Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гадильшин, О рассеянии на цилиндрической ловушке в критическом случае, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 355–370

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm194>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 11:38:00

УДК 517.956

О РАССЕЯНИИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЛОВУШКЕ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Р. Р. Гадыльшин

Рассмотрен двумерный аналог резонатора Гельмгольца со стенками конечной толщины в критическом случае, когда существует частота такая, что она является одновременно пределом полюсов как порождаемых ограниченной компонентой резонатора, так и узкого канала связи. В предположении, что предельная частота является простой для ограниченной компоненты, методом согласования асимптотических разложений построены асимптотики двух полюсов, сходящихся к этой частоте. Получены явные формулы для главных членов асимптотик полюсов и решения задачи рассеяния.

Библиография: 17 названий.

В работе рассматривается случай, когда сечение цилиндрического рассеивателя в пределе гомеоморфно кольцу, а возмущенная область получается вырезанием узкого канала $\varkappa_\varepsilon$, соединяющего обе несвязные компоненты внешности предельного сечения (ограниченную Ω^{in} и неограниченную Ω^{ex}) и имеющего “диаметр” порядка $\varepsilon \ll 1$. Соответствующая математическая модель (как для возмущенной, так и для предельных задач) описывается краевой задачей Неймана для уравнения Гельмгольца. Известно [1], что аналитическое продолжение решения возмущенной задачи в этом случае, в отличие от случая граничных условий Дирихле [2], имеет две серии полюсов с малыми мнимыми частями. Предельным множеством для первой серии является множество Σ^{in} собственных частот (корней из собственных значений) задачи Неймана для $-\Delta$ (предельной внутренней задачи). Для второй серии предельное множество – это множество $\Sigma^{\text{ch}} = \{m\pi/h\}_{m=1}^\infty$, где h – длина канала связи. В [3] показано, что в случаях, когда предельная частота k_0 является простой собственной частотой из Σ^{in} , отделенной от Σ^{ch} , либо, наоборот, когда $k_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$, у аналитического продолжения функции Грина возмущенной задачи существует по единственному полюсу первого порядка, сходящемуся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к k_0 , и каждому из них соответствует по одной обобщенной собственной функции. В [4] методом согласования асимптотических разложений [5]–[7] были получены явные формулы для главных членов асимптотик как этих характеристик, так и пиков решений задачи рассеяния при вещественных частотах, близких к таким k_0 . Из этих формул следовало, что в обоих случаях во внешности резонатора (т.е. вне ограниченной компоненты и вне канала связи) решение возмущенной задачи отличается от решения предельной задачи в неограниченной компоненте на величину $O(1)$. Поведение

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 02-01-00768 и № 00-15-96038, и Министерства образования РФ, грант Е00-1.0-53.

же решения возмущенной задачи в ограниченной компоненте (в ловушке) в этих случаях различалось существенно: при частотах, близких к $\Sigma^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$, оно имело порядок ε^{-1} , а при частотах, близких к $\Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$, было ограниченным. В настоящей работе анализируется критическая ситуация, когда предельная частота k_0 одновременно является простой собственной частотой предельной внутренней задачи и принадлежит множеству Σ^{ch} . Результаты работы анонсированы в [8].

1. Постановка задачи, предварительные сведения и формулировка результатов. Пусть Ω^{in} и Ω – односвязные ограниченные области в $\mathbb{R}^2$, $\overline{\Omega}^{\text{in}} \subset \Omega$, $\Omega^{\text{ex}} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$, $\partial\Omega^{\text{in(ex)}} \in C^\infty$, $x = (x_1, x_2)$. Предполагается, что Ω^{in} в окрестности начала координат совпадает с полуплоскостью $x_2 > 0$, область Ω^{ex} в окрестности точки $x^{(0)} = (0, -h)$, $h > 0$, – с полуплоскостью $x_2 < -h$, а интервал $[0, -h]$ на оси Ox_2 не содержит точек из $\Omega^{\text{in}} \cup \Omega^{\text{ex}}$. Области Ω^{in} и Ω^{ex} являются соответственно внутренностью и внешностью резонатора

$$\Omega_\varepsilon = \Omega^{\text{in}} \cup \Omega^{\text{ex}} \cup \varkappa_\varepsilon,$$

где $\varkappa_\varepsilon = (\varepsilon\omega_-, \varepsilon\omega_+) \times [0, -h]$ – канал связи, $\omega_- < \omega_+$ – любые числа.

Известно, что рассеяние как H -поляризованных полей на идеально проводящем цилиндре с сечением Ω_ε , так и плоских акустических полей на идеально жестком цилиндре с сечением Ω_ε , определяется решением краевой задачи

$$(\Delta + k^2)u_\varepsilon = F, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon, \quad (1.1)$$

$$u_\varepsilon = O\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} - ik u_\varepsilon = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

где $r = |x|$, ν – внешняя нормаль, $k > 0$, а F – квадратично интегрируемая функция с ограниченным носителем в Ω^{ex} . В случае акустического рассеяния u_ε – потенциал скорости. Для H -поляризации F – третья компонента вектора $-\text{rot } \mathbf{j}$ в случае, когда вектор тока $\mathbf{j}$ перпендикулярен образующей, а электромагнитное поле имеет вид $\mathbf{H}_\varepsilon = \{0, 0, u_\varepsilon\}$, $\mathbf{E}_\varepsilon = -ik^{-1}(\text{rot } \mathbf{H}_\varepsilon - \mathbf{j})$. Всюду далее под предельной внутренней (внешней) задачей будем понимать краевую задачу Неймана для уравнений Гельмгольца в Ω^{in} (в Ω^{ex}).

Известно (см., например, [9]), что для положительных k возмущенная краевая задача (1.1), (1.2) и предельная внешняя задача однозначно разрешимы и их функции Грина допускают аналитическое продолжение в комплексную плоскость с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси, которое имеет дискретное (при фиксированном ε) множество полюсов Σ_ε и $\Sigma_\varepsilon^{\text{ex}}$ соответственно, лежащее ниже вещественной оси. Как уже отмечалось выше, в [1] было доказано, что в любой малой окрестности ненулевого элемента $k_0 \in \Sigma = \Sigma^{\text{in}} \cup \Sigma^{\text{ex}} \cup \Sigma^{\text{ch}}$ при всех достаточно малых ε лежит полюс $\tau_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$, и, наоборот, если компакт K отделен от Σ , то $K \cap \Sigma_\varepsilon = \emptyset$ при любых достаточно малых ε .

В случаях, когда $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$, где Σ_1^{in} – множество ненулевых, простых собственных частот предельной внутренней задачи, и когда $k_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$, существует по одному полюсу, сходящемуся к k_0 (см. [4]). Так как решения (1.1), (1.2) рассматриваются при $k > 0$, а полюс τ_ε комплексный, то в обоих случаях решения испытывают наибольшие возмущения, когда

$$k = k(\varepsilon) = \text{Re } \tau_\varepsilon + O(\text{Im } \tau_\varepsilon).$$

Такие положительные частоты будем называть *пиковыми*. Обозначим через $S(t)$ и $S^{\text{ex}}(t)$ круги радиуса t с центром в начале координат и в точке $x^{(0)}$ соответственно, через $G^{\text{in(ex)}}(x, y, k)$ функцию Грина предельной внутренней (внешней) задачи, через $u^{\text{ex}}(x; k)$ решение предельной внешней задачи, а через ψ нормированную в $L_2(\Omega^{\text{in}})$ собственную функцию, соответствующую простой частоте $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}}$. В [4] было показано, что при пиковых частотах главные члены асимптотик возмущенной задачи (1.1), (1.2) имеют вид

$$u_\varepsilon(x; k(\varepsilon)) \sim \frac{1}{\varepsilon} A_1 \psi(x), \quad x \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \quad (1.3)$$

$$u_\varepsilon(x; k(\varepsilon)) \sim A_2 G^{\text{ex}}(x, x^{(0)}, k_0) + u^{\text{ex}}(x; k_0), \quad x \in (\Omega^{\text{ex}} \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2})) \cap S(R), \quad (1.4)$$

для $k(\varepsilon) \rightarrow k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$ и

$$u_\varepsilon(x; k(\varepsilon)) \sim B_1 G^{\text{in}}(x, 0, k_0), \quad x \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}), \quad (1.5)$$

$$u_\varepsilon(x; k(\varepsilon)) \sim B_2 G^{\text{ex}}(x, x^{(0)}, k_0) + u^{\text{ex}}(x, k_0), \quad x \in (\Omega^{\text{ex}} \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2})) \cap S(R), \quad (1.6)$$

для $k(\varepsilon) \rightarrow k_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$, где A_j и B_j – некоторые явно вычисляемые константы, а $R > 0$ – любое число.

