Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Х. Мусин, О представлении бесконечно дифференцируемых функций рядами экспонент, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 3, 402–415

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 11:13:01

УДК 517.5

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ

И. Х. Мусин

Рассматривается задача о представлении элементов весового пространства бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой рядами экспонент.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Пусть заданы число $\alpha > 1$ и выпуклая функция $\psi: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) существует постоянная $A_\psi > 0$ такая, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \leq A_\psi(1 + |x_1| + |x_2|)^{\alpha-1}|x_1 - x_2|; \quad (1)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{|x|} = +\infty.$$

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество возрастающих числовых последовательностей $L = (L_n)_{n=0}^\infty$ с $L_0 = 1$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$i_1) L_n^2 \leq L_{n-1}L_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$i_2) \exists H_1 = H_1(L) > 0 \exists H_2 = H_2(L) > 0: \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad L_n \geq H_1 H_2^n n!;$$

$$i_3) \forall s > 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{L_{[sn]}}{L_n^s} \right)^{1/n} > 1;$$

$$i_4) \forall \delta > 0 \exists p_\delta = p_\delta(L) > 0 \exists t_\delta = t_\delta(L) > 1: \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{L_{m+n}}{L_m(1+\delta)^m} \leq p_\delta t_\delta^n L_n.$$

Из i_4) следует, что для любой последовательности $(L_n)_{n=0}^\infty$ из $\mathcal{M}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{L_{n+1}}{L_n} \right)^{1/n} = 1. \quad (2)$$

Всюду далее $M = (M_k)_{k=0}^\infty$ – некоторая фиксированная последовательность из $\mathcal{M}$. Пусть

$$w(r) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^k}{M_k}, \quad r > 0, \quad w(0) = 0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-00655 и 00-15-96189.

– функция, ассоциированная с последовательностью M . Функция w непрерывна на неотрицательной полуоси [1, гл. 1, п. 8]. Очевидно, $w(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, – субгармоническая функция в комплексной плоскости.

Пусть $(\varepsilon_m)_{m=1}^\infty$ – строго убывающая к нулю последовательность положительных чисел, а σ – положительное число.

Положим $w_m(|z|) = w((\sigma + \varepsilon_m)^{-1}|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $\varphi(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}}(xy - \psi(y))$, $\theta_m(x) = \exp(\varphi(x) - m \ln(1 + |x|))$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$.

Как обычно, $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой, $H(\mathbb{C})$ – пространство целых функций с топологией компактной сходимости.

Через G обозначим проективный предел пространств

$$G_m = \left\{ f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) : p_m(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|f^{(k)}(x)|}{(\sigma + \varepsilon_m)^k M_k \theta_m(x)} < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

относительно вложений $i_{mn} : G_m \rightarrow G_n$, $m > n$, а через G^* – сильное сопряженное к G пространство.

Через P обозначим линейное пространство, состоящее из функций $f \in H(\mathbb{C})$ таких, что при некоторых $c = c(f) > 0$, $m = m(f) \in \mathbb{N}$

$$|f(z)| \leq c \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_m(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пространство P , рассматриваемое с топологией τ индуктивного предела пространств

$$P_m = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_m = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_m(|z|))} < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

обозначим через P_τ .

Поскольку последовательность M удовлетворяет условиям i_1 , i_2) и (2), справедлива

ТЕОРЕМА А. Преобразование Фурье–Лапласа $\mathcal{F} : T \in G^* \rightarrow T(e^{-ixz})$, $z \in \mathbb{C}$, устанавливает топологический изоморфизм между пространствами G^* и P_τ .

Для случая, когда сходится ряд $\sum_{k=0}^\infty M_k/M_{k+1}$, теорема А доказана в [2]. В общем случае теорема А доказана в [3].

В данной статье рассматривается задача о разложении функций из G в ряды экспонент. Для весовых пространств бесконечно дифференцируемых функций подобных G эта задача ранее не изучалась. Из работ, связанных с вопросом представления бесконечно дифференцируемых функций рядами экспонент, отметим работу В.В. Напалкова [4], в которой изучались дискретные достаточные множества в пространстве преобразований Фурье–Лапласа распределений с компактным носителем, содержащимся в фиксированном интервале вещественной прямой, и работы Ю.Ф. Коробейника [5]–[7], в которых, в частности, были изучены абсолютно представляющие системы экспонент с минимальными показателями в некоторых пространствах Берлинга и Румье на отрезках числовой прямой.

Структура работы такова. В п. 2 даны примеры последовательностей из класса $\mathcal{M}$. В п. 3 приведено несколько вспомогательных утверждений. В п. 4 на основе изучения слабо достаточных множеств для P , основного результата работы [8] и теоремы А получено разложение функций из G в ряды экспонент, сходящиеся в топологии пространства G .

2. Примеры последовательностей из класса $\mathcal{M}$. Введем вначале класс V неотрицательных выпуклых возрастающих функций v на $[0, \infty)$, $v(0) = 0$, удовлетворяющих условиям

$$V1. \exists A_v \in \mathbb{R} \exists B_v \in \mathbb{R}: \forall x \geq 1 \quad v(x) \geq x \ln x + A_v x + B_v;$$

$$V2. \forall s > 1 \exists \eta_s = \eta_s(v) > 0 \exists m_s = m_s(v) \in \mathbb{R}: \forall x \geq 0 \quad v(sx) \geq sv(x) + \eta_s x + m_s;$$

$$V3. \forall \varepsilon > 0 \exists a_\varepsilon = a_\varepsilon(v) > 0 \exists b_\varepsilon = b_\varepsilon(v) \in \mathbb{R}: \forall y \geq 1$$

$$\sup_{x \geq 1} (v(x+y) - v(x) - \varepsilon x) \leq v(y) + a_\varepsilon y + b_\varepsilon.$$

