Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Мирошин, Об одном классе многократных интегралов, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 390–401

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm196>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:43:44

УДК 518.2

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МНОГОКРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Р. Н. Мирошин

В аналитической форме представлен многократный интеграл, встречающийся в теории гауссовских марковских процессов.

Библиография: 12 названий.

Известно мало нетривиальных многократных интегралов, выражающихся простыми аналитическими формулами. В настоящем сообщении мы увеличиваем их число, вычислив $(2m - 4)$ -кратный интеграл, зависящий от $m + 3$ параметров, при некоторых значениях которых встретившийся нам в процессе решения задач, связанных с нулями гауссовских стационарных функций [1], [2]. Здесь m – целое число, $m > 2$. Завершив доказательство основного результата (теоремы), в следствиях мы конкретизируем его для определенных значений параметров, допускающих еще большее его упрощение. В заключение приводятся примеры из теории случайных функций, показывающие, что рассматриваемые интегралы естественным путем возникают в приложениях.

Рассмотрим интеграл

$$I_m(t) \equiv I_m(x_m | t; \mu; b_2, b_3, \dots, b_m | x_1) = \int_{\Omega} d_m(t_1, \dots, t_m) dt_2 \cdots dt_{m-1}, \quad (1)$$

$$d_m(t_1, \dots, t_m) = \int_V \prod_{j=2}^m f_{t_j - t_{j-1}}^{(\mu)}(x_j | b_j | x_{j-1}) dx_2 \cdots dx_{m-1}, \quad (2)$$

$$f_{\tau}^{(\mu)}(x | b | y) = x^{\mu-1} y^{\mu-2} \tau^{-\mu} \exp \left\{ -\frac{A_b(x, y)}{2\tau} \right\}, \quad (3)$$

$$A_b(x, y) = x^2 + 2bxy + y^2, \quad (4)$$

в котором области интегрирования Ω и V суть

$$\Omega = \{0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_m = t\}, \quad V = \{0 \leq x_2 < \infty, \dots, 0 \leq x_{m-1} < \infty\}, \quad (5)$$

а параметры μ и b_j удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re} \mu > 1, \quad |b_j| \leq 1, \quad j = 2, \dots, m. \quad (6)$$

Нам встречался этот интеграл в ситуациях, когда $b_2, \dots, b_m$ и μ были фиксированы, а параметр t был переменным и играл роль времени (см. ниже примеры).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ, грант № Е00-4-182.

Условие (6) на b_j обеспечивает положительную определенность квадратичных форм (4) $A_{b_j}(x, y)$, которая вместе с условием $\operatorname{Re} \mu > 1$ гарантирует сходимость интеграла (1)–(5).

Отметим, что к (1)–(5) сводятся интегралы от той же подынтегральной функции, но в которых область интегрирования V заменяется областью

$$V(s_2, \dots, s_{m-1}) = \{0 \leq s_2 x_2 < \infty, \dots, 0 \leq s_{m-1} x_{m-1} < \infty\}, \quad (7)$$

где s_j либо $+1$, либо -1 . Действительно, замена переменных x_j в (2)–(5), (7) на $s_j x_j$, $j = 2, \dots, m-1$, приводит к интегралу (1)–(5), умноженному на $\prod_{j=2}^{m-1} s_j^{2\mu-2}$, в котором b_j заменяется на $s_{j-1} s_j b_j$, $j = 2, \dots, m-1$ (при этом полагаем $s_1 = s_m = 1$).

Очевидно также, что для целых μ к сумме интегралов вида (1)–(5) преобразуется интеграл, в котором вместо V интегрирование производится по области

$$V(s_{j_2}, \dots, s_{j_n}) = \{-\infty \leq x_{l_q} < \infty, q = 1, \dots, k; 0 \leq x_{j_p} < \infty, p = 1, \dots, n\},$$

где $j_1, \dots, j_n, l_1, \dots, l_k$ – любая перестановка чисел $2, 3, \dots, m-1$, так что $k+n = m-2$.

В случае $b_j = b$, $j = 2, \dots, m$, интеграл (1)–(5) – $m-2$ раза итерированное ядро интегрального уравнения

$$\varphi(t, x) - \lambda \int_0^t d\tau \int_0^\infty f_{t-\tau}^{(\mu)}(x|b|y) \varphi(\tau, y) = \psi(t, x)$$

смешанного, Вольтерра–Фредгольмовского, типа.

ТЕОРЕМА. При выполнении условий (6) $(2m-4)$ -кратный интеграл (1)–(5) сворачивается к однократному интегралу вида

$$I_m(t) = c_m^{(\mu)}(tx_1)^{-1} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_m^2}{2t}\right) \int_0^\infty K_{i\gamma}\left(\frac{x_1 x_m}{t}\right) \gamma \operatorname{sh} \pi \gamma \left(\prod_{j=2}^m \psi_\gamma^{(\mu)}(b_j)\right) d\gamma, \quad (8)$$

в котором $c_m^{(\mu)} = [2\Gamma(\mu-1)]^{m-1}/\pi^2$,

$$\psi_\gamma^{(\mu)}(z) = \int_0^\infty (z + \operatorname{ch} t)^{1-\mu} \cos \gamma t dt, \quad (9)$$

а $K_\nu(x)$ – модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда) [3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изменим в (1), (2) порядок интегрирования и запишем $I_m(t)$ в виде

$$I_m(t) = x_1^{\mu-2} x_m^{\mu-1} \int_V Y_m(t; A_2, \dots, A_m) (x_2 \cdots x_{m-1})^{2\mu-3} dx_2 \cdots dx_{m-1},$$

$$Y_m(t; A_2, \dots, A_m) = \int_\Omega \prod_{j=2}^m (t_j - t_{j-1})^{-\mu} \exp\left\{-\frac{A_j}{2(t_j - t_{j-1})}\right\} dt_2 \cdots dt_{m-1},$$

где $Y_2(t; A_j) = t^{-\mu} \exp(-A_j/2t)$, $A_j \equiv A_{b_j}(x_{j-1}, x_j)$.