Из (1.4) и (1.6) следует, что при пиковых частотах в Ω^{ex} в обоих случаях решения возмущенной задачи отличаются от решения предельной внешней задачи на $O(1)$. Именно это отличие было замечено Рэлеем [10] для классического резонатора (который представляет собой сферу с малым отверстием связи). Будем называть этот эффект *внешним резонансом*. С другой стороны, из (1.3) и (1.5) следует, что при пиковых частотах в Ω^{in} решения возмущенной задачи в этих случаях отличаются существенно друг от друга: для $k(\varepsilon) \rightarrow k_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$ решение ограничено, а для $k(\varepsilon) \rightarrow k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$ оно растет как $O(\varepsilon^{-1})$. Будем называть ситуацию (1.3) *внутренним резонансом*. Заметим, что для трехмерного резонатора со стенками конечной толщины резонанс в [11] понимается именно в этом смысле, а асимптотики решений при $k(\varepsilon) \rightarrow k_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$ и $k(\varepsilon) \rightarrow k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$ построены в [12], [13]. Так как (1.3) и (1.5) разнятся довольно сильно, возникает естественный вопрос о поведении решения задачи рассеяния при частотах, близких к $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \cap \Sigma^{\text{ch}}$. Заметим, что предлагаемый для анализа критический случай не такой уж и вырожденный, так как для фиксированной “основной” ловушки Ω^{in} такая ситуация легко достигается соответствующим изменением длины канала связи (см. определение Σ^{ch}).

Всюду далее используются следующие обозначения: ω – интервал (ω_-, ω_+) , $|\omega| = \omega_+ - \omega_-$, $x^* = (x_1, -x_2)$,

$$\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial S(R)} |G^{\text{ex}}(x, x^{(0)}, k_0)|^2 ds.$$

Основной целью работы является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $k_0 = m\pi/h \in \Sigma_1^{\text{in}} \cap \Sigma^{\text{ch}}$. Тогда

а) существует два полюса $\tau_\varepsilon^{(n)} \in \Sigma_\varepsilon$, $n = 1, 2$, сходящиеся к k_0 и имеющие асимптотики

$$\tau_\varepsilon^{(n)} = k_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \varepsilon^{i/2} \ln^j \varepsilon \tau_{i,j}^{(n)}, \quad (1.7)$$

$$\tau_{1,0}^{(n)} = (-1)^n \psi(0) \left(\frac{|\omega|}{2h} \right)^{1/2}, \quad \tau_{2,1}^{(n)} = (-1)^n \frac{4k_0}{\pi \psi(0)} \left(\frac{|\omega|}{2h} \right)^{1/2}, \quad \text{Im } \tau_{2,0}^{(n)} = -\frac{1}{2} \frac{|\omega|}{h} k_0^2 \sigma; \quad (1.8)$$

б) при k , близких к k_0 , для решения краевой задачи (1.1), (1.2) и его аналитического продолжения справедливо представление

$$u_\varepsilon(x; k) = - \sum_{n=1}^2 \frac{\Psi_\varepsilon^{(n)}(x)}{(\tau_\varepsilon^{(n)})^2 - k^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Psi_\varepsilon^{(n)}(y) F(y) dy + \tilde{u}_\varepsilon(x; k), \quad (1.9)$$

где $\tilde{u}_\varepsilon$ – голоморфная функция по переменной k . Если $\text{supp } F \subset \Omega^{\text{ex}}$, то $\tilde{u}_\varepsilon$ сходится в Ω^{ex} к решению предельной внешней задачи в $L_{2,\text{loc}}(\Omega^{\text{ex}})$ (т.е. на любом компакте из Ω^{ex}) и к нулю в $\Omega^{\text{in}} \cup \kappa_\varepsilon$ по норме L_2 ;

в) для $\Psi_\varepsilon^{(n)}$ справедливы следующие асимптотики в $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$:

$$\Psi_\varepsilon^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \psi(x) + o(1), \quad x \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\Psi_\varepsilon^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \psi(0)(1 + o(1)), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}),$$

$$\Psi_\varepsilon^{(n)}(x) = \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \left(\frac{1}{h|\omega|} \right)^{1/2} (\sin(k_0 x_2) + o(1)), \quad x \in \kappa_\varepsilon \setminus (S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S(\varepsilon^{1/2})),$$

$$\Psi_\varepsilon^{(n)}(x) = \varepsilon^{1/2} \frac{(-1)^{m+1} k_0}{\pi} \left(\frac{|\omega|}{h} \right)^{1/2} \left(\ln \varepsilon + \frac{\pi}{|\omega|} X \left(\frac{(x - x^{(0)})^*}{\varepsilon} \right) + o(1) \right), \\ x \in S^{\text{ex}}(2\varepsilon^{1/2}),$$

$$\Psi_\varepsilon^{(n)}(x) = \varepsilon^{1/2} \left((-1)^m k_0 \left(\frac{|\omega|}{h} \right)^{1/2} G^{\text{ex}}(x, x^{(0)}, k_0) + o(1) \right), \quad x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}),$$

где X – функция из леммы 2.2.

Из (1.7) и (1.8) вытекает, что в рассматриваемом случае имеются два “равноправных” пика решения задачи (1.1), (1.2), наблюдаемые при пиковых частотах

$$k = k(\varepsilon) = k_0 + \varepsilon^{1/2} \tau_{1,0}^{(n)} + \varepsilon \ln \varepsilon \tau_{2,1}^{(n)} + \varepsilon^2 (t + o(1)), \quad (1.10)$$

где t – любое действительное число. Подставляя (1.10) и асимптотики из пункта в) теоремы в (1.9), получаем, что решения задачи рассеяния при таких k имеют асимптотики

$$u_\varepsilon(x; k) \sim \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} c_F^{(n)}(t) \psi(x), \quad x \in \Omega^{\text{in}} \setminus S(\varepsilon^{1/2}),$$

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(x; k) &\sim \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} c_F^{(n)}(t) \psi(0), \quad x \in S(2\varepsilon^{1/2}), \\
u_\varepsilon(x; k) &\sim \frac{1}{\varepsilon} (-1)^n c_F^{(n)}(t) \left(\frac{2}{h|\omega|} \right)^{1/2} \sin(k_0 x_2), \quad x \in \mathcal{K}_\varepsilon \setminus (S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S(\varepsilon^{1/2})), \\
u_\varepsilon(x; k) &\sim c_F^{(n)}(t) (-1)^{m+n+1} \frac{k_0}{\pi} \left(\frac{2|\omega|}{h} \right)^{1/2} \left(\ln \varepsilon + \frac{\pi}{|\omega|} X \left(\frac{(x - x^{(0)})^*}{\varepsilon} \right) \right), \\
&\quad x \in S^{\text{ex}}(2\varepsilon^{1/2}), \\
u_\varepsilon(x; k) &\sim c_F^{(n)}(t) (-1)^{m+n} k_0 \left(\frac{2|\omega|}{h} \right)^{1/2} G^{\text{ex}}(x, x^{(0)}, k) + u^{\text{ex}}(x; k), \\
&\quad x \in \Omega^{\text{ex}} \setminus S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}), \\
c_F^{(n)}(t) &= \frac{(-1)^{m+n+1}}{2(t - \tau_{2,0}^{(n)})} \left(\frac{|\omega|}{2h} \right)^{1/2} u^{\text{ex}}(x^{(0)}; k_0),
\end{aligned}$$

из которых следует, что при обеих пиковых частотах наблюдается внутренний резонанс в Ω^{in} , но он отличается на порядок от (1.3).