Очевидно, для любой возрастающей функции v на $[0, \infty)$, удовлетворяющей условию V3, выполнено

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v(x+1) - v(x)}{x} = 0.$$

При проверке выполнения условия V3 может быть полезно следующее утверждение (см. [9, лемма 1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $u: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – выпуклая возрастающая дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x+1) - u(x)}{x} = 0;$$

$$2) \text{ существуют постоянная } C > 0 \text{ такая, что } u''(x) \leq Cx^{-1} \text{ при } x \geq 1.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, C)$ найдется постоянная Q_ε такая, что для любого $y \geq 1$

$$\sup_{x \geq 1} (u(x+y) - u(x) - \varepsilon x) < u(y) + \left(C \ln \frac{2C}{\varepsilon} + \frac{5C}{4} \right) y + Q_\varepsilon.$$

Легко проверить, что какова бы ни была последовательность $(L_k)_{k=0}^\infty$ из $\mathcal{M}$, любая возрастающая функция v на $[0, \infty)$ такая, что $v(k) = \ln L_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяет условиям V1–V3. Таким образом, какова бы ни была последовательность $L = (L_k)_{k=0}^\infty$ из $\mathcal{M}$, любая возрастающая выпуклая функция v на $[0, \infty)$ такая, что $v(k) = \ln L_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, принадлежит V . В частности, функция v_L , принимающая в точке $x = tk + (1-t)(k+1)$, где $k \in \mathbb{Z}_+$, $t \in [0, 1]$, значение $t \ln L_k + (1-t) \ln L_{k+1}$, принадлежит V .

Так же нетрудно проверить, что для любой функции $v \in V$ последовательность $(\exp(v(k)))_{k=0}^\infty \in \mathcal{M}$.

Очевидно, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть функция v удовлетворяет условиям предложения 1, условиям V1, V2 и $v(0) = 0$. Тогда последовательность $(\exp(v(k)))_{k=0}^\infty \in \mathcal{M}$.

Приведем несколько примеров последовательностей из класса $\mathcal{M}$.

1. Легко проверить, что функция $v_1(x) = \rho x \ln(x+1)$, $\rho \geq 1$, $x \geq 0$, удовлетворяет всем условиям предложения 2. Поэтому последовательность $M^* = ((n+1)^{\rho n})_{n=0}^\infty$ принадлежит классу $\mathcal{M}$.

2. Рассмотрим функцию $v_2(x) = \rho \ln \Gamma(x+2)$, $\rho \geq 1$, $x \geq 0$, где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера. Функция v_2 выпуклая на $[0, \infty)$ [10, с. 763], $v_2(0) = 0$. Функция v_2 возрастает на $[0, \infty)$. Это следует из исследования свойств гамма-функции, проведенного в [10, с. 755]. Функция v_2 удовлетворяет условиям предложения 1 (см., например, [9, п. 2]).

В выполнении условий V1, V2 для v_2 легко убедиться с помощью формулы Стирлинга. Таким образом, согласно предложению 2 последовательность $((n+1)!^\rho)_{n=0}^\infty$ принадлежит классу $\mathcal{M}$.

3. Для функции $v_3(x) = (x+1) \ln(x+1) \operatorname{arctg}(x+1)$, рассматриваемой на $[0, \infty)$, при любых $s > 1, x > 1$

$$\begin{aligned} v_3(sx) - sv_3(x) &= sx \ln(sx+1) \operatorname{arctg}(sx+1) - sx \ln(x+1) \operatorname{arctg}(x+1) \\ &\quad + \ln(sx+1) \operatorname{arctg}(sx+1) - s \ln(x+1) \operatorname{arctg}(x+1) \\ &> \frac{\pi sx}{4} \ln \frac{s+1}{2} + \frac{\pi}{4} \ln(sx+1) - \frac{\pi s}{2} \ln(x+1). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что условие V2 для v_3 выполняется. Остальным условиям предложения 2 функция v_3 также удовлетворяет (см. [9, п. 2]). Следовательно, последовательность $((n+1)^{(n+1) \operatorname{arctg}(n+1)})_{n=0}^\infty$ принадлежит классу $\mathcal{M}$.

3. Вспомогательные утверждения. Всюду в этом пункте v – произвольная возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$ такая, что $M_k = \exp(v(k))$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Как мы знаем, функция v удовлетворяет условиям V1–V3. Отметим, что условия V2, V3 накладывают определенные ограничения на рост функции v . Например, из V2 следует, что при некоторых $a > 0, b, c \in \mathbb{R}$, зависящих от v , $v(x) > ax \ln x + bx + c$, $x \geq 1$. Из условия V3 следует, что для любых $\varepsilon > 0, x \geq 1, y \geq 1$

$$v(x+y) \leq v(x) + \varepsilon x + v(y) + a_\varepsilon y + b_\varepsilon, \quad (3)$$

где числа $a_\varepsilon > 0, b_\varepsilon$ зависят от v и ε . В частности, при любых $x \geq 1, \varepsilon > 0$ имеем $v(2x) \leq 2v(x) + (a_\varepsilon + \varepsilon)x + b_\varepsilon$, а из этого неравенства легко следует, что

$$v(x) \leq (2v(1) + a_\varepsilon + 2b_\varepsilon + \varepsilon)x + \frac{(a_\varepsilon + \varepsilon)x \ln x}{\ln 2} - b_\varepsilon, \quad x \geq 1.$$

Рассмотрим функцию

$$h_v(s) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{v(x)}{x} - \frac{v(sx)}{sx} \right), \quad s > 0.$$

ЛЕММА 1. *Функция h_v обладает следующими свойствами:*

- 1) функция h_v принимает конечные значения всюду на положительной полуоси;
- 2) h_v – невозрастающая функция на положительной полуоси;
- 3) $\lim_{s \rightarrow 0, s > 0} h_v(s) = +\infty$;
- 4) $h_v(s) > 0$ для $s \in (0, 1)$ и $h_v(s) < 0$ для $s > 1$;
- 5) функция h_v непрерывна в точке $s = 1$;
- 6) для любого $s > 0$ $h_v(s) + h_v(s^{-1}) \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1)–3) доказаны в [9, лемма 2].

