоморфизм двух экземпляров E . Нам достаточно доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Число неизоморфных абелевых поверхностей, изогенных $E \times E'$ и определенных над $\mathbb{C}(S)$, ограничено константой, зависящей только от n .*

Нам понадобится аналог этого утверждения для одной кривой E .

ЛЕММА. *Число неизоморфных эллиптических кривых, изогенных E и определенных над $\mathbb{C}(S)$, ограничено константой, зависящей от n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X_0(N)$ — модулярная кривая, параметризующая эллиптические кривые вместе с изогениями с циклическим ядром порядка N . Рассуждения, приведенные в работе [2], показывают, что достаточно ограничить значения N , для которых кривая $X_0(N)$ допускает морфизм степени n на $\mathbb{P}^1$. Рассуждение в точности следует Оггу [3], который при $n = 2$ даже перечислил все такие N . Кривая $X(N)$ определена над $\mathbb{Q}$. Как показано в работе [2], эта кривая допускает морфизм $f: X(N) \rightarrow C$ степени $\leq \nu$ на кривую C , определенную над $\mathbb{Q}$ и имеющую род $\leq (n/\nu - 1)$, $\nu \mid n$. Достаточно рассмотреть случай $N = p^d$ и ограничить p и d . Кривая $X_0(p^d)$ имеет хорошую редукцию по любому простому модулю $l \neq p$, например, $l = 2$ или 3 . Пусть, например, $l = 2$. Над полем $\mathbb{F}_4$ существует суперсингулярная кривая. Для нее эндоморфизм Фробениуса имеет вид $\varphi = -2 \text{ Id}$. Поэтому

все изогении определены над $\mathbb{F}_4$. Таким образом, мы получаем $\frac{1}{24}p^{d-1}(p+1)$ точек на кривой $X_0(p^d)/2$. С другой стороны, легко видеть, что эта кривая допускает морфизм f на кривую C с такими же свойствами, что и морфизм f . Применяя оценку Вейля к кривой C , мы получаем

$$\# \left(\frac{X_0(p^d)}{2} \right) (\mathbb{F}_4) \leq \nu \left(5 + 4 \left(\frac{n}{\nu} - 1 \right)^2 \right),$$

т.е.

$$\frac{1}{24}p^{d-1}(p+1) \leq \nu \left(5 + 4 \left(\frac{n}{\nu} - 1 \right)^2 \right),$$

что и доказывает лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Начнем с ряда редукций. Мы должны оценить число неизоморфных среди поверхностей $(E \times E')/M$, где $\#M = p^d$ и M определено над полем $\mathbb{C}(S)$. Если $M \supset E_p$, то $(E \times E')/M \simeq (E \times E')/M'$, где $M' = M/E_p$, и задача сводится к меньшему M . Аналогично при $M \supset E'_p$. Поэтому мы можем считать, что $M \cap E = \{\alpha\}$, $M \cap E' = \{\beta'\}$, $p^r\alpha = 0$, $p^s\beta' = 0$, причем согласно лемме $p^r \leq c$, $p^s \leq c$, где c – константа, зависящая только от p^d . Как всякая подгруппа прямого произведения, M может быть получено как прообраз графика Γ_φ , где φ – изоморфизм подгрупп $A \subset E/\{\alpha\}$ и $A' \subset E'/\{\beta'\}$. Очевидно, что существует изогения $\chi: E'/\{\beta'\} \rightarrow E/\{\alpha\}$, степень которой не превосходит c^2 . Положим $\chi\varphi = \varphi'$, $\varphi': A \rightarrow E/\{\alpha\}$. Мы получаем изогению

$$(E/\{\alpha\} \times E/\{\beta'\})/\Gamma_\varphi \rightarrow (E/\{\alpha\} \times E/\{\alpha\})/\Gamma_{\varphi'},$$

степень которой также ограничена в зависимости от p^d . Решетки Севери двух таких абелевых поверхностей определяют друг друга с точностью до конечного числа возможностей, ограниченных в зависимости от p^d . Заменяя $E/\{\alpha\}$ на E , мы редуцируем общий случай к случаю $M = \Gamma_\varphi$, где $\varphi: A \rightarrow E'$ – гомоморфизм подгруппы $A \subset E$, определенной над полем $\mathbb{C}(S)$. Пусть теперь подгруппа A имеет тип (p^u, p^v) , $u \leq v$. Тогда $p^{v-u}A$ – циклическая подгруппа, определенная над $\mathbb{C}(S)$, и согласно лемме $p^{v-u} \leq c$. Обозначим через $\overline{\varphi}$ ограничение φ на E_{p^u} . Тогда $(\Gamma_\varphi : \Gamma_{\overline{\varphi}}) \leq c$, и мы имеем изогению $(E \times E')/\Gamma_{\overline{\varphi}} \rightarrow (E \times E')/\Gamma_\varphi$ степени $\leq c$. Этим утверждение сводится к случаю $A = E_{p^u}$, $\varphi \subset \text{End } E_{p^u}$.