2. Построение асимптотик. Обозначим

$$\begin{aligned}
R_t^{\text{in(ex)}, i, j}(D_y) &= \sum_{q=0}^t a_{i, j, q}^{\text{in(ex)}} \frac{\partial^q}{\partial y_1^q}, \\
\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \varepsilon^{i/2} \ln^j \varepsilon (k_0^2 - k^2) R_{[(i-j)/2]}^{\text{in(ex)}, i, j}(D_y) G^{\text{in(ex)}}(x, x_0^{\text{in(ex)}}, k),
\end{aligned}$$

где x_0^{in} – начало координат, $x_0^{\text{ex}} = x^{(0)}$, $a_{i, j, q}^{\text{in(ex)}}$ – постоянные, $[N]$ – целая часть N . Коэффициенты $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, k)$ аналитичны по переменной k в некоторой комплексной окрестности точки k_0 , являются решением уравнения $(\Delta + k^2)U = 0$ в $\Omega^{\text{in(ex)}}$ и $\partial U / \partial \nu = 0$ на $\partial \Omega^{\text{in(ex)}} \setminus \{x_0^{\text{in(ex)}}\}$, а при положительных k коэффициенты ряда $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, k)$ удовлетворяют и условию излучения (1.2). Поэтому вне канала связи и малых окрестностей его концов полные асимптотики обобщенных собственных функций $\Psi_\varepsilon^{(n)}$ будем искать, следуя [4], в виде

$$\psi_\varepsilon^{(n)}(x) = \psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon^{(n)}), \quad x \in \Omega^{\text{in(ex)}} \setminus S^{\text{in(ex)}}(\varepsilon^{1/2}), \quad (2.1)$$

где $S^{\text{in}}(t) = S(t)$, а $R_t^{\text{in(ex)}, i, j}$ в определении $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}$ зависят от n .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Так как строгой нормировки на $\Psi_\varepsilon^{(n)}$ в (1.9) не накладывается, то под $\psi_\varepsilon^{(n)}$ в (2.1) понимается функция, равная $\Psi_\varepsilon^{(n)}$ с точностью до скалярного множителя $\alpha_n(\varepsilon)$. В п. 3 будет показано, что $\alpha_n(\varepsilon) = 1 + o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Построение асимптотик для обоих полюсов и соответствующих обобщенных собственных функций одинаково. По этой причине, а также, чтобы не перегружать обозначения в тексте индексом соответствия конкретному полюсу (“ n ”), этот индекс в обозначениях по возможности будет опускаться (в том числе и во введенных выше обозначениях).

В малой окрестности канала связи асимптотики $\psi_\varepsilon^{(n)}$ строятся в виде

$$\psi_\varepsilon(x) = \sum_{i=-1}^{\infty} \sum_{j=0}^i \varepsilon^{i/2} \ln^j \varepsilon w_{i,j}(x_2), \quad x \in \kappa_\varepsilon \setminus (S^{\text{ex}}(\varepsilon^{1/2}) \cup S^{\text{in}}(\varepsilon^{1/2})), \quad (2.2)$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \sum_{i=1-\beta_{\text{in}}(\text{ex})}^{\infty} \sum_{j=0}^i \varepsilon^{i/2} \ln^j \varepsilon v_{i,j}^{\text{in}(\text{ex})} \left(\frac{x^{\text{in}(\text{ex})}}{\varepsilon} \right), \quad x \in S^{\text{in}(\text{ex})}(2\varepsilon^{1/2}), \quad (2.3)$$

где $x^{\text{in}} = x$, $x^{\text{ex}} = (x - x^{(0)})^*$, $\beta_{\text{in}} = 1$, $\beta_{\text{ex}} = 0$. Поясним вид главных членов в (2.1) и (2.2). При формальном переходе к пределу в $\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, k)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $k \rightarrow k_0$ получаем, что

$$\psi_\varepsilon^{\text{in}}(x, k) \rightarrow R_0^{\text{in},0,0} \psi(0) \psi(x). \quad (2.4)$$

С другой стороны, в [4] показано, что в случае $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \setminus \Sigma^{\text{ch}}$ обобщенная собственная функция сходится к собственной функции ψ (продолженной нулем вне Ω^{in}), а в случае $k_0 \in \Sigma^{\text{ch}} \setminus \Sigma^{\text{in}}$ она в главном представима функцией

$$\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \left(\frac{2}{|\omega|h} \right)^{1/2} \sin(k_0 t) \quad (2.5)$$

в κ_ε и нулем вне κ_ε . Поэтому при $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \cap \Sigma^{\text{ch}}$ естественно ожидать, что главный член асимптотики обобщенной собственной функции будет представляться “линейной” комбинацией ψ и (2.5). Последнее и приводит к указанным в (2.1) и (2.2) главным членам асимптотики и, в частности, к равенству

$$w_{-1,0}(t) = b_{-1,0} \sin(k_0 t). \quad (2.6)$$

Более того, так как ψ – нормированная функция, а норма (2.5) в $L_2(\kappa_\varepsilon)$ также равна единице, то из соотношений (2.4) и (2.6) и предположения (в дальнейшем оправданного) сохранения нормировки главного члена асимптотики обобщенной функции для рассматриваемого в работе случая получаем равенство

$$(R_0^{\text{in},0,0} \psi(0))^2 + \frac{b_{-1,0}^2 |\omega|h}{2} = 1. \quad (2.7)$$

Краевые задачи для коэффициентов рядов (2.3) получаются стандартной подстановкой (см. [4], [7]) рядов (1.7), (2.3) в (1.1) при $F = 0$ и переходом к “внутренней” переменной $\xi = x^{\text{in}(\text{ex})} \varepsilon^{-1}$:

$$\Delta v_{i,j} = -k_0^2 v_{i-2,j} - \sum_{q=1}^{i-4} \sum_{t=0}^{q-1} \lambda_{q,t} v_{i-q-4,j-t}, \quad \xi \in \gamma_\omega, \quad \frac{\partial v_{i,j}}{\partial \nu} = 0, \quad \xi \in \partial \gamma_\omega, \quad (2.8)$$

где $\lambda_{q,t}$ – коэффициенты ряда $\lambda_\varepsilon = \tau_\varepsilon^2 - k_0^2$ при $\varepsilon^{q/2} \ln^t \varepsilon$,

$$\gamma_\omega = (\omega \times (-\infty, 0]) \cup \{\xi : \xi_2 > 0\},$$

а верхние индексы у $v_{q,t}^{\text{in}(\text{ex})}$ опущены.

Так как коэффициенты ряда (2.2) зависят только от x_2 (но понимаются как функции, определенные на κ_ε), подставляя ряды (1.7) и (2.2) в (1.1) при $F = 0$, получаем обыкновенные дифференциальные уравнения на $w_{j,i}$:

$$w''_{i,j}(x_2) + k_0^2 w_{i,j}(x_2) + \sum_{q=1}^{i+1} \sum_{t=0}^{q-1} \lambda_{q,t} w_{i-q,j-t}(x_2) = 0, \quad -h < x_2 < 0,$$

решениями которых являются функции

$$w_{i,j}(x_2) = -\frac{1}{k_0} \sum_{q=1}^{i+1} \sum_{t=0}^{q-1} \lambda_{q,t} \int_{-h}^{x_2} \sin(k_0(x_2 - t)) w_{i-q,j-t}(t) dt + b_{i,j} \cos(k_0 x_2), \quad j \geq 0, \quad (2.9)$$

где $b_{i,j}$ – произвольные постоянные. Всюду далее коэффициенты ряда (2.2) выбраны в соответствии с (2.9). Легко видеть, что при таком определении

$$w_{0,0}(t) = \tau_{1,0} k_0 b_{-1,0} \left(t \cos(k_0 t) + h \cos(k_0 t) - \frac{1}{k_0} \sin(k_0 t) \right) + b_{0,0} \cos(k_0 t). \quad (2.10)$$

Пусть $\rho = |\xi|$, $P_j(\xi)$ – однородные полиномы степени j , а $T_j(\xi)$ – однородные функции степени j , представимые в виде $P_{j+2q}(\xi) \rho^{-2q}$ при каком-нибудь целом $q \geq 1$ и удовлетворяющие граничному условию $\partial T_j(\xi) / \partial \xi_2 = 0$ при $\xi_2 = 0$, $\xi \neq 0$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{A}}_j$ множество рядов вида

$$T(\xi) = \sum_{q=-\infty}^j T_q(\xi) + \ln \rho \sum_{n=0}^j P_q(\xi).$$

Далее обозначим через $w_\varepsilon(x)$ ряд (2.2). На суммах $U(x, \varepsilon)$ вида $w_\varepsilon(x)$ и $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)$, где τ_ε – произвольная функция, имеющая асимптотику (1.7), определим операторы “переразложения” $K_q^{\text{in(ex)}}$ следующим, стандартным для метода согласования, образом [7]. Разложим коэффициенты $U(x, \varepsilon)$ в ряды при $|x^{\text{in(ex)}}| \rightarrow 0$ и перейдем к переменным $\xi = x^{\text{in(ex)}} \varepsilon^{-1}$ (в случае $U(x, \varepsilon) = \psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)$ функция τ_ε заменяется на ее асимптотический ряд). В полученном таким образом двойном ряду возьмем сумму членов $\varepsilon^j \ln^i \varepsilon \Phi(\xi)$ при $j \leq q$. Эту сумму и назовем $K_q^{\text{in(ex)}}(U(x, \varepsilon))$.