Из условия V2 следует, что $h_v(s) < 0$ для $s > 1$. Пользуясь представлением

$$h_v(s) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{v(s^{-1}x)}{s^{-1}x} - \frac{v(x)}{x} \right), \quad s > 0, \quad (4)$$

и условием V2, получаем $h_v(s) > 0$ для $s \in (0, 1)$. Свойство 4) доказано.

Пусть $s > 1$. Тогда для некоторого $N \in \mathbb{N}$ $s \in (N, N+1]$. Из неравенства (3) выводим, что для любых $x \geq (s-N)^{-1}$, $\varepsilon > 0$

$$v(sx) \leq Nv(x) + \varepsilon Nx + \frac{a_\varepsilon Nx(2s-N-1)}{2} + Nb_\varepsilon + v((s-N)x).$$

Отсюда, учитывая, что $v(tx) \leq tv(x)$ для всех $t \in [0, 1]$, $x \geq 0$, получаем, что для любых $N \in \mathbb{N}$, $s \in (N, N+1]$, $x \geq (s-N)^{-1}$, $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$v(sx) \leq sv(x) + \left(\varepsilon + \frac{a_\varepsilon(2s-N-1)}{2} \right) sx + b_\varepsilon s. \quad (5)$$

Покажем, что функция h_v непрерывна в точке 1. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Воспользовавшись (5), имеем $h_v(s) \geq -\varepsilon - a_\varepsilon(s-1)$ для $s \in (1, 2)$. Таким образом, если $0 < s-1 < \min(1, \varepsilon a_\varepsilon^{-1})$, то $-2\varepsilon < h_v(s) - h_v(1) \leq 0$. Отсюда следует, что функция h_v непрерывна справа в точке 1. Если же $0.5 < s < 1$, то согласно (5)

$$v(s^{-1}x) \leq s^{-1}v(x) + (\varepsilon + a_\varepsilon(s^{-1}-1))s^{-1}x + b_\varepsilon s^{-1}.$$

Поэтому $h_v(s) \leq \varepsilon + a_\varepsilon(s^{-1}-1)$. Таким образом, если $0 < 1-s < \min(2^{-1}, \varepsilon(2a_\varepsilon)^{-1})$, то $0 \leq h_v(s) - h_v(1) < 2\varepsilon$. Отсюда следует, что функция h_v непрерывна слева в точке 1. Итак, функция h_v непрерывна в точке 1.

Пользуясь представлением (4), имеем

$$\begin{aligned} h_v(s^{-1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{v(sx)}{sx} - \frac{v(x)}{x} \right) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{v(x)}{x} - \frac{v(sx)}{sx} \right) \\ &\leq - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{v(x)}{x} - \frac{v(sx)}{sx} \right) = -h_v(s), \quad s > 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает шестое свойство функции h_v .

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$h_v(s) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{v(k)}{k} - \frac{v([sk]+1)}{sk} \right), \quad s > 0.$$

Доказательство леммы 2 дано в [9].

Итак, какова бы ни была функция $v \in V$ с условием $\exp(v(k)) = M_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, функция $h_v(s)$ совпадает с

$$h(s) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (sk)^{-1} \ln \frac{M_k^s}{M_{[sk]+1}}, \quad s > 0.$$

Положим $l(s) = \exp(h(s))$, $s > 0$. Из свойств функции h следует, что функция l обладает следующими свойствами:

- 1) функция l принимает конечные значения на $(0, \infty)$;
- 2) функция l непрерывна в точке $s = 1$;
- 3) $l(s) > 1$ для $s \in (0, 1)$, $0 < l(s) < 1$ для $s > 1$;
- 4) $\lim_{s \rightarrow 0, s > 0} l(s) = +\infty$;
- 5) $l(s)l(s^{-1}) \leq 1$;
- 6) l – невозрастающая функция на $(0, \infty)$.

ЛЕММА 3. Для любых $s > 0$, $\delta \in (0, 1)$ существует постоянная $Q(s, \delta) \geq 0$ такая, что для всех $r \geq 0$

$$sw(r) \leq w\left(\frac{r}{l(s)(1-\delta)}\right) + Q(s, \delta).$$

Лемма 3 доказана в [9].

Приведем несколько известных сведений относительно функций $w(r)$ и $w(|z|)$.

1. Из того, что $w(r) = 0$ для $r \in [0, M_1]$, и из условия i_2) следует, что найдется число $A_w > 0$ такое, что $w(r) \leq A_w r$, $r \geq 0$. Очевидно, $\ln r = o(w(r))$ при $r \rightarrow +\infty$.
2. Поскольку последовательность $(M_k)_{k=0}^\infty$ удовлетворяет условиям $i_1)$ и $i_2)$, то справедливо неравенство (см. [11, лемма 1])

$$|w(|z_2|) - w(|z_1|)| \leq A_w e |z_2 - z_1| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

3. Благодаря выполнению условий $i_1)$ и (2) для последовательности M , вне всякой зависимости от сходимости ряда $\sum_{k=0}^\infty \frac{M_k}{M_{k+1}}$, справедлива следующая лемма, доказанная в [2].

