Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Авсянкин, Об алгебре парных интегральных операторов с однородными ядрами, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 483–493

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm199>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:45:48

УДК 517.948

ОБ АЛГЕБРЕ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

О. Г. Авсянкин

В работе изучается банахова алгебра $\mathcal{A}$, порожденная многомерными парными интегральными операторами с однородными ядрами. Описываются необходимые и достаточные условия нётеровости операторов из алгебры $\mathcal{A}$ и указывается формула для вычисления индекса.

Библиография: 9 названий.

Введение. Хорошо известна роль, которую играют интегральные операторы с однородными ядрами в теории дифференциальных уравнений в частных производных, в дифференциальной геометрии и механике. Изучение таких операторов в многомерной ситуации было начато в работах Михайлова (см. [1], а также библиографию в [1]) и продолжено в [2]–[5].

В данной работе изучается банахова алгебра $\mathcal{A}$, порожденная многомерными парными интегральными операторами с ядрами, однородными степени $-n$ и инвариантными относительно всех вращений в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. На алгебре $\mathcal{A}$ строится символическое исчисление, в терминах которого описываются необходимые и достаточные условия нётеровости операторов из этой алгебры и указывается формула для вычисления индекса. Исследуется также матричный аналог алгебры $\mathcal{A}$.

В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$; $x' = x/|x|$; $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$; $dx = dx_1 \dots dx_n$; $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $\mathbb{Z}_+$ – множество всех целых неотрицательных чисел; $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ – компактификация множества $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой; $d_n(m)$ – размерность пространства сферических гармоник порядка m :

$$d_n(m) = (n + 2m - 2) \frac{(n + m - 3)!}{m! (n - 2)!};$$

$P_m(t)$ – многочлены Лежандра, определяемые следующим образом:

$$P_m(t) = \begin{cases} \cos(m \arccos t), & n = 2, \\ (C_{m+n-3}^m)^{-1} C_m^{(n-2)/2}(t), & n \geq 3, \end{cases}$$

где $C_m^{(n-2)/2}(t)$ – многочлены Гегенбауэра; $\text{Sp } a$ и $\text{Srg } a$ – спектр и спектральный радиус элемента a соответственно.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00046а.

1. Нётеровость и композиции парных интегральных операторов с однородными ядрами. В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим оператор

$$(A\varphi)(x) = \lambda\varphi(x) - \int_{|y| \leq 1} k_1(x, y)\varphi(y) dy - \int_{|y| > 1} k_2(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

предполагая, что $\lambda \in \mathbb{C}$, а функция $k_j(x, y)$ ($j = 1, 2$), определенная в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяет условиям:

1°) однородности степени $-n$, т.е.

$$k_j(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k_j(x, y) \quad \forall \alpha > 0;$$

2°) инвариантности относительно группы $SO(n)$ вращений пространства $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$k_j(\omega(x), \omega(y)) = k_j(x, y) \quad \forall \omega \in SO(n);$$

3°) суммируемости, т.е.

$$k_j = \int_{\mathbb{R}^n} |k_j(e_1, y)| |y|^{-n/p} dy < \infty.$$

Представим оператор A в другом виде. Введем оператор

$$(K\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

ядро $k(x, y)$ которого удовлетворяет условиям 1°)–3°). Далее, определим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, проектор P по формуле

$$(P\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad (2)$$

и положим $Q = I - P$. В этих обозначениях оператор A записывается в виде

$$A = \lambda I - K_1 P - K_2 Q. \quad (3)$$

Известно (см. [1]), что оператор K вида (1) ограничен в $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, причем $\|K\| \leq k$. Тогда оператор A также ограничен, причем $\|A\| \leq |\lambda| + k_1 + k_2$.

Вопрос о нётеровости оператора A изучался в работе [5]. Для удобства приведем здесь полученный в [5] результат. Назовем *символом* оператора A пару функций $(\sigma_1(m, \xi), \sigma_2(m, \xi))$, определенных на компакте $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ равенствами

$$\sigma_j(m, \xi) = \lambda - \int_{\mathbb{R}^n} k_j(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+i\xi} dy, \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы оператор A был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы его символ был невырожденным, т.е.

$$\sigma_1(m, \xi) \neq 0, \quad \sigma_2(m, \xi) \neq 0 \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}.$$

Если это условие выполнено, то индекс оператора A вычисляется по формуле

$$\text{ind } A = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind}_{\xi} \frac{\sigma_2(m, \xi)}{\sigma_1(m, \xi)}, \quad (5)$$

где $\text{ind}_{\xi} f(m, \xi)$ – индекс функции $f(m, \xi)$ при фиксированном значении m .

В работе [5] эта теорема доказана другим методом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что оператор K вида (1) квазикоммутирует с проектором P , т.е. их коммутатор $KP - PK$ компактен. Это следует из того, что

$$KP - PK = (P + Q)KP - PK(P + Q) = QKP - PKQ$$

и операторы QKP и PKQ являются компактными в $L_p(\mathbb{R}^n)$ (см. [3, с. 380]).