Зависимость Y_m от μ не указываем, так как она в дальнейших выкладках явно не участвует (кроме равенства (13) ниже, где мы о ней вспоминаем).

Вводя операцию свертки функций $f(t)$ и $g(t)$ по формуле

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x) * g(t-x) dx,$$

замечаем, что $Y_m \equiv Y_m(t; A_2, \dots, A_m) = Y_{m-1}(t; A_2, \dots, A_{m-1}) * Y_2(t; A_m)$. Поэтому преобразование Лапласа от Y_m , применяя индукцию по m , вычисляем легко:

$$\hat{Y}_m(\lambda; A_2, \dots, A_m) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Y_m(t; A_2, \dots, A_m) dt = \prod_{j=2}^m \hat{Y}_2(\lambda; A_j),$$

где (см. [4, т. 1, № 29, с. 135])

$$\hat{Y}_2(\lambda; x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{-\mu} \exp\left\{-\frac{x}{2t}\right\} dt = 2 \left(\frac{x}{2\lambda}\right)^{(1-\mu)/2} K_{1-\mu}(\sqrt{2\lambda x}).$$

Обозначим

$$\pi_1(x_j | x_{j-1}) = x_j^{\mu-1} \hat{Y}_2(\lambda; A_j) x_{j-1}^{\mu-2}, \quad (10)$$

$$\pi_2(x_3 | x_1) = \int_0^\infty \pi_1(x_3 | x_2) \pi_1(x_2 | x_1) dx_2 \quad (11)$$

и вообще

$$\pi_{m-1}(x_m | x_1) = \int_0^\infty \pi_{m-2}(x_m | x_2) \pi_1(x_2 | x_1) dx_2. \quad (12)$$

Чтобы не загромождать формулы, мы не указываем в (10)–(12) зависимость $\pi_j(x_{j+1} | x_j)$ от λ , но вспомним об этом, когда придет время обращать преобразование Лапласа. Точно так же помним, что (10)–(12) зависят от μ .

В этих обозначениях преобразование Лапласа от $I_m(t)$ можем представить в виде

$$\hat{I}_m(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} I_m(t) dt = \pi_{m-1}(x_m | x_1). \quad (13)$$

Свернем (12) к однократному интегралу. Сначала преобразуем (10) к такому виду, который позволил бы применить к (11), (12) преобразование Конторовича–Лебедева и был бы частным случаем (при $m = 2$) соответствующей формулы для (12). С этой целью умножим (10) при $j = 2$ на $K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda} x_1)$, где i – мнимая единица, и проинтегрируем по x_1 в пределах $[0, \infty)$. Используя формулу (34) из [4, т. 2, с. 271] и соотношение $K_{-\nu}(x) = K_\nu(x)$, после несложных преобразований получаем следующее интегральное уравнение относительно $\pi_1(x_2 | x_1)$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda} x_1) \pi_1(x_2 | x_1) dx_1 \\ &= \sqrt{2\pi} (1 - b_2^2)^{3/4 - \mu/2} \Gamma(\mu - 1 + i\gamma) \Gamma(\mu - 1 - i\gamma) P_{i\gamma-1/2}^{3/2-\mu}(b_2) K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda} x_2), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, а $P_\nu^{-\omega}(x)$ – присоединенная функция Лежандра 1-го рода. Так как [3, № 8.713.3, с. 1015] (в [3] в этой формуле опечатка, исправленная нами в (15))

$$\Gamma(\mu - 1 + i\gamma) \Gamma(\mu - 1 - i\gamma) P_{i\gamma-1/2}^{3/2-\mu}(z) = \sqrt{2\pi} \Gamma(\mu - 1) (1 - z^2)^{3/4 - \mu/2} \psi_\gamma^{(\mu)}(z), \quad (15)$$

где $\psi_\gamma^{(\mu)}(z)$ определяется формулой (9), то уравнение (14) можем представить в виде

$$\int_0^\infty K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda}x_1)\pi_1(x_2|x_1)dx_1 = 2\Gamma(\mu-1)\psi_\gamma^{(\mu)}(b_2)K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda}x_2). \quad (16)$$

Условие $\operatorname{Re} \mu > 1$ обеспечивает сходимость интеграла $\psi_\gamma^{(\mu)}(z)$.

