Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Лившиц, О сходимости гриди-алгоритмов в банаховых пространствах, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 371–389

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm195>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:00:01

УДК 517.518.843+519.651

О СХОДИМОСТИ ГРИДИ-АЛГОРИТМОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е. Д. Лившиц

Статья посвящена изучению сходимости гриди-алгоритмов в банаховых пространствах. Построен пример гладкого банахового пространства, в котором X -гриди-алгоритм сходится не для всех словарей и начальных векторов. Также в работе исследуется R -гриди-алгоритм, являющийся, как и X -гриди-алгоритм, обобщением чисто гриди-алгоритма в гильбертовом пространстве. Доказана его сходимость для некоторого класса банаховых пространств, содержащего, в частности, пространства ℓ^p , $p \geq 2$.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Статья посвящена изучению сходимости гриди-алгоритмов в банаховых пространствах. Напомним некоторые понятия и теоремы теории гриди-алгоритмов в гильбертовом пространстве (подробнее см. [1], [2]). Пусть H – вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$. Назовем множество $\mathcal{D} \subset H$ *словарем*, если каждый вектор $g \in \mathcal{D}$ имеет единичную норму и $\text{span} \mathcal{D} = H$.

Для произвольной функции $f \in H$, обозначим через $g^{PGA}(f)$ такой элемент словаря $\mathcal{D}$, который максимизирует $|\langle f, g \rangle|$; мы предполагаем, что такой элемент всегда существует.

Чисто гриди-алгоритм (ЧГА). Пусть $f_0^{PGA} := f$ и $G_0^{PGA}(f) := 0$. Для каждого $m \geq 1$ последовательно определим

$$f_m^{PGA} = f_{m-1}^{PGA} - \langle f_{m-1}^{PGA}, g^{PGA}(f_{m-1}^{PGA}) \rangle g^{PGA}(f_{m-1}^{PGA}),$$

$$G_m^{PGA}(f) := G_{m-1}^{PGA}(f) + \langle f_{m-1}^{PGA}, g^{PGA}(f_{m-1}^{PGA}) \rangle g^{PGA}(f_{m-1}^{PGA}).$$

В работе [3] Л. Джоунс доказал, что для произвольных функции $f \in H$ и словаря $\mathcal{D}$ справедливо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - G_m^{PGA}(f)\| = 0,$$

т.е. ЧГА сходится. Возникает вопрос об обобщении ЧГА на случай произвольного банахового пространства. Вероятно, наиболее естественными обобщениями ЧГА является X -гриди-алгоритм и двойственный гриди-алгоритм (см. [1]).

Работа выполнена при частичной поддержке фонда ISSEP, грант s99-2043.

Пусть X – банахово пространство и $\mathcal{D}$ – словарь в нем (как и в случае гильбертова пространства, назовем словарем подмножество $\mathcal{D}$ пространства X , состоящее из единичных векторов, для которого $\overline{\text{span}}\mathcal{D} = X$). Для произвольных $f, h \in X$ определим

$$\lambda(f, h) \in \mathbb{R} : \quad \|f - \lambda(f, h)h\| = \inf_{\lambda} \|f - \lambda h\|,$$

$$F_f - \text{произвольный функционал из } X^*, \quad \|F_f\| = 1, \quad F_f(f) = \|f\|, \quad (1.1)$$

$$g^{XGA}(f) \in \mathcal{D} : \quad \|f - \lambda(f, g^{XGA}(f))g^{XGA}(f)\| = \inf_{g \in \mathcal{D}} \|f - \lambda(f, g)g\|, \quad (1.2)$$

$$g^{DGA}(f) \in \mathcal{D} : \quad |F_f(g^{DGA}(f))| = \sup_{g \in \mathcal{D}} |F_f(g)|. \quad (1.3)$$

Отметим, что существование хотя бы одного F_f гарантируется теоремой Хана–Банаха. Предполагается, что для всех $f \in H$ существуют элементы словаря $g^{XGA}(f)$ и $g^{DGA}(f)$, удовлетворяющие (1.2) и (1.3) соответственно.

X-гриди-алгоритм. Пусть $f_0^{XGA} := f$ и $G_0^{XGA}(f) := 0$. Для каждого $m \geq 1$ последовательно определим

$$\begin{aligned} f_m^{XGA} &= f_{m-1}^{XGA} - \lambda(f_{m-1}^{XGA}, g^{XGA}(f_{m-1}^{XGA}))g^{XGA}(f_{m-1}^{XGA}), \\ G_m^{XGA}(f) &:= G_{m-1}^{XGA}(f) + \lambda(f_{m-1}^{XGA}, g^{XGA}(f_{m-1}^{XGA}))g^{XGA}(f_{m-1}^{XGA}). \end{aligned}$$

Определение двойственного гриди-алгоритма получается из определения X -гриди-алгоритма заменой всех XGA на DGA .

Напомним, что банахово пространство X называется *гладким по Гато*, если для любых $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что для всех $0 < \delta < \delta_0$ выполняется оценка

$$\|x + \delta y\| + \|x - \delta y\| \leq 2 + \varepsilon \delta.$$

В терминах сопряженного пространства гладкость по Гато формулируется следующим образом: пространство X является гладким по Гато в том и только том случае, когда для произвольной $f \in X$ существует ровно один функционал, удовлетворяющий (1.1). Этот функционал называется *опорным*.

Хорошо известно, что X -гриди-алгоритм сходится в любом конечномерном гладком по Гато банаховом пространстве (т.е. для всех $f \in X$ и словарей $\mathcal{D} \subset X$ выполняется $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - G_m^{XGA}(f)\| = 0$). В работах [4], [5] показано, что для того, чтобы для произвольного словаря $\mathcal{D} \subset X$ и функции $0 \neq f_0^{XGA} \in X$ выполнялось $\|f_1^{XGA}\| < \|f_0^{XGA}\|$, необходимо и достаточно гладкости пространства X по Гато. Насколько известно автору, к настоящему моменту никакие общие “положительные” результаты о сходимости X -гриди-алгоритма не получены. В п. 2 доказана теорема, показывающая, что условие гладкости пространства X по Гато не является достаточным для сходимости в нем X -гриди-алгоритма.

ТЕОРЕМА 1.1. *Существует гладкое по Гато банахово пространство X , словарь $\mathcal{D} \subset X$ и $f \in X$, для которых последовательность $\{f - G_m^{XGA}(f)\}$ не стремится к 0 при $m \rightarrow \infty$.*

Если X -гриди-алгоритм или двойственный гриди-алгоритм сходятся для какой-нибудь функции $f \in X$ и словаря $\mathcal{D} \subset X$, то они дают разложение f по системе $\mathcal{D}$

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(f_k^{XGA}, g^{XGA}(f_k^{XGA})) g^{XGA}(f_k^{XGA})$$

(аналогично для двойственного гриди-алгоритма). В последнее время интенсивно изучались алгоритмы, в которых очередной вектор словаря также определяется с помощью “гриди-шага”, но которые не дают разложения по словарю $\mathcal{D}$. Пусть задана последовательность $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$, $0 < t_k < 1$. Для каждого $f \in X$ и $k \geq 0$ выберем произвольную функцию $g^{CGA}(f, k) \in \mathcal{D}$, удовлетворяющую неравенству

$$|F_f(g^{CGA}(f, k))| \geq t_k \left| \sup_{g \in \mathcal{D}} F_f(g) \right|.$$

СЛАБЫЙ ЧЕБЫШЕВСКИЙ ГРИДИ-АЛГОРИТМ. Пусть $f_0^{CGA} := f$ и $G_0^{CGA}(f) := 0$. Для каждого $m \geq 1$ последовательно определим

$$G_m^{CGA} - \text{ближайший к } f \text{ вектор из подпространства } \text{span}\{g^{CGA}(f_k^{CGA}, k)\}_{k=1}^{m-1}, \\ f_m^{CGA} = f - G_m^{CGA}.$$

В.Н. Темляков [6] доказал, что в случае $t_k = t$ ($k \geq 0$, $0 < t < 1$) слабый чебышевский гриди-алгоритм сходится в любом равномерно гладком (определение ниже) банаховом пространстве. О других случаях сходимости этого алгоритма можно узнать из работ [6], [7].