ЛЕММА 4. Для любых $N > 0$, $m \in \mathbb{N}$ существует неотрицательная постоянная Q такая, что

$$w_m(|z|) + N \ln(1 + |z|) \leq w_{m+1}(|z|) + Q, \quad z \in \mathbb{C}.$$

4. Слабо достаточные множества для пространства P . Пусть $\mathcal{K}$ – семейство непрерывных положительных функций k в $\mathbb{C}$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{\exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_m(|z|))}{k(z)} < \infty.$$

Для любого замкнутого в $\mathbb{C}$ множества S , являющегося множеством единственности для P , рассмотрим на P две топологии τ_S и μ_S . Топология τ_S определяется как топология индуктивного предела нормированных пространств

$$P_{S,m} = \left\{ f \in P: \|f\|_{S,m} = \sup_{z \in S} \frac{|f(z)|}{\exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_m(|z|))} < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, $\tau_{\mathbb{C}} = \tau$.

Топология μ_S определяется на P с помощью норм вида

$$\|f\|_{S,k} = \sup_{z \in S} \frac{|f(z)|}{k(z)} < \infty, \quad k \in \mathcal{K}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество S называется *достаточным* (слабо *достаточным*) для P , если $\mu_{\mathbb{C}} = \mu_S(\tau_{\mathbb{C}} = \tau_S)$.

Общие рассуждения [12, глава 1] показывают, что если S – достаточное множество для P и $\tau = \mu_{\mathbb{C}}$, то для любой функции $f \in G$ имеет место представление

$$f(x) = \int_S e^{-izx} \frac{d\lambda(z)}{k(z)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\lambda(z)$ – комплексная мера на $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условию $\int_{\mathbb{C}} |d\lambda(z)| = C_{\lambda} < \infty$, k – некоторая функция из $\mathcal{H}$. Если достаточное множество S является множеством точек $\{\nu_j\}_{j=1}^{\infty}$, то из интегрального представления для f получаем представление в виде ряда

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{-i\nu_j x},$$

причем из оценок $|c_j| \leq C_{\lambda}/k(\nu_j)$ для любого $j \in \mathbb{N}$,

$$p_m(\exp(-izx)) \leq K_m \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|))$$

для любых $m \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, где $K_m > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от z (см. [2], [3]), и леммы 4 вытекает абсолютная сходимость этого ряда в пространстве G .

В силу основного результата работы [8] и леммы 4 $\tau = \mu_{\mathbb{C}}$.

Далее нам понадобится аппроксимационная теорема Р. С. Юлмухаметова [13, теорема 6], в формулировке которой μ_u – мера, ассоциированная по Риссу с субгармонической в $\mathbb{C}$ функцией u [14, с. 57], $D(z, t)$ – открытый круг радиуса t с центром в точке $z \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА В [13]. Пусть u – субгармоническая функция на плоскости, имеющая порядок роста ρ , $\rho > 0$. Предположим, что для любого $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$, имеет место неравенство $\mu_u(D(z, t)) \leq C|z|^s t$, $t \in (0, |z|)$, где $s \geq \rho - 1$, $C > 0$ – некоторые постоянные. Тогда существует целая функция f , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) круги $D(a_n, d|a_n|^{-s})$, где a_n , $n = 1, 2, \dots$, – нули функции f , попарно не пересекаются;
- 2) вне множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} D(a_n, d|a_n|^{-s})$ выполняется неравенство

$$|u(z) - \ln |f(z)|| \leq \tilde{C} \ln |z|.$$

Здесь $d > 0$, $\tilde{C} > 0$ – некоторые постоянные.

Пользуясь леммой 10 из [11], убеждаемся, что субгармоническая функция $\psi(\operatorname{Im} z) + w(\sigma^{-1}|z|)$ удовлетворяет условиям теоремы В. Поэтому существует целая функция $\mathcal{N}$, удовлетворяющая условиям:

- 1) все нули $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ (расположенные в порядке неубывания их модулей) функции $\mathcal{N}$ простые и круги $D_j = \{z \in \mathbb{C}: |z - \lambda_j| < d|\lambda_j|^{1-\alpha}\}$, где d – некоторое положительное число, попарно не пересекаются;
- 2) вне множества $\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ при некоторых положительных A, C_0 выполняется неравенство

$$|\psi(\operatorname{Im} z) + w(\sigma^{-1}|z|) - \ln |\mathcal{N}(z)|| \leq A \ln(1 + |z|) + C_0. \quad (7)$$

Будем считать, что $|\lambda_j| > 1$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Этого предположения можно легко добиться. Применяя к функции $\mathcal{N}$ принцип максимума в кружках D_j и пользуясь при этом неравенствами (1) и (6), из (7) получаем оценку

$$|\mathcal{N}(z)| \leq C_1 \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w(\sigma^{-1}|z|) + A \ln(1 + |z|)), \quad z \in D_j,$$

где $C_1 > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от $j \in \mathbb{N}$. Из этой оценки и неравенства (7) получаем окончательно

$$|\mathcal{N}(z)| \leq C_2 \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w(\sigma^{-1}|z|) + A \ln(1 + |z|)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (8)$$

где $C_2 = \max(C_1, \exp C_0)$.

Зафиксируем $\nu > \alpha$. Пусть $D'_j = \{z \in \mathbb{C}: |z - \lambda_j| < d|\lambda_j|^{-\nu}\}$, $j \in \mathbb{N}$.