Для решения уравнения (16) применим пару взаимно-обратных преобразований Конторовича–Лебедева [4, т. 2]:

$$g(y) = \int_0^\infty f(\gamma)K_{i\gamma}(y)d\gamma, \quad f(\gamma) = \frac{2\gamma}{\pi^2} \operatorname{sh} \pi\gamma \int_0^\infty g(y)K_{i\gamma}(y) \frac{dy}{y}. \quad (17)$$

Полагая в (16)

$$y = \sqrt{2\lambda}x_1, \quad g(y) = x_1\pi_1(x_2|x_1), \\ \pi^2 f(\gamma) = 4\gamma\Gamma(\mu-1) \operatorname{sh} \pi\gamma \cdot \psi_\gamma^{(\mu)}(b_2)K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda}x_2),$$

находим в силу (17) решение уравнения (16):

$$\pi_1(x_2|x_1) = \frac{4\Gamma(\mu-1)}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda}x_1)}{x_1} \psi_\gamma^{(\mu)}(b_2)K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda}x_2) \operatorname{sh} \pi\gamma \cdot \gamma d\gamma. \quad (18)$$

Аналогичным образом получаем

$$\pi_1(x_j|x_{j-1}) = \frac{4\Gamma(\mu-1)}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda}x_{j-1})}{x_{j-1}} \psi_\gamma^{(\mu)}(b_j)K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda}x_j) \operatorname{sh} \pi\gamma \cdot \gamma d\gamma. \quad (19)$$

Подставим теперь (18) и (19) (при $j = 3$) в (11) и воспользуемся соотношением, лежащим в основе формул (17):

$$2\nu \operatorname{sh} \pi\nu \int_0^\infty K_{i\nu}(y)K_{i\omega}(y)y^{-1}dy = \pi^2\delta(\nu-\omega),$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция. Его можно получить, например, асимптотическим анализом при $\rho \uparrow 0$ интеграла Вебера–Шафхейтлина [5]

$$\int_0^\infty x^{-\rho}K_{i\nu}(x)K_{i\omega}(x)dx.$$

В результате подстановки будем иметь

$$\pi_2(x_3|x_1) = \frac{2}{\pi^2}[2\Gamma(\mu-1)]^{m-1} \\ \times \int_0^\infty \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda}x_1)}{x_1} K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda}x_3) \psi_\gamma^{(\mu)}(b_2) \psi_\gamma^{(\mu)}(b_3) \operatorname{sh} \pi\gamma \cdot \gamma d\gamma,$$

т.е. формулу подобного (18), (19) вида.

По индукции заключаем, используя (13) и (19), что вообще при $m \geq 2$

$$\begin{aligned} \pi_{m-1}(x_m|x_1) \\ = \frac{2^m}{\pi^2} \Gamma^{m-1}(\mu-1) \int_0^\infty \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda}x_1)}{x_1} K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda}x_m) \left[\prod_{j=2}^m \psi_\gamma^{(\mu)}(b_j) \right] \operatorname{sh} \pi\gamma \cdot \gamma d\gamma. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, поставленная цель достигнута: функции $\pi_{j-1}(x_j|x_{j-1})$ имеют одинаковую структуру (20) в виде однократного интеграла при всех $j = 2, \dots, m$.

Осталось только применить к $\pi_{m-1}(x_m|x_1)$ обратное преобразование Лапласа, чтобы в силу (13) найти значение интеграла $I_m(t)$. Обратное преобразование Лапласа от $K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda}x_1)K_{i\gamma}(\sqrt{2\lambda}x_m)$ есть в справочнике [4, т. 1, формула (64), с. 252]. Подставив его в (20), сразу получим $I_m(t)$ в виде (8).

Рассмотрим теперь, как вычислить $\psi_\gamma^{(\mu)}(z)$. Обозначим

$$K_{\alpha,\gamma}^{(\rho)}(z) = \int_0^\infty (\operatorname{ch} \alpha x + z)^{-\rho} \cos \gamma x dx, \quad \operatorname{Re} \rho > 0. \quad (21)$$

Очевидно, $\psi_\gamma^{(\mu)}(z) = K_{1,\gamma}^{(\mu-1)}(z)$. Для функции (21) справедливы соотношения

$$\rho K_{\alpha,\gamma}^{(\rho+1)}(z) = -\frac{\partial}{\partial z} K_{\alpha,\gamma}^{(\rho)}(z), \quad (22)$$

$$(\alpha^2 \rho^2 + \gamma^2) K_{\alpha,\gamma}^{(\rho)}(z) = \alpha^2 \rho [(2\rho + 1) K_{\alpha,\gamma}^{(\rho+1)}(z) + (\rho + 1)(1 - z^2) K_{\alpha,\gamma}^{(\rho+2)}(z)], \quad (23)$$

первое из которых получается дифференцированием интеграла (21), а второе – повторным интегрированием (21) по частям. При целых ρ наличие формул (22), (23) позволяет свести вычисление $K_{\alpha,\gamma}^{(\rho)}(z)$ (а тем самым и $\psi_\gamma^{(\mu)}(z)$) к вычислению интеграла $K_{\alpha,\gamma}^{(1)}(z)$, значение которого известно [3, № 3.983, с. 519]:

$$K_{\alpha,\gamma}^{(1)}(z) = \frac{\pi}{\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sh}[(\gamma/\alpha) \arccos z]}{\sqrt{1-z^2} \operatorname{sh}(\pi\gamma/\alpha)}, \quad |z| < 1.$$

Отсюда

$$\psi_\gamma^{(2)}(z) = \frac{\pi}{\sin \beta} \cdot \frac{\operatorname{sh} \beta \gamma}{\operatorname{sh} \pi \gamma}, \quad \cos \beta = z.$$