Введем понятие R -гриди-алгоритма. Рассмотрим действительное банахово пространство X и числа $q \geq 1$ и $0 < t < 1$. Пусть

$$z(x, y) = x - \lambda(x, y)y, \quad p_q(x, y) = \|x\|^q - \|z(x, y)\|^q.$$

Для $f \in X$ выберем произвольную функцию $g^{RGA}(f) \in \mathcal{D}$, удовлетворяющую неравенству

$$\frac{p_q(f, g^{RGA}(f))}{\lambda(f, g^{RGA}(f))} \geq t \sup_{g \in \mathcal{D}} \frac{p_q(f, g)}{\lambda(f, g)}. \quad (1.4)$$

Умножение на t введено для того, чтобы существовала хотя бы одна $g^{RGA}(f)$, удовлетворяющая (1.4); тем самым, фактически определяется алгоритм “слабого типа”. Отметим, что если положить $t = q = 1$ и убрать знаменатели в формуле (1.4), то получится определение $g^{XGA}(f)$.

R-ГРИДИ-АЛГОРИТМ. Положим $f_0^{RGA} := f$ и $G_0^{RGA} := 0$. Для каждого $m \geq 1$ последовательно определим

$$\begin{aligned} f_m^{RGA} &= f_{m-1}^{RGA} - \lambda(f_{m-1}^{RGA}, g^{RGA}(f_{m-1}^{RGA}))g^{RGA}(f_{m-1}^{RGA}), \\ G_m^{RGA}(f) &:= G_{m-1}^{RGA}(f) + \lambda(f_{m-1}^{RGA}, g^{RGA}(f_{m-1}^{RGA}))g^{RGA}(f_{m-1}^{RGA}). \end{aligned}$$

Заметим, что для $X = H$ и $q = 2$ выполняется

$$\frac{p_q(f, g)}{\lambda(f, g)} = \langle f, g \rangle,$$

и предложенный алгоритм при $t = 1$ совпадает с ЧГА. Напомним, что банахово пространство X называется *равномерно гладким*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \quad \forall x \in X, \|x\| = 1, \quad \forall y \in X, \|y\| < \delta, \quad \|x + y\| + \|x - y\| \leq 2 + \varepsilon\|y\|,$$

и *равномерно выпуклым*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \quad \left(1 - \left\|\frac{x + y}{2}\right\| < \delta, \|x\| = \|y\| = 1\right) \implies \|x - y\| < \varepsilon.$$

В п. 3 доказывается

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть X – равномерно выпуклое, равномерно гладкое банахово пространство и $\mathcal{D}$ – словарь в нем. Если существует $C \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $f, \|f\| = 1$, и $g \in D$ выполнено

$$Cp_q(f, g) \geq 1 - F_f(z(f, g)) = \lambda(f, g)F_f(g), \quad (1.5)$$

то для любой $f \in X$ выполняется

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - G_m^{RGA}(f)\| = 0.$$

Если (1.5) выполняется для всех $f, g \in X, \|f\| = \|g\| = 1$, то *R*-гриди-алгоритм сходится при всех f и $\mathcal{D}$. В п. 4 доказывается следствие теоремы 1.2.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $2 \leq p < \infty, q \geq 1$. Тогда для любого словаря $\mathcal{D}$ в пространстве ℓ^p и любой $f \in \ell^p$ справедливо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - G_m^{RGA}(f)\| = 0.$$

2. Доказательство теоремы 1.1. Банахово пространство X , существование которого утверждается теоремой 1.1, будет получено путем перенормировки пространства последовательностей ℓ^1 . Пусть e_n – последовательность, у которой на n -м месте стоит 1, а на остальных – 0. Тогда $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – базис пространства ℓ^1 . Пусть $x \in \ell^1$, для всех $n \in \mathbb{N}$ обозначим $c_n(x)$ числа такие, что

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n;$$

сходимость понимается в смысле нормы $\|\cdot\|_1$ пространства ℓ^1 . Пусть

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k.$$

Для $y, z \in \mathbb{R}$ и $\beta > 1$ обозначим

$$T_\beta(y, z) = (|y|^\beta + |z|^\beta)^{1/\beta}.$$

Заметим, что по неравенству Йенсена справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left(\left| \frac{y+z}{2} \right|^\beta + \left| \frac{y+z}{2} \right|^\beta \right)^{1/\beta} &\leq T_\beta(y, z) \leq ((|y| + |z|)^\beta)^{1/\beta}, \\ 2^{1/\beta-1} |y+z| &\leq T_\beta(y, z) \leq |y| + |z|. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_n = 1 - \frac{10^{-6}}{(n+100)^{10}}, \quad n \geq 2. \quad (2.2)$$

Из (2.1) вытекает, что существуют $\beta_n, n \geq 2$, такие, что для всех $y, z \in \mathbb{R}$

$$\alpha_n |y+z| \leq T_{\beta_n}(y, z) \leq |y| + |z|. \quad (2.3)$$

Нетрудно заметить, что при этом выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - 1) < \infty. \quad (2.4)$$

Перейдем к определению нормы пространства X . Рассмотрим последовательность $x = \{x^n\}_{n=1}^\infty$. Пусть $\mathcal{S}_1(x) = |x^1|$; далее последовательно определяем

$$\mathcal{S}_{n+1}(x) = T_{\beta_{n+1}}(\mathcal{S}_n(x), |x^{n+1}|), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что $\mathcal{S}_n(x) \leq \mathcal{S}_{n+1}(x)$. Определим множество последовательностей

$$X = \left\{ x = \{x^n\}_{n=1}^\infty \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n(x) < \infty \right\}$$

и

$$\|x\|_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n(x).$$

Из (2.2) и (2.3) следует, что для $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\alpha_{n+1} \left(\left\| \sum_{k=1}^n x^k e_k \right\|_X + |x^{n+1}| \right) \leq \left\| \sum_{k=1}^{n+1} x^k e_k \right\|_X, \quad (2.5)$$

$$\prod_{k=1}^n \alpha_k \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \mathcal{S}_n(x) \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = \|s_n(x)\|_1, \\ p\|x\|_1 \leq \|x\|_X \leq \|x\|_1, \quad (2.6)$$

где $p = \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n > 0$. Следовательно, $X = \ell^1$. Ясно, что

$$\|x\|_X = 0 \leftrightarrow x = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \ell^1 \quad \|\lambda x\|_X = |\lambda| \|x\|_X.$$

Таким образом, для проверки того, что $\|\cdot\|_X$ действительно является нормой, остается проверить выполнение для нее неравенства треугольника. Таким образом, достаточно доказать, что для всех $x, y \in X$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\mathcal{S}_n\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\mathcal{S}_n(x) + \mathcal{S}_n(y)).$$

Проведем доказательство по индукции. База очевидна. Используя неравенство Минковского и индукционное предположение, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{n+1}\left(\frac{x+y}{2}\right) &= T_{\beta_{n+1}}\left(\mathcal{S}_n\left(\frac{x+y}{2}\right), \left|\frac{x^{n+1} + y^{n+1}}{2}\right|\right) \\ &\leq T_{\beta_{n+1}}\left(\frac{1}{2}(\mathcal{S}_n(x) + \mathcal{S}_n(y)), \frac{|x^n| + |y^n|}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}(T_{\beta_{n+1}}(\mathcal{S}_n(x), |x^{n+1}|) + T_{\beta_{n+1}}(\mathcal{S}_n(y), |y^{n+1}|)) \\ &\leq \frac{1}{2}(\mathcal{S}_{n+1}(x) + \mathcal{S}_{n+1}(y)). \end{aligned}$$

Итак, построенная норма $\|\cdot\|_X$ задает перенормировку пространства ℓ^1 .