Оценим $|\mathcal{N}(z)|$ снизу вне $\bigcup_{j=1}^{\infty} D'_j$, действуя по схеме из [15, с. 40]. С этой целью для каждого $j \in \mathbb{N}$ на $\overline{D}_j = \{z \in \mathbb{C}: |z - \lambda_j| \leq d|\lambda_j|^{1-\alpha}\}$ рассмотрим функцию $N_j(z) = (z - \lambda_j)/\mathcal{N}(z)$. Функция $N_j(z)$ аналитична на $\overline{D}_j$ и не имеет там нулей. Пользуясь принципом максимума модуля, имеем для $z \in D_j$

$$|N_j(z)| \leq \sup_{t \in \overline{D}_j} \left| \frac{t - \lambda_j}{\mathcal{N}(t)} \right| = \frac{d|\lambda_j|^{1-\alpha}}{|\mathcal{N}(t_0)|},$$

где t_0 – точка минимума $|\mathcal{N}(t)|$ на окружности $S_j = \{t \in \mathbb{C}: |t - \lambda_j| = d|\lambda_j|^{1-\alpha}\}$. Из последней оценки, пользуясь неравенствами (1), (6) и (7), получаем

$$|N_j(z)| \leq C_3(1 + |z|)^A |\lambda_j|^{1-\alpha} \exp(-(\psi(\operatorname{Im} z) + w(\sigma^{-1}|z|))), \quad z \in D_j,$$

где $C_3 > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от j . Следовательно, для любых $j \in \mathbb{N}$, $z \in D_j$

$$|\mathcal{N}(z)| \geq C_3^{-1} |\lambda_j|^{\alpha-1} |z - \lambda_j| \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w(\sigma^{-1}|z|) - A \ln(1 + |z|)).$$

Отсюда, учитывая, что для любого $j \in \mathbb{N}$ $|\lambda_j| > 1$ и для $z \in D_j$ $|\lambda_j| \leq |z| + d$, получаем для $z \in D_j \setminus D'_j$ оценку

$$|\mathcal{N}(z)| \geq C_4 \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w(\sigma^{-1}|z|) - (A + \nu) \ln(1 + |z|)), \quad (9)$$

где $C_4 > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от $j \in \mathbb{N}$. Таким образом, из (7) и (9) имеем для $z \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} D'_j$

$$|\mathcal{N}(z)| \geq C_5 \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w(\sigma^{-1}|z|) - (A + \nu) \ln(1 + |z|)), \quad (10)$$

где $C_5 = \min(C_4, \exp(-C_0))$. Так как показатель сходимости [15, с. 11] корней целой функции $\mathcal{N}$ не превосходит α , то в силу выбора ν сумма радиусов непересекающихся исключительных кружков D'_j конечна. Следовательно, найдется возрастающая последовательность $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел R_n , стремящаяся к $+\infty$ при $n \rightarrow \infty$, такая, что окружности $l_n = \{z \in \mathbb{C}: |z| = R_n\}$ не пересекаются с исключительными кружками D'_j . Таким образом, для $z \in l_n$ справедлива оценка (10).

По принципу максимума модуля

$$\left| \frac{1}{\mathcal{N}'(\lambda_j)} \right| \leq \sup_{z \in D'_j} \left| \frac{z - \lambda_j}{\mathcal{N}(z)} \right| = \frac{|z_0 - \lambda_j|}{|\mathcal{N}(z_0)|}, \quad j \in \mathbb{N},$$

где z_0 – точка минимума $|\mathcal{N}(z)|$ на окружности $S'_j = \{t \in \mathbb{C} : |t - \lambda_j| = d|\lambda_j|^{-\nu}\}$. Отсюда, пользуясь неравенствами (1), (6) и (10), получаем

$$|\mathcal{N}'(\lambda_j)| \geq C_6(1 + |\lambda_j|)^{-A} \exp(\psi(\operatorname{Im} \lambda_j) + w(\sigma^{-1}|\lambda_j|)), \quad (11)$$

где постоянная $C_6 > 0$ не зависит от $j \in \mathbb{N}$.

Отметим также, что оценивая $|\mathcal{N}(z)/(z - \lambda_j)|$ вне D_j с помощью (8), а внутри D_j с помощью принципа максимума, неравенств (1), (6) и (8), получим, что для любого $z \in \mathbb{C}$

$$\left| \frac{\mathcal{N}(z)}{z - \lambda_j} \right| \leq C_7 |\lambda_j|^{\alpha-1} \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w(\sigma^{-1}|z|) + A \ln(1 + |z|)), \quad (12)$$

где $C_7 > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от $j \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 5. *Любая функция $f \in P$ может быть представлена в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\lambda_j)}{\mathcal{N}'(\lambda_j)} \frac{\mathcal{N}(z)}{z - \lambda_j}, \quad z \in \mathbb{C},$$

абсолютно сходящегося в топологии пространства $H(\mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – произвольная функция из P . Тогда существуют числа $m \in \mathbb{N}$ и $c_f > 0$ такие, что

$$|f(z)| \leq c_f \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_m(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (13)$$

Пусть K – произвольный компакт в $\mathbb{C}$ и $k_0 \in \mathbb{N}$ таково, что $K \subset D(0, R_{k_0})$. Для $k > k_0$ рассмотрим интеграл

$$I_k(z) = \int_{l_k} \frac{f(\xi)}{\mathcal{N}(\xi)(\xi - z)} d\xi, \quad z \in K.$$

По теореме о вычетах

$$I_k(z) = 2\pi i \sum_{|\lambda_j| < R_k} \frac{f(\lambda_j)}{\mathcal{N}'(\lambda_j)(\lambda_j - z)} + 2\pi i \frac{f(z)}{\mathcal{N}(z)}, \quad z \in K. \quad (14)$$