Обозначим

$$g^{\text{in}}(k) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(G^{\text{in}}(x, 0, k) + \frac{1}{\pi} \ln r + \frac{\psi^2(0)}{k^2 - k_0^2} \right),$$

$$g^{\text{ex}}(k) = \lim_{x \rightarrow x^{(0)}} \left(G^{\text{ex}}(x, x^{(0)}, k) + \frac{1}{\pi} \ln |x - x^{(0)}| \right),$$

а через (ρ, θ) обозначим полярные координаты. Из определений $\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}$, w_ε , $K_q^{\text{in(ex)}}$, равенств (2.6), (2.10) и асимптотик функций Грина предельных задач и их производных (см., например, [14]) вытекает

ЛЕММА 2.1. Пусть τ_ε – произвольная функция, имеющая асимптотику (1.7). Тогда для любого целого $N \geq 0$ справедливы равенства

$$K_{N/2}^{\text{in(ex)}}(\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)) = \sum_{i=1-\beta_{\text{in(ex)}}}^N \sum_{j=0}^i \varepsilon^{i/2} \ln^j \varepsilon V_{i,j}^{\text{in(ex)}}(\xi),$$

$$K_{N/2}^{\text{in(ex)}}(w_\varepsilon(x)) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^i \varepsilon^{i/2} \ln^j \varepsilon W_{i,j}^{\text{in(ex)}}(\xi_2),$$

где $V_{i,j}^{\text{in(ex)}} \in \tilde{\mathcal{A}}_{[(i-j)/2]}$, а $W_{i,j}^{\text{in(ex)}}$ – многочлены $[(i+1-j)/2]$ -го порядка.
Справедливы представления

$$V_{0,0}^{\text{in}}(\xi) = R_{0,0}^{\text{in},0,0} \psi^2(0),$$

$$V_{1,0}^{\text{in(ex)}}(\xi) = \beta_{\text{in(ex)}} R_0^{\text{in(ex)},1,0} \psi^2(0) + \frac{2}{\pi} k_0 \tau_{1,0} (R_0^{\text{in(ex)},0,0} (\ln \rho - \pi g^{\text{in(ex)}}(k_0)) - \Pi_{0,0}),$$

$$V_{k,k}^{\text{in(ex)}}(\xi) = \frac{2k_0}{\pi} \sum_{t=0}^{k-1} R_0^{\text{in(ex)},t,t} \tau_{k-t,k-t-1}, \quad k \geq 1,$$

$$V_{k,j}^{\text{in(ex)}}(\xi) = \tilde{V}_{k,j}^{\text{in(ex)}}(\xi) + \beta_{\text{in(ex)}} a_{k,j,0}^{\text{in(ex)}} \psi^2(0) + \frac{2}{\pi} k_0 \left(\tau_{1,0} (a_{k-1,j,0}^{\text{in(ex)}} (\ln \rho - \pi g^{\text{in(ex)}}(k_0)) - \Pi_{k-1,j}) + \tau_{k,j} (R_0^{\text{in(ex)},0,0} (\ln \rho - \pi g^{\text{in(ex)}}(k_0)) - \Pi_{0,0}) \right), \quad k > 1, \quad k > j,$$

$$\Pi_{i,j} = \sum_{t=1}^{\infty} a_{2t+i,j,t}^{\text{in(ex)}} (t-1)! \frac{\cos(t\theta)}{\rho^t},$$

$$\tilde{V}_{2,0}^{\text{in}}(\xi) = R_{0,0}^{\text{in},0,0} \psi(0) \psi_{x_1}(0) \xi_1, \quad \tilde{V}_{2,0}^{\text{ex}}(\xi) = \tilde{V}_{2,1}^{\text{in(ex)}}(\xi) = 0,$$

где $\tilde{V}_{i,j}^{\text{in(ex)}}$ не зависит от $\tau_{q,s}$, $\Pi_{q-1,s}$ и $a_{q-1,s,0}^{\text{in(ex)}}$ при $q \geq i$ и $s \geq j$,

$$W_{i,i}^{\text{in}}(\xi_2) = \tau_{i+1,i} b_{-1,0} h + b_{i,i}, \quad W_{i,i}^{\text{ex}}(\xi_2) = (-1)^m b_{i,i},$$

$$W_{k,j}^{\text{in}}(\xi_2) = \widetilde{W}_{k,j}^{\text{in}}(\xi_2) + b_{-1,0} h \left(\frac{1}{2} \tau_{k,j} \tau_{1,0} + \tau_{k+1,j} \right) + b_{k,j},$$

$$W_{k,j}^{\text{ex}}(\xi_2) = \widetilde{W}_{k,j}^{\text{ex}}(\xi_2) + (-1)^m b_{k,j}, \quad k > j,$$

$$\widetilde{W}_{1,0}^{\text{in}}(\xi_2) = b_{-1,0} k_0 \xi_2, \quad \widetilde{W}_{1,0}^{\text{ex}}(\xi_2) = (-1)^{m+1} b_{-1,0} k_0 \xi_2,$$

$$\widetilde{W}_{k+1,k}^{\text{in}}(\xi_2) = \alpha_k^{\text{in}}, \quad \widetilde{W}_{k+1,k}^{\text{ex}}(\xi_2) = \alpha_k^{\text{ex}}, \quad k \geq 1, \quad \widetilde{W}_{2,0}^{\text{in(ex)}}(\xi_2) = 0,$$

где $\widetilde{W}_{i,j}^{\text{in(ex)}}$ не зависят от $\tau_{q,s}$ и $b_{q,s}$ при $q \geq i$ и $s \geq j$, а $\alpha_k^{\text{in(ex)}}$ – некоторые постоянные.

Ряды $V_{i,j}^{\text{in(ex)}}$ (а, следовательно, и ряды $\tilde{V}_{i,j}^{\text{in(ex)}} \in \mathcal{A}_{[(i-j)/2]}$) являются формальными асимптотическими решениями краевой задачи (2.8) при $\rho \rightarrow \infty$, $\xi_2 \geq 0$, где функции $v_{q,t}$ заменены на $V_{q,t}^{\text{in(ex)}}$.

Если $W_{0,0}^{\text{ex}} \equiv 0$, то $W_{i,j}^{\text{in(ex)}}$ (а, следовательно, и $\widetilde{W}_{i,j}^{\text{in(ex)}}$) являются формальными асимптотическими решениями краевой задачи (2.8) при $\rho \rightarrow \infty$, $\xi_2 < 0$, где функции $v_{q,t}$ заменены на $W_{q,t}^{\text{in(ex)}}$.