Для доказательства гладкости по Гато пространства $(\ell^1, \|\cdot\|_X)$ нам потребуется одна вспомогательная конструкция. Пусть $x = \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \in X$, $N \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$. Для $n \geq N$ последовательно определим числа $\mathcal{S}_n^*(x, t, N)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_N^*(x, t, N) &= \mathcal{S}_N(x) + t = \|s_N(x)\|_X + t, \\ \mathcal{S}_{n+1}^*(x, t, N) &= T_{\beta_{n+1}}(\mathcal{S}_n^*(x, t, N), |x^{n+1}|), \quad n \geq N. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2.1. Пусть $x \in X$, $t \geq 0$, $n \geq N \geq 1$. Тогда

$$\mathcal{S}_n^*(x, t, N) \leq \mathcal{S}_n^*(x, 0, N) + t = \mathcal{S}_n(x) + t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по n . База индукции очевидна. Предположим, что для $n = k \geq N$ неравенство доказано. Тогда по индукционному предположению и неравенству Минковского для $n = k + 1$ имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{k+1}^*(x, t, N) &= T_{\beta_{k+1}}(\mathcal{S}_k^*(x, t, N), |x^{k+1}|) \leq T_{\beta_{k+1}}(\mathcal{S}_k(x) + t, |x^{k+1}| + 0) \\ &\leq T_{\beta_{k+1}}(\mathcal{S}_k(x), |x^{k+1}|) + T_{\beta_{k+1}}(t, 0) = \mathcal{S}_{k+1}(x) + t.\end{aligned}$$

ЛЕММА 2.2. Пусть даны $x \in X$, $\|x\|_X = 1$, $\varepsilon > 0$. Тогда существуют $N \in \mathbb{N}$ и $t_0 > 0$ такие, что для всех $n \geq N$ и t , $0 \leq t < t_0$, выполняется

$$\mathcal{S}_n^*(x, -t, N) \leq \mathcal{S}_n^*(x, 0, N) - t(1 - \varepsilon) = \mathcal{S}_n(x) - t(1 - \varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим функцию

$$F_{K_1, K_2}(\alpha, \tau) := T_{\tau+1}(K_1 - \alpha, K_2) - T_{\tau+1}(K_1, K_2),$$

где K_1, K_2 — константы, удовлетворяющие неравенствам $1/2 < K_1 \leq 1$, $0 \leq K_2 < 1/2$. Ясно, что $F_{K_1, K_2}(\alpha, \tau)$ аналитична в окрестности точки $(0, 0)$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{K_1, K_2}}{\partial \alpha}(0, 0) &= -1, \\ \frac{\partial^s F_{K_1, K_2}}{\partial \alpha^s}(0, 0) &= 0 \quad \text{при } s \geq 2, \\ \frac{\partial^l F_{K_1, K_2}}{\partial \tau^l}(0, 0) &= 0 \quad \text{при } l \geq 1.\end{aligned}$$

Поэтому существует C_1 такая, что для всех (α, τ) из малой окрестности U точки $(0, 0)$ выполняется оценка

$$\begin{aligned}F_{K_1, K_2}(\alpha, \tau) &\leq F_{K_1, K_2}(0, 0) - \alpha + C_1|\alpha\tau|, \\ F_{K_1, K_2}(\alpha, \tau) &\leq -\alpha(1 - C_1((\tau + 1) - 1)), \quad \alpha \geq 0, \quad \tau \geq 0;\end{aligned}\tag{2.7}$$

более того, можно так подобрать C_1 , чтобы (2.7) выполнялось при всех $1/2 < K_1 \leq 1$, $0 \leq K_2 < 1/2$. В силу (2.4) можно выбрать $N \in \mathbb{N}$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$1 - \varepsilon < \prod_{n=N}^{\infty} (1 - C_1(\beta_n - 1)) \leq 1, \quad |x^{n+1}| < \frac{1}{2}$$

и $(\beta_n - 1, t) \in U$ для всех $n \geq N$ и $0 \leq t < t_0$. По индукции легко проверяется, что для $n \geq N$

$$\mathcal{S}_n^*(x, -t, N) \leq \mathcal{S}_n(x) - t(1 - C_1(\beta_{N+1} - 1)) \cdots (1 - C_1(\beta_n - 1)) \leq \mathcal{S}_n(x) - t(1 - \varepsilon).$$

База $n = N$ очевидна; шаг индукции проводим, используя (2.7):

$$\begin{aligned}S_{n+1}^*(x, -t, N) - S_{n+1}(x) &= T_{\beta_{n+1}}(S_n^*(x, -t, N), |x^{n+1}|) - T_{\beta_{n+1}}(S_n(x), |x^{n+1}|) \\ &\leq T_{\beta_{n+1}}\left(S_n(x) - t(1 - C_1(\beta_{N+1} - 1)) \cdots (1 - C_1(\beta_n - 1)), |x^{n+1}|\right) \\ &\quad - T_{\beta_{n+1}}(S_n(x), |x^{n+1}|) \\ &= F_{S_n(x), |x^{n+1}|}\left(-t(1 - C_1(\beta_{N+1} - 1)) \cdots (1 - C_1(\beta_n - 1)), \beta_{n+1} - 1\right) \\ &\leq -t(1 - C_1(\beta_{N+1} - 1)) \cdots (1 - C_1(\beta_n - 1))(1 - C_1(\beta_{n+1} - 1)).\end{aligned}$$

ЛЕММА 2.3. *Пространство $(\ell^1, \|\cdot\|_X)$ является гладким по Гато.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тогда $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$ и $0 < \varepsilon < 1/2$. В силу леммы 2.2 существуют $N \in \mathbb{N}$ и $\delta_1 > 0$ такие, что для всех $0 \leq t \leq \delta_1$ и $n \geq N$ выполняются соотношения

$$\|s_N(x)\|_X > \frac{1}{2}, \quad \|y - s_N(y)\|_X < \frac{\varepsilon}{8}, \quad \mathcal{S}_n^*(x, -t, N) \leq \mathcal{S}_n(x) - t\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right). \quad (2.8)$$

Нормированное пространство $(L_N, \|\cdot\|_X)$, где $L_N = \text{span}\{e_k\}_{k=1}^N$, является гладким по Гато. Поэтому существует $0 < \delta_2 < 1/4$ такое, что для всех $0 < \delta < \delta_2$ справедлива оценка

$$\|s_N(x) + \delta s_N(y)\|_X + \|s_N(x) - \delta s_N(y)\|_X \leq 2\|s_N(x)\|_X + \frac{\varepsilon}{4}\delta\|s_N(y)\|_X \leq 2\|s_N(x)\|_X + \frac{\varepsilon}{4}\delta.$$

Без ограничения общности считаем, что $\|s_N(x) + \delta s_N(y)\|_X \geq \|s_N(x) - \delta s_N(y)\|_X$. Пусть t_+ и t_- удовлетворяют соотношениям

$$\|s_N(x) + \delta s_N(y)\|_X = \|s_N(x)\|_X + t_+, \quad \|s_N(x) - \delta s_N(y)\|_X = \|s_N(x)\|_X - t_-. \quad (2.9)$$

Тогда

$$|t_+| < \delta, \quad |t_-| < \delta, \quad t_+ - t_- \leq \delta \frac{\varepsilon}{4} \quad (2.10)$$

Пусть $\delta_0 = \min(\delta_1, \delta_2)$ и $0 < \delta < \delta_0$. Имеем

$$\begin{aligned} & \|x + \delta y\|_X + \|x - \delta y\|_X \\ & \leq \|x + \delta s_N(y)\|_X + \|x - \delta s_N(y)\|_X + 2\delta\|y - s_N(y)\| \\ & \leq \|s_N(x) + \delta s_N(y) + (x - s_N(x))\|_X + \|s_N(x) - \delta s_N(y) + (x - s_N(x))\|_X + \delta \frac{\varepsilon}{4} \\ & =: I. \end{aligned}$$