Пользуясь оценками (10) и (13), имеем для $z \in K$

$$|I_k(z)| \leq \int_{l_k} \frac{c_f(1 + |\xi|)^{A+\nu} \exp(\psi(\operatorname{Im} \xi) + w_m(|\xi|))}{C_5 \operatorname{dist}(K, l_k) \exp(\psi(\operatorname{Im} \xi) + w(\sigma^{-1}|\xi|))} |d\xi|.$$

Устремляя k к ∞ в правой части последнего неравенства и учитывая лемму 4, получаем $\lim_{k \rightarrow \infty} I_k(z) = 0$, $z \in K$. Переходя в (14) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_j| < R_k} \frac{f(\lambda_j)}{\mathcal{N}'(\lambda_j)} \frac{\mathcal{N}(z)}{(z - \lambda_j)}, \quad z \in K. \quad (15)$$

В силу произвольности компакта K равенство (15) верно для всех $z \in \mathbb{C}$.

Заметим теперь, что пользуясь оценками (11)–(13) и применяя лемму 4, нетрудно убедиться, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(\lambda_j)}{\mathcal{N}'(\lambda_j)} \frac{\mathcal{N}(z)}{(z - \lambda_j)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

сходится абсолютно в топологии $H(\mathbb{C})$. Отсюда и из равенства (15) следует утверждение леммы.

Напомним, что для выпуклой функции g на $[0, \infty)$ такой, что $g(x)/x \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, функция $g^*(x) = \sup_{y>0} (xy - g(y))$, $x \geq 0$, называется *двойственной по Юнгу* с функцией g (или *преобразованием Юнга* функции g [16]). Известно [16], что g^* – выпуклая функция, $g^*(x)/x \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ и справедлива формула обращения преобразования Юнга: $(g^*)^* = g$.

Нетрудно показать, что справедливо равенство $w(r) = \sup_{x>0} (x \ln r - v_M(x))$, $r > 0$. Таким образом, $w(r) = v_M^*(\ln r)$, $r \geq 1$.

ЛЕММА 6. Пусть целая функция $U(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k z^k$ удовлетворяет оценке

$$|U(z)| \leq c_U \exp(\beta w(\Lambda|z|)), \quad z \in \mathbb{C},$$

где c_U , β , Λ – некоторые положительные постоянные. Тогда для любого $\gamma > \beta$

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|U(z) - \sum_{k=0}^n u_k z^k|}{\exp(\gamma w(\Lambda|z|))} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь неравенством Коши для коэффициентов степенного ряда и оценкой на $|U(z)|$, имеем для любого $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} |u_k| &\leq \inf_{r>0} \frac{c_U \exp(\beta w(\Lambda r))}{r^k} \leq c_U \Lambda^k \exp\left(-\sup_{R>1} (k \ln R - \beta w(R))\right) \\ &= c_U \Lambda^k \exp\left(-\beta \sup_{x>0} (\beta^{-1} k x - v_M^*(x))\right) = c_U \Lambda^k \exp(-\beta v_M(\beta^{-1} k)). \end{aligned}$$

Поэтому для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma > \beta$

$$\begin{aligned} \left| U(z) - \sum_{k=0}^n u_k z^k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| |z|^k \leq c_U \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp(-\beta v_M(\beta^{-1} k) + k \ln(\Lambda|z|)) \\ &\leq c_U \exp\left(\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} (k \ln(\Lambda|z|) - \gamma v_M(\gamma^{-1} k))\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp(\gamma v_M(\gamma^{-1} k) - \beta v_M(\beta^{-1} k)). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} (k \ln(r\Lambda) - \gamma v_M(\gamma^{-1}k)) \leq \gamma w(r\Lambda), \quad r > 0. \quad (16)$$

Для $r \in (0, \Lambda^{-1}]$ это неравенство очевидно. А для $r > \Lambda^{-1}$ имеем

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} (k \ln(r\Lambda) - \gamma v_M(\gamma^{-1}k)) \leq \sup_{x \geq 0} (x \ln(r\Lambda) - \gamma v_M(\gamma^{-1}x)) = \gamma v_M^*(\ln(r\Lambda)) = \gamma w(r\Lambda).$$

Так как функция v_M удовлетворяет условию V2, то при некоторых $\tilde{\eta} > 0$, $\tilde{m} \in \mathbb{R}$

$$\beta v_M(\beta^{-1}x) = \beta v_M((x\gamma^{-1})(\gamma\beta^{-1})) \geq \gamma v_M(\gamma^{-1}x) + \tilde{\eta}x + \tilde{m}, \quad x \geq 0.$$

Поэтому для любого $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\beta v_M(\beta^{-1}k) - \gamma v_M(\gamma^{-1}k) \geq \tilde{\eta}k + \tilde{m}. \quad (17)$$

Пользуясь оценками (16) и (17), получим, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\left| U(z) - \sum_{k=0}^n u_k z^k \right| \leq \frac{c_U \exp(-\tilde{\eta}(n+1) - \tilde{m})}{1 - \exp(-\tilde{\eta})} \exp(\gamma w(\Lambda|z|)).$$

Из этой оценки, справедливой и при $z = 0$, следует утверждение леммы.

