Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. П. Фоменко, О жесткости одного класса склеенных поверхностей, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 416–422

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 02:47:01

УДК 517

О ЖЕСТКОСТИ ОДНОГО КЛАССА СКЛЕЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Л. П. Фоменко

Методом интегральных формул в работе доказывается жесткость одного класса замкнутых невыпуклых поверхностей, склеенных из регулярных кусков поверхностей положительной гауссовой кривизны с гладкими краями.

Библиография: 6 названий.

Вопрос о жесткости кусочно выпуклых склеенных поверхностей наиболее эффективно решается методом интегральных формул, предложенным В. Бляшке [1, с. 217]. Этот метод основывается на идее, что интеграл по поверхности с неположительным подынтегральным выражением преобразуется в интеграл с неотрицательным подынтегральным выражением. Отсюда делается вывод, что как интеграл в целом, так и подынтегральное выражение обращаются в нуль. На основе этого заключения устанавливается жесткость рассматриваемой поверхности. Указанный метод отличается своей простотой в применении, а также тем, что он может быть использован при исследовании как замкнутых поверхностей, так и поверхностей с краем. Этим методом на основе интегральных формул, сходных с формулой Бляшке, была доказана жесткость некоторых классов поверхностей (см. [2, с. 471], [3]–[6]).

В настоящей работе получена новая интегральная формула для склеенных поверхностей и с ее помощью установлены новые достаточные условия жесткости склеенных кусочно выпуклых поверхностей.

1. Формулировка результата

1. Пусть F – поверхность с краем ∂F в трехмерном евклидовом пространстве E^3 с декартовой системой координат $Oxyz$. Будем говорить, что поверхность F *удовлетворяет условиям регулярности*, если она задана уравнением $\tilde{r} = \{x, y, f(x, y)\}$, $(x, y) \in \bar{D} \equiv D + \partial D$, где $f \in C^3(\bar{D})$, а ∂F представляет совокупность конечного числа C^2 -гладких непересекающихся кривых.

2. Пусть $F(z \geq 0)$ – поверхность, склеенная из конечного числа поверхностей, удовлетворяющих условиям регулярности. Пусть, далее, $F(z \geq 0)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) поверхность $F(z \geq 0)$ однозначно проектируется на плоскость Oxy , лежит в полупространстве $E_+^3: z \geq 0$ и имеет плоский край $\partial F(z \geq 0)$, лежащий в плоскости $z = 0$;

- 2) поверхность $F(z \geq 0)$ выпукла, не содержит плоских кусков, на ней существуют точки, в которых гауссова кривизна K строго положительна;
- 3) прямолинейные образующие областей с $K = 0$ на $F(z \geq 0)$, если они существуют, выходят на ребра негладкого выпуклого склеивания;
- 4) поверхность $F(z \geq 0)$ однозначно проектируется на плоскость Oxy в направлении некоторого постоянного вектора $\bar{e}$.

3. Введем, следуя [6], понятие зеркального выпучивания поверхности F относительно плоскости (π_1) .

Обозначим через F_1 шапочку, отсекаемую от поверхности F плоскостью (π_1) , через γ_1 линию пересечения поверхности F и плоскости (π_1) ; F_1^* – зеркальное отражение шапочки F_1 относительно плоскости (π_1) . *Зеркально выпученной поверхностью относительно плоскости (π_1)* назовем поверхность $F^1 = (F \setminus F_1) \cup F_1^* \cup \gamma_1$. Пусть (π_2) – плоскость, параллельная плоскости (π_1) , F_2 – шапочка, отсекаемая плоскостью (π_2) от поверхности F_1^* , $\gamma_2 = (\pi_2) \cap F_1^*$. Пусть F_2^* – зеркальное отражение шапочки F_2 относительно плоскости (π_2) . *Зеркально выпученной поверхностью относительно плоскостей $(\pi_1), (\pi_2)$* назовем поверхность $F^2 = (F^1 \setminus F_2) \cup F_2^* \cup \gamma_2$. Повторяя этот процесс зеркального выпучивания относительно параллельных между собой плоскостей $(\pi_1), (\pi_2), \dots, (\pi_m)$, получим поверхность F_m , которая будет иметь m ребер $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$, лежащих соответственно в плоскостях $(\pi_1), (\pi_2), \dots, (\pi_m)$.