Для согласования рядов (2.1)–(2.3) нужно показать существование решений краевых задач (2.8), имеющих на бесконечности асимптотики, равные $V_{i,j}^{\text{in(ex)}}$ при $\xi_2 \geq 0$ и равные $W_{i,j}^{\text{in(ex)}}$ при $\xi_2 < 0$. Пусть $0 = \mu_0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$ – собственные частоты задачи Неймана для оператора $-d^2/dt^2$ на интервале ω , $\beta_q(t)$ – соответствующие, нормированные в $L_2(\omega)$ собственные функции. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{B}}_{q,n}$ множество рядов вида

$$H(\xi) = R_q^{(0)}(\xi_2) + \sum_{j=1}^{\infty} R_n^{(j)}(\xi_2) \beta_j(\xi_1) \exp\{\mu_j \xi_2\},$$

где $R_i^{(m)}(t)$ – многочлены порядка i . При отрицательных n под $\widetilde{\mathcal{B}}_{q,n}$ понимается множество многочленов порядка q . Положим $\widetilde{\mathcal{B}} = \bigcup_{n,q} \widetilde{\mathcal{B}}_{q,n}$. Обозначим через $\mathcal{A}_m$ множество функций из $C^\infty(\gamma_\omega) \cap W_{2,\text{loc}}^1(\gamma_\omega)$, удовлетворяющих однородному условию Неймана на $\partial\gamma_\omega$ и имеющих на бесконечности дифференцируемые асимптотики из $\widetilde{\mathcal{A}}_m$ и $\widetilde{\mathcal{B}}$ при $\xi_2 \geq 0$ и $\xi_2 < 0$ соответственно. Согласование асимптотических рядов проводится на основе леммы 2.1 и следующего утверждения, доказательство которого имеется в [4].

ЛЕММА 2.2. Пусть $f \in \mathcal{A}_N$, ряд $V \in \widetilde{\mathcal{A}}_{N+2}$ является формальным асимптотическим решением уравнения $\Delta V = f$ при $\rho \rightarrow \infty$, $\xi_2 \geq 0$, а многочлен $W(\xi_2)$ удовлетворяет уравнению $\Delta W = f + o(1)$ (или, что то же самое, уравнению $W'' = f + o(1)$) при $\rho \rightarrow \infty$ и $\xi_2 < 0$.

Тогда существует функция $v \in \mathcal{A}_{N+2}$, являющаяся решением краевой задачи

$$\Delta v = f, \quad \xi \in \gamma_\omega, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \quad \xi \in \partial\gamma_\omega, \quad (2.11)$$

и имеющая при $\rho \rightarrow \infty$ дифференцируемые асимптотики

$$\begin{aligned} v(\xi) &= V(\xi) + c_0 \ln \rho + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{\cos(j\theta)}{\rho^j}, & \xi_2 \geq 0, \\ v(\xi) &= W(\xi_2) + q_0 + O(\xi_2^M \exp\{\mu_1 \xi_2\}), & \xi_2 < 0, \end{aligned}$$

где $M \geq 0$, q_0 и c_i – некоторые числа.

Существуют гармонические в γ_ω функции $X \in \mathcal{A}_0$ и $Y \in \mathcal{A}_1$, имеющие на бесконечности асимптотики

$$\begin{aligned} X(\xi) &= \xi_2 + q_\omega + O(\exp\{\mu_1 \xi_2\}), & \xi_2 \leq 0, \\ X(\xi) &= c_\omega \ln \rho + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^+ \frac{\cos(j\theta)}{\rho^j}, & \xi_2 \geq 0, \\ Y(\xi) &= \xi_1 + c^\omega \ln \rho + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \frac{\cos(j\theta)}{\rho^j}, & \xi_2 \geq 0, \\ Y(\xi) &= q^\omega + O(\exp\{\mu_1 \xi_2\}), & \xi_2 < 0. \end{aligned}$$

Из соображений четности следует, что при $\omega_- = -\omega_+$ постоянные q^ω и c^ω равны нулю. Отсюда очевидным образом вытекает, что в общем случае

$$c^\omega = 0, \quad q^\omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}.$$

Равенства $c_\omega = \pi^{-1}|\omega|$, $q_\omega = \pi^{-1}|\omega|(\ln(2|\omega|\pi^{-1}) - 1)$ легко показать, используя конформное отображение полосы на γ_ω (см., например, [4], [15]).

Обозначим через $v_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x^{\text{in(ex)}}/\varepsilon)$ ряды (2.3), через $v_{\varepsilon,N}^{\text{in(ex)}}(\xi)$ частичные суммы этих рядов и перейдем к доказательству ключевого утверждения настоящей работы.

ТЕОРЕМА 2.1. *Существуют функция τ_ε , имеющая асимптотику (1.7), и ряды (2.1)–(2.3) такие, что коэффициенты $v_{i,j}^{\text{in(ex)}} \in \mathcal{A}_{[(i-j)/2]}$ являются решениями рекуррентной системы краевых задач (2.8), коэффициенты $w_{i,j}$ определяются равенствами (2.6), (2.9), для любого целого $N \geq 0$ справедливы дифференцируемые асимптотические равенства*

$$K_{N/2}^{\text{in(ex)}}(w_\varepsilon(x)) = v_{\varepsilon,N/2}^{\text{in(ex)}}(\xi) + O(\varepsilon^{N/2} \xi_2^{M_N} \exp\{\mu_1 \xi_2\}), \quad \xi_2 < 0, \quad (2.12)$$

$$K_{N/2}^{\text{in(ex)}}(\psi_\varepsilon^{\text{in(ex)}}(x, \tau_\varepsilon)) = v_{\varepsilon,N/2}^{\text{in(ex)}}(\xi), \quad \xi_2 \geq 0, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (2.13)$$

а для коэффициентов этих рядов справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} b_{0,0} &= 0, \quad v_{0,0}^{\text{in}} \equiv R_0^{\text{in},0,0} \psi^2(0), \quad R_0^{\text{ex},0,0} = (-1)^{m+1} R_0^{\text{in},0,0}, \\ b_{-1,0} &= \left(\frac{1}{h|\omega|} \right)^{1/2}, \quad R_0^{\text{in},0,0} = \pm \frac{1}{\psi(0)} \left(\frac{1}{2} \right)^{1/2}, \quad \tau_{1,0} = \pm \psi(0) \left(\frac{|\omega|}{2h} \right)^{1/2}, \\ v_{1,1}^{\text{ex}} &\equiv \frac{2k_0 \tau_{1,0}}{\pi} R_0^{\text{ex},0,0}, \quad \tau_{2,1} = \frac{4k_0}{b_{-1,0} h \pi} R_0^{\text{in},0,0}, \\ \tau_{2,0} &= \frac{\tau_{1,0}}{\tau_{1,0} b_{-1,0} h + R_0^{\text{in},0,0} \psi^2(0)} \\ &\times \left(b_{-1,0} \left(2k_0 q_\omega - \frac{1}{2} h \tau_{1,0}^2 \right) - 2k_0 \tau_{1,0} R_0^{\text{in},0,0} (g^{\text{in}}(k_0) + g^{\text{ex}}(k_0)) \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $b_{0,0} = 0$, в силу леммы 2.1 добиваемся равенств (2.12), (2.13) для индекса “ex” при $N = 0$. Аналогично, определяя $v_{0,0}^{\text{ex}}$ в силу (2.14) и накладывая дополнительное условие

$$R_0^{\text{in},0,0} \psi^2(0) = \tau_{1,0} h b_{-1,0}, \quad (2.15)$$

где $R_0^{\text{in},0,0}$, $\tau_{1,0}$ и $b_{-1,0}$ – пока неизвестные постоянные (но подчиненные соотношению (2.7)), в силу леммы 2.1 (и определенного выше значения $b_{0,0}$) добиваемся равенств (2.12), (2.13) для индекса “in” при $N = 0$. “Нулевой” шаг индукции завершен.