ТЕОРЕМА. Множество $\tilde{S} = \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ нулей функции $\mathcal{N}$ является слабо достаточным для пространства P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО¹. Очевидно, топология $\tau_{\mathbb{C}}$ не слабее $\tau_{\tilde{S}}$. Покажем, что топология $\tau_{\tilde{S}}$ не слабее $\tau_{\mathbb{C}}$. Достаточно доказать такое утверждение: для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют числа $n \in \mathbb{N}$ и $B > 0$ такие, что для любой функции $F \in P$, удовлетворяющей неравенству $\|F\|_{\tilde{S}, m} \leq 1$, имеем $\|F\|_n \leq B$. Итак, пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольно и для функции $F \in P$ выполнено неравенство

$$|F(\lambda_j)| \leq \exp(\psi(\operatorname{Im} \lambda_j) + w_m(|\lambda_j|)), \quad j \in \mathbb{N}. \quad (18)$$

Выберем $s \in (0, (\sqrt{5}-1)/2)$ так, чтобы были выполнены неравенства $\sigma l(s) > \sigma + \varepsilon_m$, $(\sigma + \varepsilon_m)l(1+s) > \sigma + \varepsilon_{m+1}$. В силу свойств (2) и (4) функции l это возможно. Зафиксируем $p \in (0, s)$ и выберем $\delta \in (0, 1)$ так, чтобы были верны неравенства $(1-\delta)l(1-p^2) > 1$, $(1-\delta)\sigma l(s) > \sigma + \varepsilon_m$, $(1-\delta)(\sigma + \varepsilon_m)l(1+s) > \sigma + \varepsilon_{m+1}$. Тогда, пользуясь леммой 3 и обозначениями из этой леммы, имеем при любом $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} w_m(|z|) + s^2 w(\sigma^{-1}|z|) &\leq w_m(|z|) + s w\left(\frac{|z|}{l(s)\sigma(1-\delta)}\right) + sQ(s, \delta) \\ &\leq (1+s)w_m(|z|) + sQ(s, \delta) \\ &\leq w\left(\frac{|z|}{(\sigma + \varepsilon_m)(1-\delta)l(1+s)}\right) + sQ(s, \delta) + Q(1+s, \delta) \\ &\leq w_{m+1}(|z|) + q, \end{aligned}$$

¹При доказательстве теоремы использована идея В.В. Напалкова.

где $q = sQ(s, \delta) + Q(1 + s, \delta)$.

Отметим, что $\sigma l(1 - s^2) < \sigma + \varepsilon_m$, иначе, пользуясь невозрастанием функции l имели бы $l(1 - s^2)l((1 - s^2)^{-1}) \geq l(1 - s^2)l(1 + s) > 1$, что противоречит свойству 5) функции l . В силу невозрастания функции l тем более справедливо неравенство $\sigma l(1 - p^2) < \sigma + \varepsilon_m$.

Так как для субгармонической функции $p^2 w(\sigma^{-1}|z|)$ выполнены условия теоремы В (см. [9, лемма 10]), существует целая функция $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям

- 1) все нули $\{\zeta_j\}_{j=1}^{\infty}$ функции Φ простые и круги $\Omega_j = \{z \in \mathbb{C}: |z - \zeta_j| < d_1\}$, где d_1 – некоторое положительное число, попарно не пересекаются;
- 2) вне множества $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ при некоторых положительных B_0, B_1 выполняется неравенство

$$|p^2 w(\sigma^{-1}|z|) - \ln |\Phi(z)| \leq B_0 \ln(1 + |z|) + B_1. \quad (19)$$

Без ограничения общности считаем, что $|\zeta_j| > 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Применяя к функции Φ принцип максимума в кружках Ω_j и пользуясь при этом неравенством (6), из (19) получаем оценку

$$|\Phi(z)| \leq B_2 \exp(p^2 w(\sigma^{-1}|z|) + B_0 \ln(1 + |z|)), \quad z \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j, \quad (20)$$

где $B_2 > 0$ – некоторая постоянная.

Пусть ξ – произвольное число из интервала (p, s) . Пользуясь неравенствами (19), (20) и тем, что $\ln r = o(w(r))$ при $r \rightarrow +\infty$, получаем оценку

$$|\Phi(z)| \leq B_3 \exp(\xi^2 w(\sigma^{-1}|z|)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (21)$$

где $B_3 > 0$ – некоторая постоянная, зависящая от ξ .

Пусть $\Omega'_j = \{z \in \mathbb{C}: |z - \zeta_j| < d_1 |\zeta_j|^{-\nu}\}$, $j \in \mathbb{N}$. Действуя точно так же, как и при оценке $|\mathcal{N}(z)|$ снизу вне $\bigcup_{j=1}^{\infty} D'_j$, получим для $|\Phi(z)|$ следующую оценку снизу вне $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega'_j$:

$$|\Phi(z)| \geq C_{\Phi} \exp(p^2 w(\sigma^{-1}|z|) - (B_0 + \nu) \ln(1 + |z|)), \quad z \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega'_j, \quad (22)$$

где $C_{\Phi} > 0$ – некоторая постоянная.

Положим $\Phi_n(z) = \sum_{k=0}^n g_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. В силу леммы 4 функция $F(z)\Phi_n(z) \in P$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому согласно лемме 5 имеет место представление функции $F(z)\Phi_n(z)$ в виде абсолютно сходящегося в топологии $H(\mathbb{C})$ ряда

$$F(z)\Phi_n(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_j)\Phi_n(\lambda_j)}{\mathcal{N}'(\lambda_j)} \frac{\mathcal{N}(z)}{z - \lambda_j}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (23)$$

В силу оценок (11), (12), (18), (21), леммы 4 и выбора s ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_j)\Phi(\lambda_j)}{\mathcal{N}'(\lambda_j)} \frac{\mathcal{N}(z)}{(z - \lambda_j)}$$

сходится абсолютно в $\mathbb{C}$ и для любого $z \in \mathbb{C}$

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_j) \Phi(\lambda_j)}{\mathcal{N}'(\lambda_j)} \cdot \frac{\mathcal{N}(z)}{z - \lambda_j} \right| \leq B_4 (1 + |z|)^A \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w(\sigma^{-1}|z|)), \quad (24)$$

где $B_4 > 0$ – некоторая постоянная.