Найдем значение интеграла (1)–(5) при некоторых конкретных величинах параметров, используя теорему.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $\mu = 2$

$$I_m(t) = A_m t^{-1} x_m \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_m^2}{2t}\right) \int_0^\infty K_{i\gamma}\left(\frac{x_1 x_m}{t}\right) \left[\prod_{j=2}^m \left(\frac{\operatorname{sh} \beta_j \gamma}{\operatorname{sh} \pi \gamma}\right) \right] \gamma \operatorname{sh} \pi \gamma d\gamma,$$

где $A_m = 2^{m-1}/\pi^2$, $\cos \beta_j = b_j$, $j = 2, \dots, m$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеет место формула*

$$\begin{aligned} K_m^{(\mu)} &\equiv \int_{\Omega_1} dy_2 \cdots dy_{m-1} (y_2 - y_1)^{\mu-2} \prod_{j=3}^m (y_j - y_{j-1})^{\mu-2} (y_j - y_{j-2})^{1-\mu} \\ &= \frac{2^{2-\mu}}{\pi^2} \int_0^\infty B^{m-1} \left(\frac{\mu-1+i\gamma}{2}, \frac{\mu-1-i\gamma}{2} \right) J^{(\mu)}(\gamma) \gamma \operatorname{sh} \pi \gamma d\gamma, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\operatorname{Re} \mu > 1$, $\Omega_1 = \{0 = y_1 \leq y_2 < \cdots < y_m = 1\}$, $B(x, y)$ – бета-функция,

$$J^{(\mu)}(\gamma) = \int_0^\infty \psi_\gamma^{(\mu)}(\operatorname{ch} x) dx.$$

Эта формула выводится из теоремы при $b_j = 0$, $j = 2, \dots, m$. Действительно, рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{\mu-1} x_m^{\mu-2} I_m(x_m | t, \mu; 0, \dots, 0 | x_1) dx_1 dx_m \\ &= \int_\Omega \frac{dt_2 \cdots dt_{m-1}}{\prod_{j=2}^m (t_j - t_{j-1})^\mu} \\ &\quad \times \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty (x_1 \cdots x_m)^{2\mu-3} \prod_{j=2}^m \exp\left(-\frac{x_{j-1}^2 + x_j^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right) dx_1 \cdots dx_m. \end{aligned} \quad (25)$$

Внутренний интеграл по $dx_1 \cdots dx_m$ в (25) легко вычисляется. Он равен

$$2^{m(\mu-2)} \Gamma^m(\mu-1) (t_2 - t_1)^{2\mu-2} \prod_{j=3}^m (t_j - t_{j-1})^{2\mu-2} (t_j - t_{j-2})^{1-\mu}.$$

Если теперь сделать в (25) замену переменных $t_j = t \cdot y_j$, $j = 2, \dots, m-1$, то область интегрирования Ω заменится на Ω_1 , а сам интеграл примет следующий вид:

$$J_1 = 2^{m(\mu-2)} \Gamma^m(\mu-1) t^{\mu-2} K_m^{(\mu)}. \quad (26)$$

С другой стороны, используя [4, т. 1, формула (5), с. 37]

$$\psi_\gamma^{(\mu)}(0) = 2^{\mu-3} B\left(\frac{\mu-1+i\gamma}{2}, \frac{\mu-1-i\gamma}{2}\right),$$

имеем из теоремы

$$\begin{aligned} &I_m(x_m | t, \mu; 0, \dots, 0 | x_1) \\ &= \pi^{-2} (tx_1)^{-1} \Gamma^{m-1}(\mu-1) 2^{(m-1)(\mu-2)} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_m^2}{2t}\right) \\ &\quad \times \int_0^\infty B^{m-1}\left(\frac{\mu-1+i\gamma}{2}, \frac{\mu-1-i\gamma}{2}\right) K_{i\gamma}\left(\frac{x_1 x_m}{t}\right) \gamma \operatorname{sh} \pi \gamma d\gamma. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (25), находим, что

$$J_1 = \frac{\Gamma^{m-1}(\mu-1) 2^{(m-1)(\mu-2)}}{\pi^2 t} \int_0^\infty B^{m-1}\left(\frac{\mu-1+i\gamma}{2}, \frac{\mu-1-i\gamma}{2}\right) J_2(t, \gamma) \gamma \operatorname{sh} \pi \gamma d\gamma, \quad (27)$$

где введено обозначение

$$J_2(t, \gamma) = \int_0^\infty \int_0^\infty (x_1 x_m)^{\mu-2} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_m^2}{2t}\right) K_{i\gamma}\left(\frac{x_1 x_m}{t}\right) dx_1 dx_m. \quad (28)$$

Заменой переменных $x_1 = \sqrt{t}u$, $x_m = \sqrt{t}v$ интеграл (28) приводится к виду $t^{\mu-1} \times J_3(\gamma)$, где

$$J_3(\gamma) = \int_0^\infty \int_0^\infty (uv)^{\mu-2} \exp\left(-\frac{u^2 + v^2}{2}\right) K_{i\gamma}(uv) du dv. \quad (29)$$

Используя в (29) равенство [3]

$$K_{i\gamma}(x) = \int_0^\infty \exp(-x \operatorname{ch} z) \cos \gamma z dz,$$

полагая $u = vy$ и затем взяв интеграл по y , имеем после несложных преобразований

$$J_3(\gamma) = \Gamma(\mu - 1) \int_0^\infty \psi_\gamma^{(\mu)}(\operatorname{ch} x) dx = \Gamma(\mu - 1) J^{(\mu)}(\gamma), \quad (30)$$

где функция $\psi_\gamma^{(\mu)}(z)$ определена равенством (9). Чтобы получить (24), осталось только сравнить (26) и (27)–(30).