Из (2.9) вытекает, что

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n^*(x, t_+, N) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n^*(x, -t_-, N) + \delta \frac{\varepsilon}{4}.$$

Если $-1/4 < t_+ \leq 0$ и $-1/4 < -t_- \leq 0$, то с учетом неравенства $\|s_N(x)\|_X > 1/2$ ясно, что $I \leq 2\|x\|_X + \delta\varepsilon/4 < 2 + \varepsilon\delta$. Если $t_+ \geq 0$ и $-t_- \geq 0$, то по лемме 2.1 и (2.10)

$$I \leq \|x\|_X + t_+ + \|x\|_X + (-t_-) + \delta \frac{\varepsilon}{4} \leq 2 + \delta \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $t_+ \geq 0$, а $-t_- \leq 0$ (в силу определения t_+ и t_- случай $t_+ < 0$, $-t_- > 0$ невозможен), то по лемме 2.1, (2.8) и (2.10) имеем

$$I \leq 2\|x\|_X + t_+ - t_- \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) + \delta \frac{\varepsilon}{4} \leq 2 + t_+ - t_- + t_- \frac{\varepsilon}{4} + \delta \frac{\varepsilon}{4} < 2 + \varepsilon\delta.$$

Отметим еще одно свойство нормы $\|\cdot\|_X$. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $\{c_k\}_{k=1}^n$ и $\{c'_k\}_{k=1}^n$, удовлетворяющих неравенствам $|c_k| \leq |c'_k|$ при всех $1 \leq k \leq n$ и $|c_{k_0}| < |c'_{k_0}|$ при каком-то k_0 , $1 \leq k_0 \leq n$, выполняется оценка

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\|_X < \left\| \sum_{k=1}^n c'_k e_k \right\|_X. \quad (2.11)$$

Перейдем к построению словаря $\mathcal{D}$ и $f_0 \in X$ таких, что

$$G_m^{XGA}(f_0) \rightarrow f_0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим числовые последовательности

$$\lambda_n = 1 - \frac{0.001}{(n+50)^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \tau_n = \frac{2(1 - \alpha_n \alpha_{n+1})}{1 - \lambda_{n+1}}, \quad n \geq 2. \quad (2.12)$$

Тогда будут справедливы следующие оценки:

$$\sum_{i=2}^{\infty} \tau_i < 0.05, \quad (2.13)$$

$$\prod_{i=3}^{\infty} \lambda_i > 0.95, \quad 1 < \frac{1 - \lambda_i}{1 - \lambda_{i+1}} < 1.05, \quad i \geq 3, \quad (2.14)$$

$$\frac{1 - \alpha_{i-1}^3}{1 - \lambda_i} < 0.01, \quad i \geq 3, \quad (2.15)$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_i} - 1 \right) < 0.05, \quad p = \prod_{i=2}^{\infty} \alpha_i > \frac{1 + \lambda_3}{2}. \quad (2.16)$$

Рассмотрим последовательность векторов $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g_1 = e_1, \quad g_2 = e_1 + e_2, \quad g_n = e_{n-1} + \lambda_n e_n, \quad n \geq 3.$$

Пусть $\mathcal{D} = \{g_n / \|g_n\|_X\}_{n=1}^{\infty}$. Ясно, что $\mathcal{D}$ является словарем.

Положим $x_0 := f_0 := e_2$. Пусть $x_n := f_n^{XGA}$, $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что при этом выборе x_0 и словаря $\mathcal{D}$ $g^{XGA}(x_n)$ из (1.2) будет корректно определено для всех n (т.е. супремум будет достигаться на каком-нибудь векторе из словаря). Напомним, что $\lambda(x, g_k)$ удовлетворяет соотношениям

$$\|x - \lambda(x, g_k) g_k\|_X = \inf_{\lambda} \|x - \lambda g_k\|_X, \quad p_1(x, g_k) = \|x\|_X - \|x - \lambda(x, g_k) g_k\|_X.$$

Докажем, что $x_n \rightarrow 0$. Пусть

$$d(n) = \max\{m \mid \exists k \leq n \text{ такое, что } (x_{k-1} - x_k) \text{ параллелен } g_m\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

т.е. максимальный номер вектора из словаря, который вычитался (с некоторым коэффициентом) за первые n шагов алгоритма. Для $d := d(n)$ покажем, что

$$|c_d(x_n)| \geq \prod_{i=3}^d \lambda_i - \left(\sum_{i=2}^{d-1} \tau_i \right) > 0.75, \quad (2.17)$$

$$\|s_{d-1}(x_n)\|_X \leq \left(\sum_{i=2}^{d-1} \tau_i + \sum_{i=3}^d \left(\frac{1}{\alpha_i - 1} \right) \right) \prod_{i=3}^d \frac{1}{\alpha_i} < 0.25. \quad (2.18)$$

Из (2.17) будет непосредственно следовать, что X -гриди-алгоритм при $x_0 = e_2$ не сходится к нулю.

Докажем эти утверждения по индукции. База $n = 1$.

В силу (2.11) $p_1(x_0, g_k) = 0$ при $k \neq 2, 3$, поэтому для определения того, какой вектор будет вычитаться на первом шаге, достаточно сравнить $p_1(x_0, g_2)$ и $p_1(x_0, g_3)$. Согласно (2.6), (2.11) и (2.16) имеем для $\lambda = \lambda(x_0, g_2)$

$$p_1(x_0, g_2) \leq 1 - p(|c_1(x_0 - \lambda g_2)| + |c_2(x_0 - \lambda g_2)|) = 1 - p \leq \frac{1 - \lambda_3}{2}.$$

Далее, $p_1(x_0, g_3) \geq \|x_0\|_X - \|x_0 - g_3\|_X = 1 - \lambda_3$, поэтому получаем, что $d(1) = 3$. Проверим выполнение (2.17) и (2.18). Так как $p_1(x_0, g_3) \geq 1 - \lambda_3$, то

$$\alpha_3(|c_2(x_1)| + \lambda_3|1 - c_2(x_1)|) \leq \|x_1\|_X \leq \lambda_3,$$

откуда согласно (2.12)

$$|c_2(x_1)| \leq \frac{1/\alpha_3 - 1}{1 - \lambda_3} \leq \frac{1 - \alpha_2\alpha_3}{\alpha_2\alpha_3(1 - \lambda_3)} \leq \tau_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|s_{d(1)-1}(x_1)\|_X &= |c_2(x_1)| \leq \tau_{d(1)-1}, \\ |c_{d(1)}(x_1)| &= |c_3(x_1)| = \lambda_3\lambda(x, g_3) = \lambda_3(1 - c_2(x_1)) \geq \lambda_{d(1)}(1 - \tau_{d(1)-1}). \end{aligned}$$

Доказательство индукционного перехода разобьем на два случая: $d(n+1) > d(n)$ и $d(n+1) = d(n)$.