Обозначим через $F^m(z \geq 0)$ поверхность, полученную из $F(z \geq 0)$ последовательным m раз зеркальным выпучиванием относительно параллельных плоскостей (π_i^+) , $i = 1, \dots, m$, с общим нормальным вектором $\bar{e}$, не проходящих через ребра поверхности $F(z \geq 0)$.

Определим поверхность $F(z \leq 0)$, лежащую в полупространстве $E^3: z \leq 0$ аналогично тому, как это сделано в случае поверхности $F(z \geq 0)$. Пусть $F^n(z \leq 0)$ – поверхность, полученная из $F(z \leq 0)$ n раз последовательным зеркальным выпучиванием относительно параллельных плоскостей (π_j^-) , $j = 1, \dots, n$, с нормальным вектором $\bar{e}$, не проходящих через ребра поверхности $F(z \leq 0)$.

4. Пусть края поверхностей $F^m(z \geq 0)$ и $F^n(z \leq 0)$ совпадают, т.е. $\partial F^m(z \geq 0) = \partial F^n(z \leq 0) \equiv \gamma_0$. Обозначим замкнутую поверхность, склеенную из $F^m(z \geq 0)$ и $F^n(z \leq 0)$ вдоль их общего края γ_0 , через $F^{m,n}$.

5. Будем рассматривать бесконечно малые изгибания склеенных поверхностей в E^3 с полем смещений $\bar{U}$, предполагая, что поле $\bar{U}$ непрерывно на рассматриваемой поверхности и на каждом куске F поверхности, удовлетворяющем условиям регулярности, поле $\bar{U}$ принадлежит классу $C^3(F + \partial F)$. Поверхность называется *жесткой*, если все ее поля смещений имеют вид $\bar{U} = [\bar{\Omega}, \bar{r}] + \bar{c}$, где $\bar{\Omega} = \text{const}$, $\bar{c} = \text{const}$, $\bar{r}$ – радиус-вектор точек поверхности. Бесконечно малые изгибания с полями смещений указанного вида называют *тривиальными*.

6. Имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Поверхность $F^{m,n} = F^m(z \geq 0) \cup F^n(z \leq 0) \cup \gamma_0$ является жесткой, если $F^m(z \geq 0) \subseteq E_+^3$, $F^n(z \leq 0) \subseteq E_-^3$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть поверхность $F^m(z \geq 0)$, $m \geq 0$, вдоль края $\partial F^m(z \geq 0)$ закреплена в смысле Погорелова относительно плоскости (π_1^+) , т.е. $(\bar{U}, \bar{e}) = 0$ вдоль $\partial F^m(z \geq 0)$. Тогда поверхность $F^m(z \geq 0)$ допускает точно три линейно независимых тривиальных бесконечно малых изгибаний.

2. Основная интегральная формула

1. Пусть F – поверхность, удовлетворяющая условиям регулярности, $\bar{U}$ – поле смещений точек поверхности F при ее бесконечно малом изгибании, $\bar{V}$ – поле вращений, соответствующее полю $\bar{U}$. Известно [2], что $\bar{V} \in C^3(F + \partial F)$. Кроме того, имеют место формулы $\bar{V}_x = \alpha \bar{r}_x + \beta \bar{r}_y$, $\bar{V}_y = \gamma \bar{r}_x - \alpha \bar{r}_y$, где α, β, γ – некоторые функции класса $C^1(F + \partial F)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть поверхность F и поле $\bar{U}$ удовлетворяют перечисленным выше условиям регулярности. Тогда имеет место формула

$$2 \iint_F (\bar{r}, \bar{k}) \bar{n} \Delta dS = \oint_{\partial F} (\bar{r}, \bar{k}) [\bar{V}, d\bar{V}] - \oint_{\partial F} \bar{U}(\bar{k}, d\bar{V}), \quad (1)$$

где $\bar{k}$ – орт оси Oz в E^3 , $\bar{n}$ – единичный вектор нормали поверхности F , составляющий острый угол с вектором $\bar{k}$, $\Delta = -\alpha^2 - \beta\gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим двойной интеграл J , стоящий в левой части формулы (1).