СЛЕДСТВИЕ 3. При $\mu = 2$ получаем из (24) общее значение интеграла Лонге-Хиггинса [6]

$$K_m^{(2)} \equiv \int_{\Omega_1} \frac{dy_2 \cdots dy_{m-1}}{(y_3 - y_1)(y_4 - y_2) \cdots (y_m - y_{m-2})} = \frac{2^{m-2} \pi^{m-3} \Gamma^2((m-1)/2)}{\Gamma(m)}, \quad (31)$$

где, по-прежнему, $\Omega_1 = \{0 \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_m = 1\}$.

В самом деле, $\psi_\gamma^{(2)}(\operatorname{ch} x) = (\pi \sin \gamma x) / (\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} \pi \gamma)$ (см. [3]), так что [4, т. 1, с. 85]

$$J_3(\gamma) = \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi \gamma} \int_0^\infty \frac{\sin \gamma x}{\operatorname{sh} x} dx = \frac{\pi^2 \operatorname{th}(\pi \gamma / 2)}{2 \operatorname{sh} \pi \gamma}.$$

В то же время, $B(1/2 + i\gamma/2, 1/2 - i\gamma/2) = \pi / \operatorname{ch}(\pi \gamma / 2)$. Поэтому по формуле (24)

$$K_m^{(2)} = \frac{\pi^{m-1}}{2} \int_0^\infty \left(\operatorname{ch} \frac{\pi \gamma}{2} \right)^{-m} \operatorname{sh} \frac{\pi \gamma}{2} \gamma d\gamma. \quad (32)$$

Чтобы получить (31), достаточно теперь в (32) использовать интегрирование по частям и [4, т. 1, формула (5), с. 37].

Для $m = 3, 4, 5$ интеграл (31) вычислен Лонге-Хиггинсом непосредственно [6] и равен $1, \pi^2/6, \pi^2/3$ в полном соответствии с правой частью (31).

Покажем теперь на примерах, что рассмотренный нами класс интегралов естественным путем возникает в теории гауссовских случайных процессов и тем самым не является просто плодом досужего ума.

По-видимому, впервые интегралы вида

$$N_m(t) = m! \int_{\Omega_2} dt_1 \cdots dt_m \int_{V_2} |\dot{x}_1 \cdots \dot{x}_m| f_{t_1 \cdots t_m}(0, \dot{x}_1; \dots; 0, \dot{x}_m) d\dot{x}_1 \cdots d\dot{x}_m \quad (33)$$

введены в 1944 году С. О. Райсом [7]. Здесь

$$\Omega_2 = \{0 \leq t_1 < \dots < t_m \leq t\}, \quad V_2 = \{-\infty < \dot{\xi}_j < \infty, j = 1, \dots, m\},$$

а $f_{t_1 \dots t_m}(x_1, \dot{x}_1; \dots; x_m, \dot{x}_m)$ – плотность распределения значений случайного дифференцируемого (с вероятностью единица) процесса $x_j = x_{t_j}$ и его производной $\dot{x}_j = \dot{x}_{t_j}$, $j = 1, \dots, m$, в точках $t_1, \dots, t_m$ временной оси. Позднее [8] в (33) опознаны факториальные моменты

$$N_m(t) = M\eta_t(\eta_t - 1) \dots (\eta_t - m + 1)$$

числа нулей η_t процесса x_t в интервале $[0, t]$. Здесь и далее, символ Ma означает математическое ожидание случайной величины a . Если обозначить η_t^+ число пересечений процессом x_t оси t с положительной производной, т.е., когда $\dot{x}_t > 0$ в точках пересечения, а η_t^- – с отрицательной ($\dot{x}_t < 0$), и соответственно

$$N_m^s(t) = M\eta_t^s(\eta_t^s - 1)(\eta_t^s - m + 1), \quad s = \pm,$$

то $N_m^s(t)$ также определяется формулой (33), только область интегрирования V_2 заменяется на область

$$V_s = \{0 \leq (s1)\dot{x}_1 < \infty, \dots, 0 \leq (s1)\dot{x}_m < \infty\}. \quad (34)$$

По крайней мере для гауссовских процессов касания (всех порядков) траекторий процесса оси t имеют меру нуль, так что $\eta_t = \eta_t^+ + \eta_t^-$.

Число нулей случайного процесса значительно легче измеряется на практике, чем плотность распределения $f_{t_1 \dots t_m}$ при $m \geq 2$. Поэтому понятен интерес к восстановлению $f_{t_1 \dots t_m}$ по интегралам (33). Пока решить эту обратную задачу в общем виде не представляется возможным и приходится решать прямую задачу: вычислить $N_m(t)$ (или $N_m^s(t)$) для некоторых распространенных в приложениях классов случайных процессов. Остановимся на одном из них.