Случай $d(n+1) > d = d(n)$. Так как $c_k(x_n) = 0$ при всех $k > d$ и $c_k(g_l) \neq 0$ в тех и только тех случаях, когда $k = l - 1$ или $k = l$, то $d(n+1) = d(n) + 1$. Пусть $c_d(x_n) = a$ (для определенности $a > 0$) и $c_d(x_{n+1}) = b$. Тогда $c_{d+1}(x_{n+1}) = -(a - b)\lambda_{d+1}$. Из (2.11) вытекает, что $0 < b < a < 1$. Из определения X -гриди-алгоритма следует, что $\|x_n - (a - b)g_{n+1}\|_X \leq \|x_n - ag_{n+1}\|_X$, поэтому согласно (2.5) справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &\alpha_{d+1}\alpha_d(\|s_{d-1}(x_n)\|_X + \|be_d\|_X + \|(a - b)\lambda_{d+1}e_{d+1}\|_X) \\ &\leq \alpha_{d+1}(\|s_{d-1}(x_n) + be_d\|_X + \|(a - b)\lambda_{d+1}e_{d+1}\|_X) \\ &\leq \|s_{d-1}(x_n) + be_d - (a - b)\lambda_{d+1}e_{d+1}\|_X = \|s_{d-1}(x_n) + ae_d - (a - b)g_{d+1}\|_X \\ &\leq \|s_{d-1}(x_n) + ae_d - ag_{d+1}\|_X = \|s_{d-1}(x_n) - a\lambda_{d+1}e_{d+1}\|_X \\ &\leq \|s_{d-1}(x_n)\|_X + \|a\lambda_{d+1}e_{d+1}\|_X; \end{aligned}$$

откуда получаем, что

$$\alpha_{d+1}\alpha_d(\|s_{d-1}(x_n)\|_X + b + (a-b)\lambda_{d+1}) \leq \|s_{d-1}(x_n)\|_X + a\lambda_{d+1}.$$

Учитывая (2.18),

$$b \leq \frac{(a\lambda_{d+1} + 0.25)(1 - \alpha_d\alpha_{d+1})}{\alpha_d\alpha_{d+1}(1 - \lambda_{d+1})} < \frac{2(1 - \alpha_d\alpha_{d+1})}{1 - \lambda_{d+1}} = \tau_d. \quad (2.19)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|s_d(x_{n+1})\|_X &\leq \|s_{d-1}(x_n)\|_X + \|c_d(x_{n+1})e_d\|_X \\ &\leq \left(\sum_{i=2}^{d-1} \tau_i + \sum_{i=3}^d \left(\frac{1}{\alpha_i - 1} \right) \right) \prod_{i=3}^d \frac{1}{\alpha_i} + \tau_d, \\ \|s_d(x_{n+1})\|_X &\leq \left(\sum_{i=2}^d \tau_i + \sum_{i=3}^{d+1} \left(\frac{1}{\alpha_i - 1} \right) \right) \prod_{i=3}^{d+1} \frac{1}{\alpha_i} \leq 0.25, \end{aligned} \quad (2.20)$$

и справедливость (2.18) для $d' = d(n+1)$ установлена. Отметим лишь, что последнее неравенство выполнено в силу формул (2.13) и (2.16). Далее,

$$|c_{d+1}(x_{n+1})| \geq \lambda_{d+1}|c_d(x_n) - \tau_d| \geq \lambda_{d+1} \left(\prod_{i=3}^d \lambda_i - \sum_{i=1}^{d-1} \tau_i - \tau_d \right) \geq \prod_{i=3}^{d+1} \lambda_i - \sum_{i=2}^d \tau_i,$$

что доказывает (2.20) для $d' = d(n+1)$ и завершает доказательство первого случая.

Для доказательства второго случая нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 2.4. Пусть $n \geq 2$, $t = d(n) - 1$, $t = d(n)$ или $t = d(n) + 1$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} -3(1 - \alpha_{t-1}^3) + p_1(c_{t-1}(x_n)e_{t-1} + c_t(x_n)e_t, g_t) \\ \leq p_1(x_n, g_t) \leq 3(1 - \alpha_{t-1}^3) + (1 - \lambda_t)|c_{t-1}(x_n)|. \end{aligned} \quad (2.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v_0 = c_{t-1}(x_n)e_{t-1} + c_t(x_n)e_t$, $v_1 = v_0 - \eta_1 g_t$, где $\eta_1 = \lambda(v_0, g_t)$. Тогда согласно (2.5)

$$\begin{aligned} p_1(x_n, g_t) &\geq \|x_n\|_X - \|x_n - \eta_1 g_t\|_X \\ &\geq \alpha_{t-1}\alpha_t\alpha_{t+1}(\|s_{t-2}(x_n)\|_X + |c_{t-1}(x_n)| + |c_t(x_n)| + |c_{t+1}(x_n)|) \\ &\quad - (\|s_{t-2}(x_n)\|_X + \|v_1\|_X + |c_{t+1}(x_n)|), \end{aligned}$$

откуда в силу монотонности α_k

$$\begin{aligned} p_1(x_n, g_t) &\geq -(1 - \alpha_{t-1}^3)(\|s_{t-2}(x_n)\|_X + |c_{t+1}(x_n)|) \\ &\quad + \|v_0\|_X - \|v_1\|_X - (1 - \alpha_t^3)\|v_0\|_X \\ &\geq -3(1 - \alpha_{t-1}^3) + p_1(v_0, g_t). \end{aligned}$$

То есть доказана первая часть неравенства (2.21). Докажем вторую часть неравенства (2.21). Пусть $\eta_2 = \lambda(x_n, g_t)$. Тогда согласно (2.11) $\eta_2 \leq |c_{t-1}(x_n)|$ и

$$\begin{aligned} p_1(x_n, g_t) &\leq (\|s_{t-2}(x_n)\|_X + \|v_0\|_X + c_{t+1}(x_n)) \\ &\quad - \alpha_{t-1}\alpha_t\alpha_{t+1}(\|s_{t-2}(x_n)\|_X + |c_{t-1}(v_0 - \eta_2 g_t)| \\ &\quad + |c_t(v_0 - \eta_2 g_t)| + |c_{t+1}(x_n)|) \\ &\leq 2(1 - \alpha_{t-1}^3) + \|v_0\|_X - \alpha_{t-1}^3(|c_{t-1}(v_0)| + |c_t(v_0)| - (1 - \lambda_t)\eta_2) \\ &\leq 2(1 - \alpha_{t-1}^3) + \|v_0\|_X(1 - \alpha_{t-1}^3) + (1 - \lambda_t)c_{t-1}(x_n) \\ &\leq 3(1 - \alpha_t^3) + (1 - \lambda_t)c_{t-1}(x_n). \end{aligned}$$

Случай $d(n+1) = d(n)$. Пусть

$$l_1 = \min\{k \mid d(k) = d\}, \quad l_2 = \min(n, \min\{k \mid k > l_1, g^{XGA}(x_k) \parallel g_d\} - 1).$$

Рассмотрим $k, l_1 \leq k \leq l_2$. Тогда по определению X -гридди-алгоритма и (2.5)

$$\begin{aligned} \alpha_d(\|s_{d-1}(x_k)\|_X + |c_d(x_k)|) &\leq \|s_{d-1}(x_k) + c_d(x_k)e_d\|_X \leq \|s_{d-1}(x_{l_1}) + c_d(x_{l_1})e_d\|_X \\ &\leq \|s_{d-1}(x_{l_1})\|_X + |c_d(x_k)|, \end{aligned}$$

откуда из предыдущей выкладки и (2.20) для $n = l_1 - 1$ и $d = d(n)$ получаем

$$\begin{aligned} \|s_{d-1}(x_k)\|_X &\leq \frac{1}{\alpha_d}\|s_{d-1}(x_{l_1})\|_X + \left(\frac{1}{\alpha_d} - 1\right)|c_d(x_k)| \\ &\leq \frac{1}{\alpha_d}\left(\left(\sum_{i=2}^{d-2}\tau_i + \sum_{i=3}^{d-1}\left(\frac{1}{\alpha_i - 1}\right)\right)\prod_{i=3}^{d-1}\frac{1}{\alpha_i} + \tau_{d-1}\right) + \left(\frac{1}{\alpha_d} - 1\right) \\ &\leq \left(\sum_{i=2}^{d-1}\tau_d + \sum_{i=3}^d\left(\frac{1}{\alpha_d - 1}\right)\right)\prod_{i=3}^d\frac{1}{\alpha_i}. \end{aligned}$$