Так как $(\bar{r}, \bar{k}) = f$; $dS = \sqrt{g} dx dy$, где $g = 1 + p^2 + q^2$, $p = f_x$, $q = f_y$; $[\bar{V}_x, \bar{V}_y] = \Delta \bar{n} \sqrt{g}$, то

$$J = \iint_D f[\bar{V}_x, \bar{V}_y] dx dy.$$

Преобразуем подынтегральное выражение для J . Имеем

$$2f[\bar{V}_x, \bar{V}_y] = (f[\bar{V}, \bar{V}_y])_x - (f[\bar{V}, \bar{V}_x])_y + f_y[\bar{V}, \bar{V}_x] - f_x[\bar{V}, \bar{V}_y].$$

Подставляя полученное выражение в формулу для J и используя формулу Грина, находим

$$2J = \oint_{\partial D} f[\bar{V}, d\bar{V}] - \iint_D (f_x[\bar{V}, \bar{V}_y] - f_y[\bar{V}, \bar{V}_x]) dx dy.$$

Учитывая, что $\bar{U}_x = [\bar{V}, \bar{r}_x]$, $\bar{U}_y = [\bar{V}, \bar{r}_y]$, двойной интеграл в правой части последнего соотношения приводится к виду

$$\oint_{\partial D} (-B\bar{U}) dx + (A\bar{U}) dy + \iint_D \bar{U}(A_x + B_y) dx dy,$$

где $A = \gamma p - \alpha q$, $B = -\alpha p - \beta q$. Используя систему уравнений, которой удовлетворяют функции α, β, γ (см. [2]), находим $A_x + B_y \equiv 0$. Так как $(-B dx + A dy) = (\bar{k}, d\bar{V})$, имеем

$$2J = \oint_{\partial D} f[\bar{V}, d\bar{V}] - \oint_{\partial D} \bar{U}(\bar{k}, d\bar{V}).$$

Записав правую часть полученного выражения в инвариантной форме, получим

$$2J = \oint_{\partial D} (\bar{r}, \bar{k}) [\bar{V}, d\bar{V}] - \oint_{\partial D} \bar{U}(\bar{k}, d\bar{V}),$$

что и доказывает формулу (1).

2. Пусть $F = \bigcup_{i=1}^k F_i$ – поверхность, склеенная из конечного числа поверхностей F_i , $i = 1, \dots, k$, удовлетворяющих условиям регулярности. Линии склеивания поверхностей F_i , $i = 1, \dots, k$, будем называть *ребрами*. Пусть F^+ и F^- – куски поверхности F , склеенные вдоль ребра L , при этом положительная ориентация обхода ребра выбрана так, что при обходе по L поверхность F^+ лежит слева. Обозначим через a^+ и a^- предельные значения на ребре L соответствующей величины a на поверхностях F^+ и F^- . Пусть, далее, $\delta k_s^\pm$ – вариация нормальной кривизны $k_s^\pm$ поверхности $F^\pm$ в направлении ребра L при бесконечно малом изгибании поверхности F .

Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. При сделанных предположениях относительно регулярности поверхности $F = \bigcup_{i=1}^k F_i$ и поля $\bar{U}$ имеет место формула

$$2 \iint_F (\bar{r}, \bar{k}) \bar{n} \Delta dS = \oint_{\partial F} (\bar{r}, \bar{k}) [\bar{V}, d\bar{V}] - \oint_{\partial F} \bar{U}(\bar{k}, d\bar{V}) + \sum_{i=1}^p \oint_{L_i} (\bar{r}, \bar{k}) \delta \vartheta [\bar{n}^+ \delta k_s^+ + \bar{n}^- \delta k_s^-] ds, \quad (2)$$