Если x_t – *марковский процесс первого порядка*, т.е. векторный процесс $(x_t, \dot{x}_t)$ марковский [9], то для плотности распределения $f_{t_1 \dots t_m}$ имеем формулу

$$f_{t_1 \dots t_m}(x_1, \dot{x}_1; \dots; x_m, \dot{x}_m) = f_{t_1}(x_1, \dot{x}_1) \prod_{j=2}^m p_{t_{j-1}t_j}(x_j, \dot{x}_j | x_{j-1}, \dot{x}_{j-1}), \quad (35)$$

где так называемая переходная плотность $p_{t_{j-1}t_j}(x_j, \dot{x}_j | x_{j-1}, \dot{x}_{j-1})$ удовлетворяет интегральному уравнению Чепмен–Колмогорова и может быть представлена в виде

$$p_{t_{j-1}t_j}(x_j, \dot{x}_j | x_{j-1}, \dot{x}_{j-1}) = \frac{f_{t_{j-1}t_j}(x_{j-1}, \dot{x}_{j-1}; x_j, \dot{x}_j)}{f_{t_{j-1}}(x_{j-1}, \dot{x}_{j-1})}. \quad (36)$$

Тем самым, для марковского процесса первого порядка в вычислении $N_m^s(t)$ участвуют только $f_{t_{j-1}t_j}$ и $f_{t_{j-1}}$, $j = 2, \dots, m$.

Если к тому же процесс x_t *стационарный*, то $f_{t_{j-1}} = f_{t_1}$ (не зависит от t), а $f_{t_{j-1}t_j} = f_{t_{j-1}-t_j}$ (т.е. зависит от разности $t_{j-1} - t_j$), $j = 2, \dots, m$.

Если вдобавок процесс x_t гауссовский с нулевым средним и корреляционной функцией $p(t) = Mx_0x_t$, то [2]

$$f_{t_j}(0, \dot{x}_j) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\dot{x}_j^2}{2}\right), \quad (37)$$

$$p_{t_j - t_j}(0, \dot{x}_j|0, \dot{x}_{j-1}) \equiv p_{\tau_j}(0, \dot{x}_j|0, \dot{x}_{j-1}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_j}} \exp\left\{-\frac{A_j(\dot{x}_j|\dot{x}_{j-1})}{2D_j}\right\}, \quad (38)$$

где $D_j = D(\tau)$, $\tau = t_j - t_{j-1}$, $A_j(y|x) \equiv A_{\tau_j}(y|x)$,

$$\begin{aligned} A_{\tau}(y|x) &= k_2(\tau)y^2 + 2k_6(\tau)xy + k_9(\tau)x^2, & D(\tau) &= k_7(\tau)k_8(\tau), \\ k_2(\tau) &= 1 - p^2 - q^2, & k_6(\tau) &= pq^2 + p^2r - r, & k_9(\tau) &= k_2(\tau) - D(\tau), \\ k_7(\tau) &= (1 - r)(1 + p) - q^2, & k_8(\tau) &= (1 + r)(1 - p) - q^2, \\ p &\equiv p(\tau), & q &\equiv q(\tau) = -\dot{p}(\tau), & r &\equiv r(\tau) = \dot{q}(\tau), \end{aligned}$$

и при этом выбраны масштабы по осям x и t так, что $p(0) = 1$, $r(0) = 1$ (подробнее обоснование такого выбора см. в [10]; оно очищает результаты от несущественных масштабных множителей).

Все корреляционные функции гауссовских стационарных марковских процессов первого порядка описаны нами в [9]. Среди них выделяется корреляционная функция

$$p(t) = \frac{3\varphi(t)}{2} - \frac{\varphi^3(t)}{2}, \quad \varphi(t) = \exp\left(-\frac{|t|}{\sqrt{3}}\right), \quad (39)$$

поскольку для нее, как нетрудно проверить по приведенным выше формулам, имеем простые выражения

$$D_j = (1 - \varphi_j^2)^4, \quad \frac{(1 - \varphi_j^2)A_j(y|x)}{D_j} = y^2 + \varphi_j xy + \varphi_j^2 x^2, \quad (40)$$

где $\varphi_j = \varphi(t_j - t_{j-1})$. Соответствующий гауссовский стационарный процесс мы называли *процессом Уонга*, так как Уонг впервые обратил внимание на его исключительность в задаче о числе нулей процесса (сама же структура корреляционной функции (39) может быть выведена из результата С. Н. Бернштейна [11]).

Для остальных гауссовских стационарных марковских процессов первого порядка нами в [1], [2] найдены положительные константы $a_j^{\pm}, b_j^{\pm}, c_j^{\pm}, d, B_j^{\pm}$, $j = 2, \dots, m$, такие, что

$$B_j^- q_j^-(\dot{x}_j|\dot{x}_{j-1}) \leq p_{\tau_j}(0, \dot{x}_j|0, \dot{x}_{j-1}) \leq B_j^+ q_j^+(\dot{x}_j|\dot{x}_{j-1}), \quad (41)$$

где $\tau_j = t_j - t_{j-1}$, $\varphi_j = \varphi(\tau_j)$, $\varphi(t) = \exp(-|t|/d)$, $t_j < t_{j-1}$,

$$q_j^{\pm}(y|x) = (1 - \varphi_j^2)^{-2} \exp\left\{-\frac{A_j^{\pm}(y|\varphi_j x)}{2(1 - \varphi_j^2)}\right\}, \quad A_j^{\pm}(y|z) = a_j^{\pm}y^2 + b_j^{\pm}yz + c_j^{\pm}z^2.$$