Пусть

$$r_n = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\Phi(z) - \Phi_n(z)|}{\exp(s^2 w(\sigma^{-1}|z|))}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_j)(\Phi(\lambda_j) - \Phi_n(\lambda_j))}{\mathcal{N}'(\lambda_j)} \frac{\mathcal{N}(z)}{(z - \lambda_j)} \right| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|F(\lambda_j)|}{|\mathcal{N}'(\lambda_j)|} \left| \frac{\mathcal{N}(z)}{z - \lambda_j} \right| |\Phi(\lambda_j) - \Phi_n(\lambda_j)| \\ &\leq C_7 C_6^{-1} r_n (1 + |z|)^A e^{\psi(\operatorname{Im} z) + w(\sigma^{-1}|z|)} \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{\infty} (1 + |\lambda_j|)^{\alpha + A - 1} e^{w_m(|\lambda_j|) + (s^2 - 1)w(\sigma^{-1}|\lambda_j|)}. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь выбором s , леммой 4 и тем, что по лемме 6 $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_j) \Phi_n(\lambda_j)}{\mathcal{N}'(\lambda_j)} \frac{\mathcal{N}(z)}{(z - \lambda_j)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_j) \Phi(\lambda_j)}{\mathcal{N}'(\lambda_j)} \frac{\mathcal{N}(z)}{(z - \lambda_j)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Переходя в (23) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$F(z) \Phi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F(\lambda_j) \Phi(\lambda_j)}{\mathcal{N}'(\lambda_j)} \frac{\mathcal{N}(z)}{(z - \lambda_j)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда, пользуясь оценкой (24), имеем

$$|F(z)| |\Phi(z)| \leq B_4 \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w(\sigma^{-1}|z|) + A \ln(1 + |z|)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из этой оценки и неравенства (22) для $z \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega'_j$ имеем

$$|F(z)| \leq B_4 C_{\Phi}^{-1} (1 + |z|)^{A+B_0+\nu} \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + (1 - p^2)w(\sigma^{-1}|z|)).$$

Отсюда, пользуясь леммой 3, выбором p, δ и затем леммой 4, получаем оценку

$$|F(z)| \leq B_5 \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_n(|z|)), \quad z \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega'_j, \quad (25)$$

где n – некоторое натуральное число, большее m , $B_5 > 0$ – некоторая постоянная. Далее, применяя принцип максимума к функции $F(z)$ в кружках Ω'_j и пользуясь при этом неравенствами (25), (1) и (6), получим

$$|F(z)| \leq B_6 \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_n(|z|)), \quad z \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega'_j,$$

где $B_6 > 0$ – некоторая постоянная.

Последние две оценки означают, что по произвольному $m \in \mathbb{N}$ найдены $n \in \mathbb{N}$ и постоянная $B = \max(B_5, B_6)$ такие, что для любой функции $F \in P$, удовлетворяющей неравенству $\|F\|_{\tilde{s}, m} \leq 1$, имеем $\|F\|_n \leq B$. Тем самым теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Любая функция $f \in G$ представляется в виде ряда

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{-i\lambda_j x},$$

абсолютно сходящегося в топологии пространства G . Здесь $c_j \in \mathbb{C} \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

Автор признателен рецензенту за указанные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мандельбродит С. Примакающие ряды, регуляризация последовательностей, применения. М.: ИЛ, 1955.
- [2] Мусин И. Х. Теорема типа Пэли–Винера для весового пространства бесконечно дифференцируемых функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. №6. С. 181–204.
- [3] Musin I. Kh. On the Fourier–Laplace transform of functionals on a weighted space of infinitely differentiable functions // E-print funct-an/9911067, 1999.
- [4] Напалков В. В. Достаточные множества в одном классе целых функций // Вопросы аппроксимации функций комплексного переменного. Уфа: Башкирский филиал АН СССР. Отдел физики и матем., 1980. С. 110–115.
- [5] Коробейник Ю. Ф. Абсолютно представляющие системы экспонент с мнимыми показателями в пространствах бесконечно дифференцируемых функций // Докл. РАН. 2000. Т. 372. № 1. С. 17–20.
- [6] Коробейник Ю. Ф. Абсолютно представляющие системы экспонент с мнимыми показателями в пространствах бесконечно дифференцируемых функций и продолжимость по Борелю–Уитни // Актуальные проблемы математического анализа. Ростов-на-Дону: Изд-во Гинго, 2000. С. 8–22.
- [7] Korobeinik Yu. F. On absolutely representing systems in spaces of infinitely differentiable functions // Studia Math. 2000. V. 139. № 2. P. 175–188.
- [8] Напалков В. В. О сравнении топологий в некоторых пространствах целых функций // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 4. С. 827–830.
- [9] Мусин И. Х. Сюръективность линейного дифференциального оператора в весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 5. С. 713–724.
- [10] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.
- [11] Мусин И. Х. О преобразовании Фурье–Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 10. С. 57–86.
- [12] Ehrenpreis L. Fourier Analysis in Several Complex Variables. New York: Wiley Interscience Publ., 1970.
- [13] Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация субгармонических функций // Anal. Math. 1985. V. 11. № 3. P. 257–282.
- [14] Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.
- [15] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
- [16] Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа
E-mail: musin@imat.rb.ru

Поступило
29.03.2001
Исправленный вариант
17.06.2002