где p – число ребер L_i на F , $\vartheta = \widehat{(\bar{n}^+, \bar{n}^-)}$ – угол склеивания поверхностей F^+ и F^- вдоль ребра L_i , отсчитываемый от $\bar{n}^+$ и $\bar{n}^-$ против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления обхода L_i , ds – элемент длины дуги ребра L_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем формулу (1) для каждого куска F_i , $i = 1, \dots, k$, поверхности F и сложим соответственно левые и правые части полученных равенств. Учитывая, что вдоль ребра L имеем $\bar{U}^+ = \bar{U}^-$, полученный результат запишем в виде

$$2 \iint_F (\bar{r}, \bar{k}) \bar{n} \Delta dS = \oint_{\partial F} (\bar{r}, \bar{k}) [\bar{V}, d\bar{V}] - \oint_{\partial F} \bar{U}(\bar{k}, d\bar{V}) + \sum_{i=1}^p \oint_{L_i} (\bar{r}, \bar{k}) ([\bar{V}^+, d\bar{V}^+] - [\bar{V}^-, d\bar{V}^-]) - \bar{U}[\bar{k}, d\bar{V}^+ - d\bar{V}^-].$$

Преобразуем контурный интеграл по ребру L_i , входящий в правую часть последней формулы, обозначив его через J_i . Учитывая, что ребро L_i является замкнутой кривой класса C^2 , получим

$$J_i = \oint_{L_i} (\bar{r}, \bar{k}) [\bar{V}^+ - \bar{V}^-, d\bar{V}^+] - \oint_{L_i} [\bar{V}^-, \bar{V}^+ - \bar{V}^-] d(\bar{r}, \bar{k}) - \oint_{L_i} (\bar{r}, \bar{k}) [d\bar{V}^-, \bar{V}^+ - \bar{V}^-] + \oint_{L_i} (\bar{k}, \bar{V}^+ - \bar{V}^-) d\bar{U}.$$

Используя известные формулы (см., например, [2])

$$\begin{aligned} d\bar{V}^\pm &= (\delta k_s^\pm \bar{l}^\pm + \delta \tau_g^\pm \bar{s}), & \bar{V}^+ - \bar{V}^- &= -\delta \vartheta \bar{s}, \\ d\bar{U} &= [\bar{V}^\pm, \bar{s}] ds, & d\bar{r} &= \bar{s} \cdot ds, & \bar{l}^\pm &= [\bar{s}, \bar{n}^\pm], \end{aligned}$$

где $\delta\tau_g^\pm$ – вариация геодезического кручения $\tau_g^\pm$ ребра L_i на поверхности $F^\pm$, преобразуем интеграл J_i к виду

$$\begin{aligned} J_i &= \oint_{L_i} (\bar{r}, \bar{k}) [-\bar{s} \delta\vartheta, \bar{l}^+ \delta k_s^+] ds + \oint_{L_i} [\bar{V}^-, \delta\vartheta \bar{s}] d(\bar{r}, \bar{k}) \\ &\quad - \oint_{L_i} (\bar{r}, \bar{k}) [\bar{l}^- \delta k_s^-, -\delta\vartheta \bar{s}] ds + \oint_{L_i} [\bar{k}, -\delta\vartheta \bar{s}] d\bar{U} \\ &= \oint_{L_i} (\bar{r}, \bar{k}) \delta\vartheta (\bar{n}^+ \delta k_s^+ + \bar{n}^- \delta k_s^-) ds, \end{aligned}$$

что и доказывает формулу (2).

3. Доказательство теорем 1, 2

1. Доказательство теоремы 1. Выпишем интегральную формулу (2), умноженную скалярно на вектор $\bar{e}$, для поверхностей $F^m(z \geq 0)$ и $F^n(z \leq 0)$ и вычтем, соответственно, левые и правые части полученных формул. Учитывая, что вдоль линии склеивания γ_0 , лежащей в плоскости Oxy , выполняются равенства $\bar{U}^+ = \bar{U}^-$ и $(\bar{k}, d\bar{V}^+ - d\bar{V}^-) = -\delta\vartheta(\bar{k}, \bar{s}) = 0$, в результате указанного вычитания получим

$$2 \iint_{F^{m,n}} (\bar{r}, \bar{k}) (\bar{e}, \bar{n}) \Delta dS = \sum_{i=1}^{p_1+p_2} \oint_{L_i} (\bar{r}, \bar{k}) \delta\vartheta (\delta k_s^+ (\bar{n}^+, \bar{e}) + \delta k_s^- (\bar{n}^-, \bar{e})) ds, \quad (3)$$