Наконец, предположим, что φ представляется в виде $\varphi = a \text{Id} + p\psi$, $a \in \mathbb{Z}$. Положим $E(a) = \{(x, ax), x \in A\}$. Очевидно, что $E(a) \simeq E$ и $E \times E' = E(a) \times E'$. В последнем представлении эндоморфизм φ записывается в виде $(0, p\psi)$. Так как $\Gamma_{p\psi}/E_p = \Gamma_{\overline{\psi}}$, где $\overline{\psi}$ рассматривается как эндоморфизм группы $E_{p^u}/E_p \simeq E_{p^{u-1}}$, и

$$(E \times E')/\Gamma_{p\psi} = ((E \times E')/E_p)/(\Gamma_{p\psi}/E_p) \simeq (E \times E')/\Gamma_{\overline{\psi}},$$

то рассмотрение эндоморфизма φ группы E_{p^u} сводится к рассмотрению эндоморфизма $\overline{\psi}$ группы $E_{p^{u-1}}$. Таким образом, мы можем предполагать, что

$$\varphi \neq a \text{Id} + p\psi. \quad (1)$$

Теперь можно опять применить прием Огга из его работы [3], использованный уже при доказательстве леммы и в работе [2]. Мы рассматриваем структуры, состоящие из эллиптической кривой E и эндоморфизма φ группы E_{p^u} . Их параметризация описана в работе Делиня и Раппопорта [4]. При $p > 3$ они описываются кривой, имеющей гладкую модель над $\mathbb{Z}[1/p]$. Эта кривая распадается на неприводимые компоненты, соответствующие классам сопряженности эндоморфизмов относительно $\text{Aut}(E_{p^u})$. Каждая неприводимая компонента является "модулярной кривой уровня $H^n - M_H$ – в смысле работы [4], где H – централизатор соответствующего эндоморфизма в группе $\text{GL}(2, \mathbb{Z}/p^u)$. Согласно [4] кривая определена над подполем кругового поля $\mathbb{Q}(\zeta_{p^u})$, принадлежащем группе автоморфизмов, возводящих ζ_{p^u} в степени $\det g, g \in H$. Так как H в нашем случае содержит все гомотетии, то эта группа содержит $((\mathbb{Z}/p^u)^x)^2$, а соответствующее поле квадратично или композит двух квадратичных. Поэтому поле классов вычетов по простому идеалу, делящему простое число l , содержит не более чем l элементов.

Теперь применим прием Огга и рассуждения из работы [2]. С одной стороны, так как семейство $(E \times E')/\Gamma_\varphi$ определено над кривой S , имеющей морфизм $S \rightarrow \mathbb{P}^1$ степени p^u , мы получаем, что таким же морфизмом обладает кривая M_H . Отсюда вытекает существование морфизма $M_H \rightarrow C$ с теми же свойствами, что и в доказательстве леммы (как уже было доказано в работе [2]). Выбирая простое число $l = 2$ или 3 , отличное от p , мы получаем, как при доказательстве леммы (или в работе [2]), неравенство для числа точек кривой M_H/l (где l – простой делитель l в поле определения кривой M_H). В поле $\mathbb{F}_4$ (полагая для определенности $l = 2$)

$$\#(M_H/l)(\mathbb{F}_4) \leq \nu \left(5 + 4 \left(\frac{n}{\nu} - 1 \right)^2 \right). \quad (2)$$

С другой стороны, то, что структура (E, φ) определена над полем K , означает, что кривая E определена над этим полем, и

$$\varphi\sigma = \sigma\varphi$$

для автоморфизмов σ группы Галуа алгебраического замыкания этого поля. В частности, если кривая E определена над полем $\mathbb{F}_4$ и суперсингулярна, то автоморфизмы группы Галуа алгебраического замыкания действуют как гомотетии и поэтому все структуры (E, φ) определены над полем $\mathbb{F}_4$ и дают точки из $(M_H/l)(\mathbb{F}_4)$. Число разных структур равно $(\text{GL}(2, \mathbb{Z}/p^u) : H)$. Поэтому

$$\#(M_H/l)(\mathbb{F}_4) \geq (\text{GL}(2, \mathbb{Z}/p^u) : H),$$

и нам остается дать оценку снизу для последнего индекса.