Далее заметим, что $c_{d-1}(x_k) = c_{d-1}(x_{l_1})$ при всех $l_1 \leq k \leq l_2$. Действительно, если это не так, то при некотором $k, l_1 \leq k \leq l_2$, из x_k вычитался бы g_{d-1} с некоторым ненулевым коэффициентом, т.е. $p_1(x_k, g_{d-1}) > p_1(x_k, g_{d+1})$, но согласно (2.15), (2.17) и лемме 2.4 для $t = d - 1$ и $t = d + 1$ имеем

$$\begin{aligned} p_1(x_k, g_{d-1}) &\leq 3(1 - \alpha_{d-2}^3) + (1 - \lambda_{d-1})|c_{d-2}(x_k)| \\ &\leq 3 \cdot 0.01(1 - \lambda_{d-1}) + (1 - \lambda_{d-1})\|s_{d-1}(x_k)\|_X \leq 0.3(1 - \lambda_{d-1}), \\ p_1(x_k, g_{d+1}) &\geq -3(1 - \alpha_d^3) + p_1(c_d(x_k), g_{d+1}) \\ &\geq -3(1 - \alpha_d^3) + (\|c_d(x_k)e_k\|_X - \|c_d(x_k)e_k - c_d(x_k)g_{d+1}\|_X) \\ &\geq -3(1 - \alpha_d^3) + (1 - \lambda_{d+1})|c_d(x_k)| > 0.7(1 - \lambda_{d+1}). \end{aligned}$$

Из формулы (2.14) следует, что $0.3(1 - \lambda_{d-1}) < 0.7(1 - \lambda_{d+1})$, откуда вытекает, что $c_{d-1}(x_{l_2}) = c_{d-1}(x_{l_1})$. Покажем, что на $(l_2 + 1)$ -м шаге из x_{l_2} не мог вычитаться вектор g_d с некоторым ненулевым коэффициентом. Из этого, в том числе, будет следовать, что $l_2 = n$. Из (2.19) следует, что $c_{d-1}(x_{l_2}) = c_{d-1}(x_{l_1}) \leq \tau_{d-1}$. Используя лемму 2.4, для $t = d$ получаем оценку $p_1(x_{l_2}, g_d) \leq 3(1 - \alpha_{d-1}^3) + \tau_{d-1}(1 - \lambda_d)$; вспоминая о (2.13)

и (2.14), заключаем, что $p_1(x_{l_2}, g_d) < p_1(x_{l_2}, g_{d+1})$. Следовательно, на $(l_2 + 1)$ -м шаге из x_{l_2} вычитался вектор, отличный от g_d , $l_2 = n$ и $g_{n+1} \neq g_d$. Тогда для $d' = d(n+1)$ условие (2.17) выполняется автоматически, а выполнение условия (2.18) следует из оценки $\|s_{d'-1}(x_{n+1})\|_X \leq \|s_{d'-1}(x_n)\|_X$, которая вытекает из неравенства $\|x_{n+1}\|_X \leq \|x_n\|_X$ и определения нормы $\|\cdot\|_X$. Это завершает разбор второго случая.

Как уже отмечалось выше, $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что и завершает построение примера.

3. Доказательство теоремы 1.2. Для доказательства теоремы нам потребуется ряд лемм. Начнем с элементарного числового факта. Для произвольного $q \geq 1$, $0 < c < 1$ и для всех x, y , $c \leq x \leq y \leq 1$, выполняется неравенство

$$c_1(y - x) \leq y^q - x^q \leq c_2(y - x), \quad (3.1)$$

где

$$c_1 = \frac{d}{dt} t^q(c) = qc^{q-1}, \quad c_2 = \frac{d}{dt} t^q(1) = q.$$

Обозначим $x_m = f_m^{RGA}$ и $g_{m+1} = g^{RGA}(x_m)$.

ЛЕММА 3.1. *Если из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к $\hat{x}$, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\hat{x} = 0$, то в силу того, что норма x_n убывает, вся последовательность сходится к 0. Пусть $\hat{x} \neq 0$. В силу полноты $\mathcal{D}$ и гладкости X существует (см. [4], [5]) $g \in \mathcal{D}$ такой, что $\lambda(\hat{x}, g) \neq 0$, и, следовательно,

$$\sup_{g \in \mathcal{D}} \frac{p_q(\hat{x}, g)}{\lambda(\hat{x}, g)} = C_1 > 0.$$

Нетрудно заметить, что найдутся $C_2 > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что для всех x , $\|x - \hat{x}\| < \gamma$, выполняется

$$\sup_{g \in \mathcal{D}} \frac{p_q(x, g)}{\lambda(x, g)} \geq C_2.$$

Так как для больших номеров k величина $p_q(x_{n_k}, g_{n_k+1})$ будет меньше любого наперед заданного числа и должно выполняться

$$\frac{p_q(x_{n_k}, g_{n_k+1})}{\lambda(x_{n_k}, g_{n_k+1})} \geq C_2 t, \quad (3.2)$$

для любого $\delta > 0$ найдется $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $k > k_0$ выполняется $\lambda(x_{n_k}, g_{n_k+1}) < \delta$.

Из равномерной гладкости пространства X вытекает, что для любого ε существует δ такое, что для всех x , $0.5\|\hat{x}\| < \|x\| < 1.5\|\hat{x}\|$, и y , $\|y\| < \delta$, справедливо неравенство

$$\|x + y\| + \|x - y\| \leq 2\|x\| + \varepsilon\|y\|. \quad (3.3)$$

Выберем $0 < \varepsilon < c_2^{-1} C_2 t$, по нему определим δ , по которому определим k_0 . Пусть $k > k_0$. Запишем (3.3) для $x = z(x_{n_k}, g_{n_k+1})$ и $y = \lambda(x_{n_k}, g_{n_k+1})g_{n_k+1}$:

$$\|x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - 2\lambda(x_{n_k}, g_{n_k+1})g_{n_k+1}\| \leq 2\|z(x_{n_k}, g_{n_k+1})\| + \varepsilon\|\lambda(x_{n_k}, g_{n_k+1})g_{n_k+1}\|.$$

В силу того, что

$$\|z(x_{n_k}, g_{n_k+1})\| = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \|x_{n_k} - \alpha g_{n_k+1}\|,$$

имеем

$$p_1(x_{n_k}, g_{n_k+1}) = \|x_{n_k}\| - \|z(x_{n_k}, g_{n_k+1})\| \leq \varepsilon|\lambda(x_{n_k}, g_{n_k+1})|.$$

Из неравенства (3.1) следует, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| > 0,$$

то

$$c_2^{-1} p_q(x_{n_k}, g_{n_k+1}) \leq p_1(x_{n_k}, g_{n_k+1}) \leq \varepsilon\|\lambda(x_{n_k}, g_{n_k+1})\|,$$

что противоречит оценке (3.2).

ЛЕММА 3.2. *Для равномерно выпуклого банахова пространства X справедливо следующее утверждение: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, y , удовлетворяющих условиям $\|x\| = 1$, $1 \leq \|y\| \leq 1 + \delta$, $F_x(y) > 1 - \delta$ ($F_x(\cdot)$ – опорный функционал к единичной сфере пространства X в точке x), справедливо $\|x - y\| \leq \varepsilon$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равномерной выпуклости пространства X следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $0 < \delta_1 < 1$ такое, что для всех $x, y_1 \in X$, $\|x\| = \|y_1\| = 1$, выполнена импликация

$$1 - \left\| \frac{x + y_1}{2} \right\| < \delta \implies \|x - y_1\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $\delta = \min(\varepsilon/2, \delta_1, 1/2) > 0$. Пусть $y \in X$ удовлетворяет условиям леммы. Рассмотрим $y_1 = y/\|y\|$. Ясно, что $F_x(y_1) \geq (1 - \delta)/(1 + \delta) > 1 - 2\delta$. Нетрудно видеть, что

$$\left\| \frac{x + y_1}{2} \right\| \geq F_x\left(\frac{x + y_1}{2}\right) > 1 - \delta.$$

Следовательно, $\|x - y_1\| < \varepsilon/2$. В результате получаем следующую оценку:

$$\|x - y\| \leq \|x - y_1\| + \|y_1 - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ЛЕММА 3.3. *Справедливо одно из следующих утверждений: или*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0,$$