На следующем шаге, учитывая вид $\widetilde{W}_{1,0}^{\text{in,ex}}$ и $V_{1,0}^{\text{in,ex}}$, полагаем

$$v_{1,0}^{\text{in}} = b_{-1,0} k_0 X + A_{1,0}^{\text{in}}, \quad v_{1,0}^{\text{ex}} = (-1)^{m+1} b_{-1,0} k_0 X + A_{1,0}^{\text{ex}},$$

где $A_{1,0}^{\text{in(ex)}}$ – пока также неопределенные постоянные. Легко видеть, что определенные таким образом функции являются решениями краевой задачи (2.8). Приравнявая асимптотики (степенные) функций $v_{1,0}^{\text{in(ex)}}$ при $\rho \rightarrow \infty$ и $\xi_2 < 0$ к $W_{1,0}^{\text{in(ex)}}$, в силу леммы 2.1 получаем уравнения

$$\begin{aligned} (-1)^{m+1} b_{-1,0} k_0 q_\omega + A_{1,0}^{\text{ex}} &= (-1)^m b_{1,0}, \\ b_{-1,0} k_0 q_\omega + A_{1,0}^{\text{in}} &= b_{-1,0} h \left(\frac{1}{2} \tau_{1,0}^2 + \tau_{2,0} \right) + b_{1,0}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Аналогично, приравнявая асимптотики функций $v_{1,0}^{\text{in(ex)}}$ при $\rho \rightarrow \infty$ и $\xi_2 > 0$ к рядам $V_{1,0}^{\text{in(ex)}}$ до членов $O(1)$ включительно, получаем уравнения

$$b_{-1,0} k_0 c_\omega = \frac{2}{\pi} k_0 \tau_{1,0} R_0^{\text{in},0,0}, \quad (2.17)$$

$$(-1)^{m+1} b_{-1,0} k_0 c_\omega = \frac{2}{\pi} k_0 \tau_{1,0} R_0^{\text{ex},0,0}, \quad (2.18)$$

$$R_0^{\text{in},1,0} \psi^2(0) - 2k_0 \tau_{1,0} R_0^{\text{in},0,0} g^{\text{in}}(k_0) = A_{1,0}^{\text{in}}, \quad (2.19)$$

$$-2k_0 \tau_{1,0} R_0^{\text{ex},0,0} g^{\text{ex}}(k_0) = A_{1,0}^{\text{ex}}, \quad (2.20)$$

где $R_0^{\text{in},1,0}$ – еще одна неизвестная постоянная. Из (2.17) и (2.18) получаем значение (2.14) для $R_0^{\text{ex},0,0}$, а (2.20) определяет постоянную $A_{1,0}^{\text{ex}}$. Разрешая систему уравнений (2.7), (2.15), (2.17), получаем формулы (2.14) для $R_0^{\text{in},0,0}$, $b_{-1,0}$ и $\tau_{1,0}$. Подчеркнем, что вычисление последних величин окончательно определяет постоянные $R_0^{\text{ex},0,0}$, $A_{1,0}^{\text{ex}}$,

$$b_{1,0} = k_0 (2\tau_{1,0} R_0^{\text{in},0,0} g^{\text{ex}}(k_0) - b_{-1,0} q_\omega) \quad (2.21)$$

и функцию $v_{1,0}^{\text{ex}}$, а функцию $v_{1,0}^{\text{in}}$ определяет с точностью до слагаемого $A_{1,0}^{\text{in}}$, подчиненного уравнению (2.17). Более того, приравнявая асимптотики функций $v_{1,0}^{\text{in(ex)}}$ при $\rho \rightarrow \infty$ и $\xi_2 > 0$ к рядам $V_{1,0}^{\text{in(ex)}}$, для остальных степеней определяем $\Pi_{0,0}^{\text{in(ex)}}$ (т.е. коэффициенты при старших производных в многочленах $R_i^{\text{in(ex)},2i,0}$). И наконец, полагая

$$v_{1,1}^{\text{in}} \equiv \frac{2k_0}{\pi} R_0^{\text{in},0,0} \tau_{1,0},$$

а $v_{1,1}^{\text{ex}}$ в соответствии с (2.14) и приравнявая “асимптотики” этих функций к “рядам” $V_{1,1}^{\text{in(ex)}}$ и “многочленам” $W_{1,1}^{\text{in(ex)}}$ при $\xi_2 > 0$ и $\xi_2 < 0$ соответственно, добиваемся равенств (2.12) и (2.13) для $N = 1$ и находим значение (2.14) для $\tau_{2,1}$ (попутно определяя $b_{1,1}$). На этом закончился первый шаг индукции, который помимо равенств (2.12), (2.13) для $N = 1$ дал два уравнения (2.16) и (2.19), связывающее три (пока неизвестные) постоянные $R_0^{\text{in},1,0}$, $A_{1,0}^{\text{in}}$ и $\tau_{2,0}$.

На втором шаге по $\widetilde{V}_{2,0}^{\text{in(ex)}}$ и $\widetilde{W}_{2,0}^{\text{in(ex)}}$ определяем решения краевой задачи (2.8):

$$v_{2,0}^{\text{in}} = R_0^{\text{in},0,0} \psi(0) \psi_{x_1}(0) Y + A_{2,0}^{\text{in}}, \quad v_{2,0}^{\text{ex}} \equiv A_{2,0}^{\text{ex}},$$

где $A_{2,0}^{\text{in(ex)}}$ – некоторые постоянные. Приравнявая асимптотики $v_{2,0}^{\text{in(ex)}}$ на бесконечности при $\xi_2 < 0$ к $W_{2,0}^{\text{in(ex)}}$, получаем равенства

$$A_{2,0}^{\text{in}} + R_0^{\text{in},0,0} \psi(0) \psi_{x_1}(0) q^\omega = b_{-1,0} h \left(\frac{1}{2} \tau_{2,0} \tau_{1,0} + \tau_{3,0} \right) + b_{2,0}, \quad (2.22)$$

$$A_{2,0}^{\text{ex}} = (-1)^m b_{2,0}. \quad (2.23)$$

Аналогично, приравнявая асимптотики функций $v_{2,0}^{\text{in(ex)}}$ на бесконечности при $\xi_2 > 0$ до членов $O(1)$ включительно к $V_{2,0}^{\text{in(ex)}}$, получаем равенства

$$\tau_{1,0} R_0^{\text{in},1,0} + \tau_{2,0} R_0^{\text{in},0,0} = 0, \quad (2.24)$$

$$\tau_{1,0} R_0^{\text{ex},1,0} + \tau_{2,0} R_0^{\text{ex},0,0} = 0, \quad (2.25)$$

$$-2k_0 g^{\text{ex}}(k_0) (\tau_{1,0} R_0^{\text{ex},1,0} + \tau_{2,0} R_0^{\text{ex},0,0}) = A_{2,0}^{\text{ex}}, \quad (2.26)$$

$$a_{2,0,0}^{\text{in}} \psi^2(0) - 2k_0 g^{\text{in}}(k_0) (\tau_{1,0} R_0^{\text{in},1,0} + \tau_{2,0} R_0^{\text{in},0,0}) = A_{2,0}^{\text{in}}. \quad (2.27)$$

Из (2.25) и (2.26) находим $A_{2,0}^{\text{ex}}$, что в силу (2.23) определяет $b_{2,0}$. Далее, разрешая систему уравнений (2.16), (2.19), (2.24) (с учетом равенства (2.21)), определяем $\tau_{2,0}$ в соответствии с (2.14), а также постоянные $R_0^{\text{in},1,0}$ и $A_{1,0}^{\text{in}}$. Так как коэффициенты $R_0^{\text{in},1,0}$ и $\tau_{2,0}$ определены, то, во-первых, из (2.26) находим $R_0^{\text{ex},1,0}$, а, во-вторых, приравнявая асимптотики функций $v_{2,0}^{\text{in(ex)}}$ на бесконечности при $\xi_2 > 0$ к $V_{2,0}^{\text{in(ex)}}$ (для оставшихся членов), определяем все коэффициенты рядов $\Pi_{1,0}^{\text{in(ex)}}$ (т.е. старшие коэффициенты дифференциальных полиномов $R_i^{\text{in(ex)},1+i,0}$ при $i \geq 1$). Уравнения (2.22), (2.27) являются прямыми аналогами уравнений (2.16) и (2.19) для определения (на следующем шаге) постоянных $A_{2,0}^{\text{in}}$, $\tau_{3,0}$ и $a_{2,0,0}^{\text{in}}$.