Мы будем считать, что группа $\text{GL}(2, \mathbb{Z}/p^u)$ действует на группе $(\mathbb{Z}/p^u)^2$. Сначала докажем, что для рассматриваемого эндоморфизма φ можно найти такой элемент $e \in (\mathbb{Z}/p^u)^2$, что e и $\varphi(e)$ порождают всю группу $(\mathbb{Z}/p^u)^2$. Если φ задается матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то для этого достаточно найти такие u и $v \in \mathbb{Z}/p^u$, что

$$\det \begin{pmatrix} u & v \\ au + cv & bu + dv \end{pmatrix} \not\equiv 0 \pmod{p},$$

т.е. $bu^2 + (d-a)uv - cv^2 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Они существуют, если хоть один из вычетов $b, (d-a), c \pmod{p}$ отличен от 0. В нашем случае это так, поскольку мы предполагаем, что эндоморфизм φ не представим в виде $a \text{Id} + p\psi$ (ср. (1)).

Таким образом, φ реализуется как умножение на T в модуле $(\mathbb{Z}/p^u)[T]/F$, где $F(T)$ – характеристический многочлен эндоморфизма φ . Легко видеть, что в этом случае централизатор φ (т.е. H) совпадает с $((\mathbb{Z}/p^u)[T]/F)^x$. Порядок последней группы вычисляется очевидным образом: надо рассмотреть гомоморфизм

$$(\mathbb{Z}/p^u)[T]/F \rightarrow (\mathbb{Z}/p)[T]/\overline{F}.$$

Очевидно, что элемент слева обратим тогда же, когда и его образ справа. Поэтому

$$\#((\mathbb{Z}/p^u)[T]/F)^x = p^{2u-2} \#((\mathbb{Z}/p)[T]/\overline{F}).$$

В случаях, когда многочлен $\overline{F}$

- а) разлагается на два разных линейных множителя над $\mathbb{F}_p$,
- б) является квадратом линейного и
- с) неприводим над $\mathbb{F}_p$,

$\#((\mathbb{Z}/p)[T]/\overline{F})$ равняется а) $(p-1)^2$, б) $(p-1)p$, с) p^2-1 , и, значит, $\#((\mathbb{Z}/p^u)[T]/F)$ равняется а) $(p-1)^2 p^{2u-2}$, б) $(p-1)p^{2u-1}$, с) $(p^2-1)p^{2u-2}$. Так как

$$\# \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/p^u) = (p^2-1)(p-1)p^{4u-3},$$

то $(\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/p^u) : H)$ равняется а) $p^{2u-1}(p+1)$, б) $p^{2u-2}(p^2-1)$, с) $p^{2u-1}(p-1)$. Во всех случаях это число $\geq p^{2u-1}$. Вместе с неравенством (2) это дает ограничение на p^u , т.е. доказывает предложение, а, значит, и теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказанной теоремы следует аналогичное утверждение о семействах поверхностей типа КЗ с числом Пикара 19. Редукция к случаю абелевых многообразий дословно такая же, как в случае числа Пикара 20, проведенная в работе [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. А. Н. Паршин обратил мое внимание на то, что лемма, доказанная в начале работы, была также доказана в препринте [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Результат, аналогичный доказанному в лемме, для случая числовых полей недавно получил Мерел. Вопрос в этом случае гораздо труднее, но и оценка порядка возможной циклической подгруппы $A \subset E(K)$ порядка p^u , определенной над полем K , в зависимости от степени поля K , слабее: она экспоненциальна, в то время, как из доказательства леммы вытекает квадратичная оценка. Было бы интересно найти истинную оценку в функциональном случае. Может ли она быть линейной?

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
14.08.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shafarevich I. R. // Algebra and Analysis / ed. M. M. Arslanov: De Gruyter, 1996. P. 103–108. 2. Шафаревич И. Р. // Изв. РАН. Сер. матем. 1966. Т. 60. № 5. С. 213–223. 3. Ogg A. // Bull. Soc. Math. France. 1974. V. 102. P. 449–462. 4. Deligne P., Rappoport M. // Lecture Notes in Math. 1972. V. 349. P. 143–316. 5. Khae Viet Nguen, Masa-Hiko Saito. *D-gonality of Modular Curves and Bounding Torsion*. Preprint: Kyoto Univ., 1996. March.