или

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{p_q(x_{k-1}, g_k)}{\lambda(x_{k-1}, g_k)} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_q(x_{k-1}, g_k) < \infty.$$

Если

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{p_q(x_{k-1}, g_k)}{\lambda(x_{k-1}, g_k)} \neq 0,$$

то отсюда следовала бы сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(x_{k-1}, g_k)$, откуда по неравенству треугольника и признаку Коши вытекала бы сходимость последовательности $\{x_k\}$ и, следовательно, по лемме 3.1

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0.$$

Перейдем к доказательству теоремы. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ не сходится. Из леммы 3.3 следует, что существует возрастающая последовательность $\{m_k\}$ натуральных чисел, обладающая следующим свойством:

$$\frac{p_q(x_{m_k-1}, g_{m_k})}{\lambda(x_{m_k-1}, g_{m_k})} \leq \frac{p_q(x_{l-1}, g_l)}{\lambda(x_{l-1}, g_l)}$$

для всех $l < m_k$. Тогда в силу (1.5) определения R -гриди-алгоритма и предположения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| > 0$$

для $i < j$ будут справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} F_{x_{m_j}}(x_{m_j} - x_{m_i}) &= \sum_{k=m_i+1}^{m_j} F_{x_{m_j}}(\lambda(x_{k-1}, g_k)g_k) \\ &= \sum_{k=m_i+1}^{m_j} \frac{\lambda(x_{k-1}, g_k)}{\lambda(x_{m_j-1}, g_k)} \lambda(x_{m_j-1}, g_k) F_{x_{m_j}}(g_k) \\ &= \sum_{k=m_i+1}^{m_j} \frac{\lambda(x_{k-1}, g_k)}{\lambda(x_{m_j-1}, g_k)} \|x_{m_j-1}\| \lambda\left(\frac{x_{m_j-1}}{\|x_{m_j-1}\|}, g_k\right) F_{x_{m_j}}(g_k) \\ &\leq \sum_{k=m_i+1}^{m_j} \frac{\lambda(x_{k-1}, g_k)}{\lambda(x_{m_j-1}, g_k)} \|x_{m_j-1}\| C_3 p_q\left(\frac{x_{m_j-1}}{\|x_{m_j-1}\|}, g_k\right) \\ &\leq \sum_{k=m_i+1}^{m_j} C_4 \frac{p_q(x_{m_j-1}, g_k)}{\lambda(x_{m_j-1}, g_k)} \lambda(x_{k-1}, g_k) \\ &\leq \sum_{k=m_i+1}^{m_j} C_4 \sup_{g \in \mathcal{D}} \frac{p_q(x_{m_j-1}, g)}{\lambda(x_{m_j-1}, g)} \lambda(x_{k-1}, g_k) \\ &\leq \sum_{k=m_i+1}^{m_j} \frac{C_4}{t} \frac{p_q(x_{m_j-1}, g_{m_j})}{\lambda(x_{m_j-1}, g_{m_j})} \left(\frac{p_q(x_{k-1}, g_k)}{\lambda(x_{k-1}, g_k)}\right)^{-1} p_q(x_{k-1}, g_k) \\ &\leq C_5 \sum_{k=m_i+1}^{m_j} p_q(x_{k-1}, g_k) = C_5 (\|x_{m_i}\|^q - \|x_{m_j}\|^q). \end{aligned}$$

В силу того, что для больших i разность $\|x_{m_i}\|^q - \|x_{m_j}\|^q$ сколь угодно мала, используя лемму 3.2 для векторов $x_{m_j}/\|x_{m_j}\|$ и $x_{m_i}/\|x_{m_j}\|$, получаем, что последовательность x_{m_k} фундаментальна. Следовательно, $\{x_{m_k}\}$ сходится и по лемме 3.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

4. Доказательство следствия 1.1. Пусть $1 < p < \infty$. Известно (см. [8, гл. 3]), что пространство ℓ^p является равномерно гладким и равномерно выпуклым. Поэтому для доказательства следствия 1.1 достаточно проверить, что существует $C \in \mathbb{R}$ такое, что для всех x , $\|x\| = 1$, и $g \in D$ выполнено

$$Cp_q(x, g) \geq 1 - F_x(z(x, g)) = \lambda(x, g)F_x(g). \quad (4.1)$$

Заметим, что в силу неравенства (3.1) достаточно проверить (4.1) для $q = 1$. Будем использовать следующую лемму.

ЛЕММА 4.1. *Рассмотрим $x, g \in \ell^p$, $\|x\| = 1$, $g \in \mathcal{D} \subset \ell^p$. Пусть $w \in \ell^p$ обладает следующими свойствами: w, x, g лежат в одном двумерном пространстве, w — касательный к единичной сфере пространства X в точке x ($F_x(w) = 0$) и вектор $z(x, g) - w$ коллинеарен x . Обозначим*

$$p_1(x, g) = 1 - \|z(x, g)\| = \beta, \quad 1 - F_x(z(x, g)) = \gamma.$$

Тогда для всех $0 < \tau < 1$ выполняется неравенство

$$(1 - \beta)(1 + \tau\gamma) \leq \|x + \tau w\| \leq (1 - \beta) \left(1 + \tau \left(\gamma + \frac{\beta}{1 - \beta} \left(\frac{1}{\tau} - (1 - \gamma) \right) \right) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим плоскость, содержащую точку $O = 0$ и точки x и g . Обозначим точку x через A , точку $z(x, g)$ через B , $x + w$ через C , $x + \tau w$ через K и точку $(1 - \beta)x$ через L (см. рис. 1).

Рис. 1

Ясно, что $\overrightarrow{BC} = \gamma \overrightarrow{OA}$, интервал (AB) лежит вне шара с центром в 0 и радиусом $1 - \beta$, а интервал (LB) лежит внутри него. Тогда, обозначая через F и G точки пересечения отрезка OK с AB и LB соответственно, получаем оценку

$$(1 - \beta) \frac{OK}{OF} \leq \|\overrightarrow{OK}\| \leq (1 - \beta) \frac{OK}{OG}. \quad (4.2)$$

Найдем OK/OF и OK/OG . Для этого построим $\triangle OCA$ до параллелограмма $ODCA$ и обозначим через E точку пересечения прямых OB и AC . Заметим, что $\triangle BEC$ подобен $\triangle BOD$ с коэффициентом $\gamma/(1 - \gamma)$. Следовательно,

$$CE = \frac{\gamma}{1 - \gamma} OD, \quad AE = \frac{1}{1 - \gamma} AC.$$

Вычислим требуемые отношения, используя метод центра масс. Поместим в точку O массу γ , в точку E массу $1 - \gamma$, в A массу $1/\tau - (1 - \gamma)$. Пусть M – центр масс всей системы. Центр масс точек O и E – точка B ; следовательно, $M \in AB$. Центр масс точек A и E – точка K , поэтому $M \in OK$. Следовательно, $M = OK \cap AB = F$. Группируя имеем, что масса точки O равна γ , а масса K есть $1/\tau$ и $FK/OF = \gamma\tau$, а

$$\frac{OK}{OF} = 1 + \tau\gamma. \quad (4.3)$$

Для вычисления отношения OK/OG будем действовать аналогичным образом. Поместим в точку O массу $\gamma + \beta(1/\tau - (1 - \gamma))/(1 - \beta)$, в точку E массу $1 - \gamma$ и в точку A массу $1/\tau - (1 - \gamma)$. Пусть точка M является центром масс всей системы. Центр масс точек A и E – точка K , поэтому $M \in OK$. Разобьем массу точки O на две: γ и $\beta(1/\tau - (1 - \gamma))/(1 - \beta)$. Центр масс точки O (с массой γ) и точки E есть точка B , центр масс O (с массой $\beta/((1/\tau - (1 - \gamma))(1 - \beta))$) и точки A есть точка L . Следовательно, $M \in LB$, $M = LB \cap OK = G$ и

$$\frac{GK}{OG} = \tau \left(\gamma + \frac{\beta}{1 - \beta} \left(\frac{1}{\tau} - (1 - \gamma) \right) \right),$$

откуда

$$\frac{OK}{OG} = 1 + \tau \left(\gamma + \frac{\beta}{1 - \beta} \left(\frac{1}{\tau} - (1 - \gamma) \right) \right). \quad (4.4)$$

Подставляя (4.3) и (4.4) в (4.2), получаем требуемое неравенство.