При малых t корреляционная функция $p(t)$ всех гауссовских стационарных марковских процессов первого порядка допускает представление [9]

$$p(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{b|t|^3}{3!}(1 + o(1)), \quad b > 0, \quad t \rightarrow 0. \quad (42)$$

Из этого представления следует при $t \rightarrow 0$

$$D(t) \sim \frac{bt^3}{3}, \quad k_2(t) \sim \frac{2bt^3}{3}, \quad k_6(t) \sim k_9(t) \sim \frac{bt^3}{3}, \quad (43)$$

так что с точностью до малых более высокого порядка при $t_j - t_{j-1} \rightarrow 0$ и $x = \dot{x}_{j-1}$, $y = \dot{x}_j$ имеем в силу (36)–(38)

$$f_{t_{j-1}t_j}(0, x; 0, y) \sim \frac{\sqrt{3}}{4\pi^2 b \cdot (t_j - t_{j-1})^2} \exp\left\{-\frac{x^2 + xy + y^2}{b \cdot (t_j - t_{j-1})}\right\}. \quad (44)$$

Соотношения (42)–(44) наталкивают на мысль, что любой гауссовский стационарный процесс, корреляционная функция которого допускает представление (42), при малых $t_j - t_{j-1}$, $j = 2, \dots, m$, обладает марковским свойством первого порядка, т.е. его плотность распределения $f_{t_1 \dots t_m}$ записывается при малых $t_m - t_1$ в виде (35), (36) с использованием правой части равенства (44). По крайней мере для $x_j = 0$, $j = 1, \dots, m$, доказательство этого утверждения можно вывести из рассуждений Лонге-Хиггинса в работе [6]. Гауссовский процесс с корреляционной функцией вида (42) в окрестности нуля поэтому естественно назвать *гауссовским локально марковским процессом первого порядка* [12].

Перейдем теперь непосредственно к примерам использования теоремы и следствий из нее. Во всех этих примерах $\mu = 2$.

ПРИМЕР 1. Для процесса Уонга

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{N_m^+(t)}{m!} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\right)^{m-1} \int_0^t g(t_m)(t - t_m) dt_m \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty x_1 \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) I_m^{(2)}(g(t_m)) dx_1 dx_m, \end{aligned} \quad (45)$$

где интеграл $I_m^{(2)} \equiv I_m(x_m|t; \mu = 2; b_2 = 1/2, \dots, b_m = 1/2|x_1)$ определен формулами (1)–(5) и вычислен в следствии 1, а $g(t) = \varphi^{-2}(t) - 1$, $\varphi(t) = \exp(-t/\sqrt{3})$.

Действительно, по (33), (34)

$$N_m^+(t) = m! \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_1}^{t_{m-1}} dt_m d_m(t_1, \dots, t_m), \quad (46)$$

$$d_m(t_1, \dots, t_m) = \int_{V_+} \dot{x}_1 \cdots \dot{x}_m f_{t_1 \dots t_m}(0, \dot{x}_1; \dots; 0, \dot{x}_m) d\dot{x}_1 \cdots d\dot{x}_m. \quad (47)$$

Так как процесс Уонга стационарный, то

$$d_m(t_1, \dots, t_m) = d_m(0, t_2 - t_1, \dots, t_m - t_1)$$

(начало отсчета времени для характеристик процесса не существенно). Поэтому (46) можно представить в следующем виде, полагая $\tau_1 = t_1$, $\tau_j = t_j - t_1$, $j = 2, \dots, m$:

$$N_m^+(t) = m! \int_0^t d\tau_m(t - \tau_m) \int_\Omega d_m(0, \tau_1, \dots, \tau_m) d\tau_2 \cdots d\tau_m, \quad (48)$$

где

$$\Omega = \{0 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{m-1} \leq \tau_m\}, \quad (49)$$

т.е. область интегрирования (49) с точностью до обозначений совпадает с Ω в (5). Воспользовавшись теперь в (47), (48) марковским свойством первого порядка, присущем процессу Уонга, т.е., воспользовавшись формулами (35)–(38), (40), а затем, сделав в (47), (48) замену переменных $x_j = \varphi(\tau_j)x_j$, $j = 1, \dots, m$, $t_i = \varphi^{-2}(\tau_i) - 1$, $i = 2, \dots, m-1$, мы получаем для внутреннего интеграла в (48) выражение

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{m-1} (2\pi)^{-m} \dot{g}(\tau_m) \int_0^\infty \int_0^\infty x_1 \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) I_m^{(2)}(g(\tau_m)) dx_1 dx_m,$$

где $g(t) = \varphi^{-2}(t) - 1$, откуда и следует (45). Очевидно, все $b_j = 1/2$, т.е. $\beta_j = \arccos b_j = \pi/3$.

В случае процесса Уонга столь же простые формулы получаются и для N_m^- , и для $N_m(t)$ [1], [2]. Так как в подынтегральную функцию в $I_m^{(2)}(t)$ (см. следствие 1) входит множителем $[(\operatorname{sh}(\pi\gamma/3))/\operatorname{sh} \pi\gamma]^{m-1}$, это позволяет найти асимптотику $N_m^+(t)$ при $m \rightarrow \infty$ и, тем самым, решить вопрос о сходимости следующего ряда Лонге-Хиггинса, в который раскладывается вероятность $P_m(t)$ того, что в интервале $[0, t]$ будет ровно m нулей процесса с положительной производной:

$$P_m(t) \equiv \mathbb{P}\{x_t : \eta_t^+ = m\} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (m+k)!}{k!} N_{m+k}^+(t). \quad (50)$$

ПРИМЕР 2. Для остальных гауссовских стационарных марковских процессов первого порядка можно получить в силу (41) оценки $N_m^+(t)$ сверху и снизу интегралами типа правой части (45) [1], [2]. На эти оценки опираются соответствующие результаты о сходимости рядов (50). Так как эти результаты узко специализированного характера, мы на них здесь не останавливаемся.