где вектор $\bar{n}$ порождает внешнюю ориентацию поверхности $F^{m,n}$; p_1, p_2 – число ребер выпуклого склеивания на $F^m(z \geq 0)$ и $F^n(z \leq 0)$ соответственно. В формуле (3) в правой части отсутствуют интегралы по ребрам зеркального выпучивания, так как они обращаются в нуль. В самом деле, пусть L_i является ребром зеркального выпучивания относительно плоскости (π) с нормалью $\bar{e}$. Тогда вдоль L_i имеем $k_s^+ = -k_s^-$ и потому $\sin \vartheta \delta k_s^\pm = -\delta\vartheta k_s^\mp$ (см., например, [2, с. 449]). Так как $\sin \vartheta \neq 0$, откуда находим

$$\delta k_s^+ (\bar{n}^+, \bar{e}) + \delta k_s^- (\bar{n}^-, \bar{e}) = -\frac{\delta\vartheta}{\sin \vartheta} (k_s^- (\bar{n}^+, \bar{e}) + k_s^+ (\bar{n}^-, \bar{e})) = \frac{k^+ \delta\vartheta}{\sin \vartheta} (\bar{n}^+ - \bar{n}^-, \bar{e}) = 0.$$

Это означает, что контурный интеграл по ребру зеркального выпучивания равен нулю.

Так как на поверхности $F^{m,n}$ на ее регулярных кусках имеем $K \geq 0$, то $\Delta \leq 0$. Кроме того, почти всюду на $F^{m,n}$ имеем $(\bar{r}, \bar{k}) (\bar{n}, \bar{e}) \geq 0$; следовательно, левая часть формулы (3) неположительна.

Оценим знак правой части формулы (3). Рассмотрим случай, когда вдоль ребра выпуклого склеивания на дуге L_i^* положительной линейной меры угол склеивания ϑ равен нулю. Тогда $\sin \vartheta = 0$ и из формулы $\sin \vartheta \delta k_s^\pm = -\delta\vartheta k_s^\mp$ следует, что либо $k_s^+ = k_s^- = 0$, либо $\delta\vartheta = 0$ на дуге L_i^* . В случае $\delta\vartheta = 0$ интеграл по дуге L_i^* в правой части формулы (3) равен нулю. В случае $k_s^+ = k_s^- = 0$ имеем (см., например, [5]) $\delta k_s^+ = \delta k_s^- = 0$, что означает, что интеграл по дуге L_i^* в правой части формулы (3) также равен нулю.

Будем считать далее, что на участке интегрирования по ребру L_i имеем $\sin \vartheta \neq 0$. Тогда

$$J_i = - \oint_{L_i} \frac{(\bar{r}, \bar{k}) (\delta\vartheta)^2}{\sin \vartheta} (k_s^- (\bar{n}^+, \bar{e}) + k_s^+ (\bar{n}^-, \bar{e})) ds.$$

Рассмотрим случай $(\bar{r}, \bar{k}) \geq 0$.

Если поверхность $F^{m,n}$ в окрестности ребра L_i расположена выпуклостью вниз, то $k_s^- \geq 0, k_s^+ \geq 0, (\bar{e}, \bar{n}^+) \geq 0, (\bar{e}, \bar{n}^-) \geq 0, \pi < \vartheta < 2\pi, \sin \vartheta < 0$, и потому $J_i \geq 0$.

Рассмотрим случай $(\bar{r}, \bar{k}) \leq 0$.

Если в окрестности ребра L_i поверхность располагается выпуклостью вверх, то при внешней ориентации поверхности $F^{m,n}$ имеем $k_s^- \geq 0, k_s^+ \geq 0, (\bar{e}, \bar{n}^+) \leq 0, (\bar{e}, \bar{n}^-) \leq 0, \pi < \vartheta < 2\pi, \sin \vartheta < 0$. Но тогда $J_i \geq 0$.