Дальнейшее доказательство проводится по индукции. К (N, k) -шагу, где k – показатель степени $\ln \varepsilon$, определяются все $\Pi_{q-2,s}^{\text{in(ex)}}$, $\widetilde{W}_{q,s}^{\text{in(ex)}}$, $\widetilde{V}_{q,s}^{\text{in(ex)}}$, $a_{q-1,s,0}^{\text{in(ex)}}$, $\tau_{q-1,s}$, $v_{q-2,s}^{\text{in(ex)}}$, $v_{q-1,s}^{\text{ex}}$ для $q \leq N$ и $s \leq k$, а функции $v_{N-1,s}^{\text{in}}$ определяются с точностью до постоянных слагаемых $A_{N-1,s}^{\text{in}}$, для которых имеются уравнения связи (аналоги (2.22) и (2.27)):

$$A_{N-1,s}^{\text{in}} + B_{N-1,s}^{\text{in}} = b_{-1,0} h \tau_{N,s}, \quad a_{N-1,s,0}^{\text{in}} \psi^2(0) + C_{N-1,s}^{\text{in}} = A_{N-1,s}^{\text{in}}, \quad s \leq N-1, \quad (2.28)$$

где $B_{N-1,s}^{\text{in}}$ и $C_{N-1,s}^{\text{in}}$ – вполне определенные числа. На (N, s) -м шаге при $s < N$ по $\widetilde{W}_{N,s}^{\text{in(ex)}}$ и $\widetilde{V}_{N,s}^{\text{in(ex)}}$ определяем $v_{N,s}^{\text{in(ex)}}$ равенствами

$$v_{N,s}^{\text{in(ex)}} = \widetilde{v}_{N,s}^{\text{in(ex)}} + A_{N,s}^{\text{in(ex)}},$$

где $A_{N,s}^{\text{in(ex)}}$ – пока произвольные постоянные, а $\widetilde{v}_{N,s}^{\text{in(ex)}}$ – решения краевых задач (2.8), имеющих асимптотики

$$\begin{aligned} \widetilde{v}_{N,s}^{\text{in(ex)}} &= \widetilde{W}_{N,s}^{\text{in(ex)}} + D_{N,s}^{\text{in(ex)}} + o(1), \quad \xi_2 < 0, \\ \widetilde{v}_{N,s}^{\text{in(ex)}} &= \widetilde{V}_{N,s}^{\text{in(ex)}} + E_{N,s}^{\text{in(ex)}} \ln \rho + F_{N,s}^{\text{in(ex)}} + O(\rho^{-1}), \quad \xi_2 > 0, \end{aligned}$$

где $D_{N,s}^{\text{in(ex)}}$, $E_{N,s}^{\text{in(ex)}}$ и $F_{N,s}^{\text{in(ex)}}$ – также некоторые вполне определенные постоянные. Существование таких функций следует из утверждений лемм 2.1 и 2.2. Приравнявая асимптотики $v_{N,s}^{\text{in(ex)}}$ при $\rho \rightarrow \infty$ и $\xi < 0$ к многочленам $W_{N,s}^{\text{in(ex)}}$, получаем пару уравнений

$$A_{N,s}^{\text{in}} + D_{N,s}^{\text{in}} = b_{-1,0} h \left(\frac{1}{2} \tau_{N,s} \tau_{1,0} + \tau_{N+1,s} \right) + b_{N,s}, \quad (2.29)$$

$$A_{N,s}^{\text{ex}} + D_{N,s}^{\text{ex}} = (-1)^m b_{N,s}. \quad (2.30)$$

Аналогично, приравнявая асимптотики функций $v_{N,s}^{\text{in(ex)}}$ на бесконечности при $\xi_2 > 0$ до членов $O(1)$ включительно к $V_{N,s}^{\text{in(ex)}}$, получаем равенства

$$\frac{2k_0}{\pi} (\tau_{1,0} a_{N-1,s,0}^{\text{in}} + \tau_{N,s} R_0^{\text{in},0,0}) = E_{N,s}^{\text{in}}, \quad (2.31)$$

$$\frac{2k_0}{\pi} (\tau_{1,0} a_{N-1,s,0}^{\text{ex}} + \tau_{N,s} R_0^{\text{ex},0,0}) = E_{N,s}^{\text{ex}}, \quad (2.32)$$

$$-2k_0 g^{\text{ex}}(k_0) (\tau_{1,0} a_{N-1,s,0}^{\text{ex}} + \tau_{N,s} R_0^{\text{ex},0,0}) = A_{N,s}^{\text{ex}}, \quad (2.33)$$

$$a_{N,s,0}^{\text{in}} \psi^2(0) - 2k_0 g^{\text{in}}(k_0) (\tau_{1,0} a_{N-1,s,0}^{\text{in}} + \tau_{N,s} R_0^{\text{in},0,0}) = A_{N,s}^{\text{in}}. \quad (2.34)$$

Из (2.32) и (2.33) находим $A_{N,s}^{\text{ex}}$, что в силу (2.30) определяет $b_{N,s}$. Далее, разрешая систему уравнений (2.28), (2.32), определяем $\tau_{N,s}$, $a_{N-1,s,0}^{\text{in}}$ и $A_{N-1,s}^{\text{in}}$. Так как коэффициенты $a_{N-1,s,0}^{\text{in}}$ и $\tau_{N,s}$ определены, то, во-первых, из (2.33) находим $a_{N,s,0}^{\text{ex}}$, а, во-вторых, приравнявая асимптотики функций $v_{N,s}^{\text{in(ex)}}$ на бесконечности при $\xi_2 > 0$ к $V_{N,s}^{\text{in(ex)}}$ (для оставшихся членов), определяем все коэффициенты рядов $\Pi_{N-1,s}^{\text{in(ex)}}$. Уравнения (2.29), (2.34) являются “заменой” (2.28) для $(N+1, s)$ -го шага.

Эта же процедура повторяется на $(N, s+1)$ -м шаге (если $s+1 < N$). На (N, N) -м шаге ситуация еще проще. Непосредственно из леммы 2.1 следует, что

$$\begin{aligned} v_{N,N}^{\text{in}} &\equiv \frac{2k_0}{\pi} \sum_{t=0}^{N-1} R_0^{\text{in},t,t} \tau_{k-t,k-t-1} = \tau_{N+1,N} b_{-1,0} h + b_{N,N}, \\ v_{N,N}^{\text{ex}} &\equiv \frac{2k_0}{\pi} \sum_{t=0}^{N-1} R_0^{\text{ex},t,t} \tau_{k-t,k-t-1} = (-1)^m b_{N,N}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Разрешая (2.35), находим $b_{N,N}$ и $\tau_{N+1,N}$. Теорема доказана.

Подчеркнем, что в теореме построены две серии асимптотических рядов, соответствующие $\tau_{1,0} = (-1)^n \psi(0) (|\omega|/2h)^{1/2}$, $n = 1, 2$ (или, что то же самое, $R_0^{\text{in},0,0} = (-1)^n \psi_0^{-1} 2^{-1/2}$). Кроме этого, из формул (2.14) следуют (пока на формальном уровне) формулы (1.8) для $\tau_{1,0}$ и $\tau_{2,1}$ и равенство

$$\tau_{2,0}^{(n)} = \frac{1}{2} \frac{|\omega|}{h} \left(\frac{2k_0}{\pi} \left(\ln \left(\frac{2|\omega|}{\pi} \right) - 1 \right) - \frac{1}{4} \psi^2(0) - k_0 (g^{\text{in}}(k_0) + g^{\text{ex}}(k_0)) \right).$$

Из последнего равенства, учитывая, что $\text{Im } g^{\text{in}}(k_0) = 0$, $\text{Im } g^{\text{ex}}(k_0) = k_0 \sigma$ (последнее см., например, в [14], [16]), получаем и формулу (1.8) для $\text{Im } \tau_{2,0}$. И, наконец, из (2.14)

следует, что у рядов (2.1)–(2.3) главные члены имеют вид, указанный для функций $\Psi_\varepsilon^{(n)}$ в пункте в) теоремы 1.1 в соответствующих областях.