ПРИМЕР 3. Наконец, при $t \rightarrow 0$ для гауссовского стационарного локально марковского процесса первого порядка главный член асимптотики $N_m^+(t)$ равен

$$N_m^+(t) = \frac{b \cdot (\sqrt{3}/4\pi)^m}{2\sqrt{3}} m! J_m \cdot t^2 (1 + o(1)), \quad t \rightarrow 0, \quad (51)$$

где для константы J_m имеем формулу

$$J_m = \int_0^1 d\tau_m (1 - \tau_m) \int_0^\infty \int_0^\infty y_1 I_m(y_m | \tau_m; \mu = 2; b_2 = \frac{1}{2}, \dots, b_m = \frac{1}{2} | y_1) dy_1 dy_m. \quad (52)$$

В самом деле, в силу (35)–(37), (44), рассуждая, как в примере 1, находим, что

$$\frac{N_m^+(t)}{m!} = \int_0^t dt_m \cdot (t - t_m) \int_\Omega d_m(0, t_2, \dots, t_m) dt_2 \cdots dt_{m-1}, \quad (53)$$

$$d_m(t_1, t_2, \dots, t_m) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_1 \cdots x_m \cdot f_{t_1 t_2 \cdots t_m}(0, x_1; \dots; 0, x_m) dx_1 \cdots dx_m, \quad (54)$$

$$f_{t_1 t_2 \dots t_m}(0, x_1; \dots; 0, x_m) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)^m b^{1-m} \exp\left(\sum_{j=2}^m \frac{x_j^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right) \\ \times \prod_{j=2}^m (t_j - t_{j-1})^{-2} \exp\left\{-\frac{x_{j-1}^2 + x_{j-1}x_j + x_j^2}{2b}(t_j - t_{j-1})\right\}, \quad (55)$$

$$\Omega = \{0 \leq t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m\}. \quad (56)$$

Если в (53)–(56) сделать замену переменных $t_j = t\tau_j$, $\sqrt{2/bt}x_j = y_j$, $j = 1, \dots, m$, и оставить главный член асимптотики при $t \rightarrow 0$, то, вспоминая (1)–(5), нетрудно получить (51), (52).

Порядок асимптотики $N_m^+(t)$ при $t \rightarrow 0$ в этом примере нашел еще сорок лет назад Лонге-Хиггинс [6], но для коэффициента он смог определить только верхнюю и нижнюю границы, пропорциональные интегралу $K_m^{(2)}$ следствия 3, которые, к сожалению, расширяются до тривиальных 0 и ∞ при $m \rightarrow \infty$.

Как нетрудно проверить, приводимое нами точное значение коэффициента (52) с помощью следствия 1 можно представить через элементарные функции от m (без интегралов). Тем самым, результат (51), (52) можно считать окончательным.

Таким образом, вычисленный нами интеграл совершенно естественно появляется в теории гауссовских марковских процессов. Из формулы (33) видно, в каком направлении может эволюционировать продолжение настоящей работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мирошин Р. Н. Сходимость рядов Райса и Лонге-Хиггинса для стационарных гауссовских марковских процессов первого порядка // Теор. вероятн. и ее прим. 1981. Т. 26. № 1. С. 101–120.
- [2] Мирошин Р. Н. Пересечения кривых гауссовскими процессами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
- [3] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 5-е. М.: Наука, 1971.
- [4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969; Т. 2. М.: Наука, 1970.
- [5] Мирошин Р. Н. Асимптотическая оценка интеграла от произведения двух модифицированных бесселевых функций и степенной функции // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 3. С. 456–458.
- [6] Longuet-Higgins M. S. The distribution of intervals between zeros of a stationary random function // Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. 1962. V. 254. P. 557–599.
- [7] Rice S. O. Mathematical analysis of random noise // Bell System Techn. J. 1944. V. 23. P. 282–332.
- [8] Беляев Ю. К. О числе пересечений уровня гауссовским случайным процессом // Теор. вероятн. и ее прим. 1966. Т. 11. № 1. С. 120–128; 1967. Т. 12. № 3. С. 444–457.
- [9] Мирошин Р. Н. Марковские и возвратные стационарные гауссовские процессы второго порядка // Теор. вероятн. и ее прим. 1979. Т. 24. № 4. С. 847–853.
- [10] Мирошин Р. Н. Об асимптотике дисперсии числа нулей гауссовского стационарного процесса // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1999. Т. 1. № 1. С. 22–28.
- [11] Бернштейн С. Н. О зависимостях между случайными величинами // Собр. соч. Т. 4. М.: Наука, 1964. С. 235–254.
- [12] Геодаков Н. А. Локально марковское свойство гауссовских стационарных процессов // Теор. вероятн. и ее прим. 1979. Т. 24. № 4. С. 854–858.