Аналогичный результат получаем, если в окрестности ребра поверхность располагается выпуклостью вниз. В этом случае $k_s^- \leq 0, k_s^+ \leq 0, (\bar{e}, \bar{n}^+) \leq 0, (\bar{e}, \bar{n}^-) \leq 0, 0 < \vartheta < \pi, \sin \vartheta > 0$, и потому $J_1 \geq 0$. Отсюда следует, что в формуле (3) правая часть неотрицательна.

Но тогда на поверхности $F^{m,n}$ имеем $\Delta \equiv 0$ на регулярных кусках и $\delta k_s^+ = \delta k_s^- = 0$ вдоль ребер выпуклого склеивания. Отсюда следует (см., например, [5]), что при сделанных предположениях относительно поверхности $F^{m,n}$ поле смещений имеет вид $\bar{U} = [\bar{\Omega}, \bar{r}] + \bar{c}$, а это доказывает жесткость поверхности $F^{m,n}$.

2. Доказательство теоремы 2. Умножая формулу (2) скалярно на векторе $\bar{e}$ и учитывая, что вдоль $\partial F^m(z \geq 0)$ имеем $(\bar{r}, \bar{k}) = 0$ и $(\bar{U}, \bar{e}) = 0$, получим

$$2 \iint_{F^m(z \geq 0)} (\bar{r}, \bar{n})(\bar{n}, \bar{e}) \Delta dS = \sum_{i=1}^p \oint_{L_i} (\bar{r}, \bar{k}) \delta \vartheta ((\bar{e}, \bar{n}^+) \delta k_s^+ + (\bar{e}, \bar{n}^-) \delta k_s^-) ds. \quad (4)$$

Как показано при доказательстве теоремы 1, в формуле (4) в правой части интегралы по ребрам зеркального выпучивания равны нулю, и интегралы по участкам L_i^* ребер L_i выпуклого склеивания, на которых $\sin \vartheta = 0$, также равны нулю.

Оценим правую часть формулы (4) на участках ребер L_i выпуклого склеивания, считая $\sin \vartheta \neq 0$. Учитывая, что на поверхности $F^m(z \geq 0)$ выполняется неравенство $(\bar{r}, \bar{k}) \geq 0$, подынтегральное выражение контурных интегралов в формуле (4) приводится к виду

$$-(\bar{r}, \bar{k}) (\delta \vartheta)^2 (k_s^-(\bar{n}^+, \bar{e}) + k_s^+(\bar{n}^-, \bar{e})) \sin^{-1} \vartheta.$$

Как показано при доказательстве теоремы 1, это выражение неотрицательно. Следовательно, правая часть формулы (4) неотрицательна, что приводит к условиям $\Delta \equiv 0$ на $F^m(z \geq 0)$ и $\delta k_s^+ = \delta k_s^- = 0$ на участках выпуклого склеивания с $\vartheta \neq 0$. Отсюда следует (см., например, [5]), что на поверхности $F^m(z \geq 0)$ имеем $\bar{U} = [\bar{\Omega}, \bar{r}] + \bar{c}$, где $\bar{\Omega} = \text{const}$, $\bar{c} = \text{const}$. Среди полей смещений вида $\bar{U} = [\bar{\Omega}, \bar{r}] + \bar{c}$ существует лишь три линейно независимых поля, удовлетворяющих условию $(\bar{U}, \bar{e}) = 0$ вдоль $\partial F^m(z \geq 0)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бляшке В. Дифференциальная геометрия. М.: ОНТИ, 1936.
- [2] Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
- [3] Боярский Б. В. О жесткости некоторых составных поверхностей // УМН. 1959. Т. 14. № 3. С. 141–146.
- [4] Сабитов И. Х. Об одном условии жесткости составных поверхностей // Матем. заметки. 1967. Т. 2. № 1. С. 105–113.
- [5] Марков П. Е. О жесткости звездных внутренне склеенных поверхностей // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 3. С. 321–333.
- [6] Фоменко В. Т., Марков П. Е. О жесткости зеркально-выпученных поверхностей // Матем. заметки. 1976. Т. 19. № 3. С. 469–479.

Таганрогский государственный педагогический институт
E-mail: fomenko@tgpi.ttn.ru

Поступило
05.05.1997
Исправленный вариант
25.08.2002