Обозначим

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon,N}^{(n)}(x,k) &= \chi\left(\frac{|x^{\text{in}}|}{\varepsilon^{1/2}}\right) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^i \varepsilon^{i/2} \ln^j \varepsilon (k_0^2 - k^2) R_{[(i-j)/2]}^{\text{in},i,j}(D_y) G^{\text{in}}(x, x_0^{\text{in}}, k) \\ &+ \chi\left(\frac{|x^{\text{ex}}|}{\varepsilon^{1/2}}\right) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^i \varepsilon^{i/2} \ln^j \varepsilon (k_0^2 - k^2) R_{[(i-j)/2]}^{\text{ex},i,j}(D_y) G^{\text{ex}}(x, x_0^{\text{ex}}, k) \\ &+ \left(1 - \chi\left(\frac{|x^{\text{in}}|}{\varepsilon^{1/2}}\right)\right) v_{\varepsilon,N/2}^{\text{in}}\left(\frac{x^{\text{in}}}{\varepsilon}\right) + \left(1 - \chi\left(\frac{|x^{\text{ex}}|}{\varepsilon^{1/2}}\right)\right) v_{\varepsilon,N/2}^{\text{ex}}\left(\frac{x^{\text{ex}}}{\varepsilon}\right) \\ &+ \chi\left(\frac{|x^{\text{in}}|}{\varepsilon^{1/2}}\right) \chi\left(\frac{|x^{\text{ex}}|}{\varepsilon^{1/2}}\right) w_{\varepsilon,N/2}(x), \end{aligned}$$

где $w_{M,\varepsilon}$ – частичная сумма ряда (2.2), $\chi(t)$ – гладкая срезающая функция, равная нулю при $t < 0$ и единице при $t > 2$, а индекс $n = 1, 2$ в левой части соответствует двум сериям асимптотик и для краткости опущен в правой части. Из теоремы 2.1 стандартным образом (см., например, [17]) вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть асимптотики функций $\tau_\varepsilon^{(n)}$ и ряды (2.1)–(2.3) удовлетворяют утверждениям теоремы. Тогда

- (а) $\psi_{\varepsilon,N}^{(n)}(x,k) \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ есть голоморфная функция из $W_{2,\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$, при $\text{Im } k \geq 0$ удовлетворяющая (1.2);
- (б) $\psi_{\varepsilon,N}^{(n)}(x,k)$ является решением (1.1), где $F(x,k) = F_{\varepsilon,N}^{(n)}(x,k)$ – голоморфная функция из $L_2(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } F_{\varepsilon,N} \subset \kappa_\varepsilon \cup S^{\text{in}}(2\varepsilon^{1/2}) \cup S^{\text{ex}}(2\varepsilon^{1/2})$ и

$$\|F_{\varepsilon,N}^{(n)}(\circ, \tau_\varepsilon^{(n)})\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \leq C_N \varepsilon^{N_1},$$

где N_1 растет неограниченно вместе с N .

Из явного вида главных членов асимптотик (2.14) вытекает также, что

$$\|\psi_{\varepsilon,N}^{(n)}(\cdot, \tau_\varepsilon^{(n)})\|_{L_2(\Omega_\varepsilon \cap S(T))} \rightarrow 1, \quad \int_{\Omega_\varepsilon \cap S(T)} \psi_{\varepsilon,N}^{(1)}(x, \tau_\varepsilon^{(1)}) \psi_{\varepsilon,N}^{(2)}(x, \tau_\varepsilon^{(2)}) dx \rightarrow 0 \quad (2.36)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любого достаточно большого T .

Построение формальных асимптотик закончено.

3. Обоснование асимптотик. Из [3] следует

ЛЕММА 3.1. Существует

- (а) не более двух полюсов $\tau_\varepsilon^{(n)}$, сходящихся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \cap \Sigma^{\text{ch}}$;
- (б) если $\tau_\varepsilon^{(1)} \neq \tau_\varepsilon^{(2)}$, то каждому из них соответствует одна обобщенная собственная функция.

В свою очередь, следуя [1], [16] и используя лемму 3.1, нетрудно показать справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 3.2. Пусть $k_0 \in \Sigma_1^{\text{in}} \cap \Sigma^{\text{ch}}$, $F \in L_2(\mathbb{R}^2)$ и $\text{supp } F \subset S(R)$. Тогда

- (а) для аналитического продолжения решения краевой задачи справедлива равномерная по малым ε и k , близким к k_0 , оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{L_2(S(T))} \leq \frac{C(R, T)}{|(\tau_\varepsilon^{(1)} - k)(\tau_\varepsilon^{(2)} - k)|} \|F\|_{L_2(\mathbb{R}^2)},$$

не зависящая от совпадения или несовпадения полюсов $\tau_\varepsilon^{(n)}$;

- (б) если $\tau_\varepsilon^{(1)} \neq \tau_\varepsilon^{(2)}$, то справедливо утверждение пункта б) теоремы 1.1 и имеет место равномерная по малым ε и $k \in K$, близким к k_0 , оценка

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(S(T))} \leq C(R, T) \|F\|_{L_2(\mathbb{R}^2)};$$

- (в) если $\tau_\varepsilon^{(1)} \neq \tau_\varepsilon^{(2)}$ и для любого достаточно большого $T > 0$

$$\frac{1}{\|\Psi_\varepsilon^{(1)}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon \cap S(T))} \|\Psi_\varepsilon^{(2)}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon \cap S(T))}} \int_{\Omega_\varepsilon \cap S(T)} \Psi_\varepsilon^{(1)} \Psi_\varepsilon^{(2)} dx \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

то $\|\Psi_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon \cap S(R))} \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Справедливость пункта а) следует из пункта а) леммы 3.2, следствия теоремы 2.1 и произвола в выборе N . Так как по построению $\tau_\varepsilon^{(1)} \neq \tau_\varepsilon^{(2)}$, то из пункта б) леммы 3.2 вытекает справедливость пункта б) доказываемой теоремы. Далее, из пункта б) леммы 3.2, следствия теоремы 2.1 и произвола в выборе N следует, что в представлении (1.9)

$$\Psi_\varepsilon^{(n)}(x) = \alpha_n(\varepsilon) \psi_\varepsilon^{(n)}(x), \quad (3.1)$$

где $\psi_\varepsilon^{(n)}$ имеет асимптотические разложения (2.1)–(2.3), коэффициенты которых удовлетворяют утверждениям теоремы 2.1, а $\alpha_n(\varepsilon)$ – некоторый нормирующий множитель. В свою очередь, из (2.36) и пункта (в) леммы 3.2 следует, что

$$\alpha_n(\varepsilon) = 1 + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

В силу (3.1), (3.2) и (2.14) получаем справедливость пункта в) теоремы 1.1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Beale J. T. Scattering frequencies of resonator // *Comm. Pure Appl. Math.* 1973. V. 26. P. 549–564.
- [2] Арсеньев А. А. Об особенностях аналитического продолжения и резонансных свойствах решения задачи рассеяния для уравнения Гельмгольца // *ЖВМиМФ.* 1971. Т. 12. С. 112–138.
- [3] Brown R. M., Hislop P. D., Martinez A. Eigenvalues and resonances for domains with tubes: Neumann boundary conditions // *J. Diff. Equations.* 1995. V. 115. P. 458–476.
- [4] Гадыйльшин Р. Р. О рассеянии на цилиндре с узкой щелью и стенками конечной толщины // *ТМФ.* 1996. Т. 106, № 1. С. 24–43.
- [5] Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
- [6] Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1986.
- [7] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- [8] Gadyl'shin R. R. On the scattering of H -polarized electromagnetic field by an ideally conductive cylindrical body of a trapping type // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. IIb.* 2001. V. 329. P. 137–140.
- [9] Санчес-Паленсиа Е. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1985.
- [10] Lord Rayleigh. The theory of Helmholtz resonator // *Proc. Royal Soc. London.* 1916. V. 92. P. 265–275.
- [11] Арсеньев А. А. О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода // *ЖВМиМФ.* 1976. Т. 16. № 3. С. 718–724.
- [12] Gadyl'shin R. R. On scattering frequencies of acoustic resonator // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I.* 1993. V. 316. P. 959–963.
- [13] Gadyl'shin R. R. Asymptotics of scattering frequencies with small imaginary parts for acoustic resonator // *Math. Modelling Numer. Anal.* 1994. V. 28. № 6. P. 761–780.
- [14] Гадыйльшин Р. Р. Двумерный аналог резонатора Гельмгольца с идеально жесткими стенками // *Дифференц. уравнения.* 1994. Т. 30. С. 221–229.
- [15] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
- [16] Гадыйльшин Р. Р. О полюсах акустического резонатора // *Функцион. анализ и его прилож.* 1993. № 5. С. 3–16.
- [17] Gadyl'shin R. R. On acoustic Helmholtz resonator and on its electromagnetic analogue // *J. Math. Phys.* 1994. V. 35. P. 3464–3481.