Пусть $x, w \in \ell^p$, $\|x\| = 1$, $F_x(w) = 0$, $x = \{x^n\}_{n=1}^\infty$, $w = \{w^n\}_{n=1}^\infty$. Обозначим

$$N(t) = \|x + tw\|_p^p.$$

Заметим, что для произвольного $d > 0$ ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sgn}(x^k + tw^k) w^k |x^k + tw^k|^{p-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (w^k)^2 |x^k + tw^k|^{p-2}$$

сходятся равномерно на отрезке $[-d, d]$, так как они мажорируются соответственно рядами

$$\sum_{k=1}^{\infty} |w^k| (|x^k| + d|w^k|)^{p-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (|w^k|)^2 (|x^k| + d|w^k|)^{p-2},$$

которые в силу неравенства Гёльдера абсолютно сходятся при $p \geq 2$. Поэтому $N(t) \in C^2(-\infty, \infty)$ и

$$N''(t) = p(p-1) \sum_{k=1}^{\infty} (w^k)^2 |x^k + tw^k|^{p-2}. \quad (4.5)$$

Так как w – вектор касательный к единичной сфере ℓ^p в точке x ($F_x(w) = 0$), то

$$N'(0) = 0.$$

Будем использовать следующую простую лемму.

ЛЕММА 4.2. *Для любого фиксированного $p > 2$ найдется число $K_p > 1$, обладающее свойством: для всех $c, d, t_0 \in \mathbb{R}$ и $\Delta t > 0$ выполняется неравенство*

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} |c + td|^{p-2} dt \leq \int_{t_0+\Delta t}^{t_0+\Delta t(K_p+1)} |c + td|^{p-2} dt. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что достаточно проверить (4.6) для $c = 0$ и $d = 1$ (к этому случаю можно перейти, используя линейную замену $t_1 = c + td$). Пусть число α , $0 < \alpha < 1/3$, удовлетворяет

$$2(1 - 3\alpha)^{p-2} = 1. \quad (4.7)$$

Положим $K_p = (2 - \alpha)/\alpha > 2$. Если $t_0 + \Delta t \geq 0$, то

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} |t|^{p-2} dt \leq \int_{t_0+\Delta t}^{t_0+2\Delta t} |t|^{p-2} dt \leq \int_{t_0+\Delta t}^{t_0+\Delta t(K_p+1)} |t|^{p-2} dt.$$

Если $t_0 + \Delta t < 0$ и $|\Delta t|/|t_0| \geq \alpha$, то, так как $[|t_0| - \Delta t, |t_0|] \subset [t_0 + \Delta t, t_0 + ((2 - \alpha)/\alpha + 1)\Delta t]$, имеем

$$\int_{t_0+\Delta t}^{t_0+\Delta t(K_p+1)} |t|^{p-2} dt \geq \int_{|t_0|-\Delta t}^{|t_0|} |t|^{p-2} dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} |t|^{p-2} dt.$$

Если $t_0 + \Delta t < 0$ и $|\Delta t|/|t_0| < \alpha < 1/3$, то $t_0 + 3\Delta t < 0$ и в силу (4.7) получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_0+\Delta t}^{t_0+\Delta t(K_p+1)} |t|^{p-2} dt &\geq \int_{t_0+\Delta t}^{t_0+\Delta t(2+1)} |t|^{p-2} dt \geq 2\Delta t|t_0| + 3\Delta t|t_0|^{p-2} \\ &= |t_0|^{p-2}\Delta t 2\left(1 - 3\frac{\Delta t}{|t_0|}\right)^{p-2} \geq |t_0|^{p-2}\Delta t \geq \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} |t|^{p-2} dt. \end{aligned}$$

По теореме Лагранжа существуют $\xi_1 \in [0.5/(2 + 2K_p), 1/(2 + 2K_p)]$ и $\xi_2 \in [1/2, 1]$ такие, что

$$N'(\xi_1) = \frac{N(1/(2 + 2K_p)) - N(0.5/(2 + 2K_p))}{0.5/(2 + 2K_p)}, \quad N'(\xi_2) = \frac{N(1) - N(1/2)}{1/2}.$$

Предположим, что следствие 1.1 неверно. Тогда для любого $C_0 > 0$ существует $\|x\|_p = 1$ и $g \in \mathcal{D}$, для которых (4.1) не выполняется. В силу того, что $\lambda(x, g)F_x(g) \leq 2$ и пространство ℓ^p равномерно выпукло, для любых $C_0, \delta_0 > 0$ найдутся $\|x\|_p = 1$ и $g \in \mathcal{D}$, для которых (4.1) не выполняется,

$$\beta := p_1(x, g) \leq \frac{2}{C_0}, \quad \gamma := |\lambda(x, g)|F_x(g) \leq |\lambda(x, g)| < \delta_0.$$

Поэтому будем считать, что $\beta \leq 1/2$. Применяя лемму 4.1, получаем следующие оценки:

$$N'(\xi_1) \geq \frac{(1 + \gamma/(2 + 2K_p))^p - (1 + 0.5(\gamma + (2\beta)(4 + 4K_p))/(2 + 2K_p))^p}{0.5/(2 + 2K_p)}(1 - \beta)^p,$$

$$N'(\xi_2) \leq \frac{(1 + 1(\gamma + 2\beta))^p - (1 + 0.5\gamma)^p}{0.5}(1 - \beta)^p.$$

Если выбрать C_0 достаточно большим, а δ_0 достаточно малым, то с учетом неравенства $\gamma > C_0\beta$ получим, что существуют $\|x\|_p = 1$ и $g \in \mathcal{D}$ такие, что

$$N'(\xi_2) < 2N'(\xi_1). \quad (4.8)$$

Имеем

$$N'(\xi_1) = N'(\xi_1) - N'(0) = \int_0^{\xi_1} N''(t) dt, \quad N'(\xi_2) - N'(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} N''(t) dt.$$

Ясно, что $(\xi_2 - \xi_1)/(\xi_1 - 0) > K_p$. Поэтому в силу (4.5) и леммы 4.2 имеем

$$N'(\xi_2) - N'(\xi_1) > N'(\xi_1) - N'(0) = N'(\xi_1).$$

Противоречие с (4.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Аналогичным образом можно доказать сходимость R -гриди-алгоритма в пространстве $L^p[0, 1]$ для $p \geq 2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] DeVore R. A., Temlyakov V. N. Some remarks on Greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 1996. V. 5. P. 173–187.
- [2] Temlyakov V. N. Nonlinear Methods of Approximation. IMI Preprint Series at <http://www.math.sc.edu/~imip>. V. 9, 2001.
- [3] Jones L. K. On a conjecture of Huber concerning the projection pursuit regression // Ann. Statist. 1987. V. 15. P. 880–882.
- [4] Donahue M., Gurvits L., Darken C., Sontag E. Rate of convex approximation in non-Hilbert spaces // Constr. Approx. 1997. V. 13. P. 187–220.
- [5] Dubinin V. V. Greedy Algorithms and Applications. Ph. D. Thesis. Univ. South Carolina, 1997.
- [6] Temlyakov V. N. Greedy algorithms in Banach spaces // Adv. Comput. Math. 2001. V. 14. P. 277–292.
- [7] Dilworth S. J., Kutzarova D., Temlyakov V. N. Convergence of Some Greedy Algorithms in Banach Spaces. IMI Preprint Series at <http://www.math.sc.edu/~imip>. V. 14, 2001.
- [8] Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Избранные главы. Киев: Вища школа, 1980.