Перепишем теперь равенство (3) в виде

$$A = (\lambda I - K_1)P + (\lambda I - K_2)Q.$$

Как известно (см., например, [6, с. 9]), оператор A нётеров тогда и только тогда, когда нётеровы операторы $(\lambda I - K_1)P + Q$ и $(\lambda I - K_2)Q + P$, причем

$$\text{ind } A = \text{ind}((\lambda I - K_1)P + Q) + \text{ind}((\lambda I - K_2)Q + P).$$

В свою очередь, оператор $(\lambda I - K_1)P + Q$ нётеров тогда и только тогда, когда нётеров оператор $P(\lambda I - K_1)P$, причем их индексы равны. Согласно результатам работы [4] оператор $P(\lambda I - K_1)P$ нётеров в том и только том случае, когда

$$\sigma_1(m, \xi) \neq 0 \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}.$$

Если это условие выполнено, то

$$\text{ind}(P(\lambda I - K_1)P) = - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind}_{\xi} \sigma_1(m, \xi).$$

Аналогично устанавливается, что необходимым и достаточным условием нётеровости оператора $(\lambda I - K_2)Q + P$ является условие

$$\sigma_2(m, \xi) \neq 0 \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R};$$

при этом

$$\text{ind}((\lambda I - K_2)Q + P) = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind}_{\xi} \sigma_2(m, \xi).$$

Из всего вышесказанного следует справедливость теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следует отметить, что поскольку, начиная с некоторого m_0 , все индексы $\text{ind}_\xi(\sigma_2(m, \xi)/\sigma_1(m, \xi))$ равны нулю, то правая часть в формуле (5) фактически представляет собой конечную сумму.

Изучим композиции парных операторов с однородными ядрами.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A_1 и A_2 – операторы вида (3). Тогда $A_1 A_2 = A + T$, где A – оператор вида (3), а T – компактный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для операторов $A_1 = K_1 P + K_2 Q$ и $A_2 = K_3 P + K_4 Q$. Непосредственно имеем

$$A_1 A_2 = K_1 K_3 P + K_2 K_4 Q + T,$$

где $T = -K_1 Q K_3 P + K_1 P K_4 Q + K_2 Q K_3 P - K_2 P K_4 Q$ – компактный оператор. Остается лишь заметить, что операторы $K_1 K_3$ и $K_2 K_4$ суть операторы вида (1).

Учитывая, что операторы вида (1) коммутируют между собой [3, с. 380], получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A_1 и A_2 – операторы вида (3). Тогда коммутатор $A_1 A_2 - A_2 A_1$ является компактным в $L_p(\mathbb{R}^n)$ оператором.

2. Фактор-алгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$, $1 \leq p \leq \infty$, содержащую все операторы A вида (3). Она представляет собой замыкание по операторной норме множества

$$\mathfrak{A}_0 = \left\{ \sum_i \prod_j (\lambda_{ij} I - (K_1)_{ij} P - (K_2)_{ij} Q) \right\},$$

где суммы и произведения конечны. Пусть $\mathfrak{I}$ – множество всех компактных операторов, содержащихся в $\mathfrak{A}$. Ясно, что $\mathfrak{I}$ является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{A}$. Рассмотрим фактор-алгебру $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$. Из теоремы 2 сразу следует, что элементы фактор-алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$, содержащие хотя бы один оператор из множества $\mathfrak{A}_0$, имеют вид $\lambda I - K_1 P - K_2 Q + \mathfrak{I}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а K_1, K_2 – операторы вида (1), и множество

$$(\mathfrak{A}/\mathfrak{I})_0 = \{\lambda I - K_1 P - K_2 Q + \mathfrak{I}\}$$

плотно в алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$.

Заметим, что фактор-алгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ коммутативна. В самом деле, коммутативность элементов из множества $(\mathfrak{A}/\mathfrak{I})_0$ вытекает из следствия 1. Для произвольных элементов из алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ коммутативность проверяется с помощью приближения элементами из множества $(\mathfrak{A}/\mathfrak{I})_0$.

В соответствии с общими схемами, изложенными в [7]–[9], приступим к изучению коммутативной банаховой алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$.

Каждому элементу

$$\lambda I - K_1 P - K_2 Q + \mathfrak{I} \in (\mathfrak{A}/\mathfrak{I})_0$$

поставим в соответствие вектор-функцию $(\sigma_1(m, \xi), \sigma_2(m, \xi))$, компоненты которой определяются равенствами (4). Эту вектор-функцию назовем *символом* элемента $\lambda I - K_1 P - K_2 Q + \mathfrak{I}$. Нетрудно проверить, что сумме и произведению элементов из множества $(\mathfrak{A}/\mathfrak{I})_0$ отвечают сумма и произведение их символов.

Обозначим через $C(\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})$ банахово пространство всех непрерывных на компакте $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ функций с нормой

$$\|f(m, \xi)\|_C = \sup_{\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}} |f(m, \xi)|.$$

Через $[C(\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})]^2$ обозначим пространство двумерных вектор-функций с компонентами из $C(\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})$ и нормой

$$\|(f_1(m, \xi), f_2(m, \xi))\|_C = \max\{\|f_1(m, \xi)\|_C, \|f_2(m, \xi)\|_C\}.$$

Для дальнейшего нам потребуется

ЛЕММА 1. *Для любого элемента $\lambda I - K_1 P - K_2 Q + \mathfrak{T} \in (\mathfrak{A}/\mathfrak{T})_0$ и его символа $(\sigma_1(m, \xi), \sigma_2(m, \xi))$ справедливо неравенство*

$$\|(\sigma_1(m, \xi), \sigma_2(m, \xi))\|_C \leq \|\lambda I - K_1 P - K_2 Q + \mathfrak{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{T}}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\alpha = \|(\sigma_1(m, \xi), \sigma_2(m, \xi))\|_C$. Для определенности будем считать, что

$$\alpha = \|\sigma_1(m, \xi)\|_C = \sup_{\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}} |\sigma_1(m, \xi)|.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $(m_0, \xi_0) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ такая, что $|\sigma_1(m_0, \xi_0)| > \alpha - \varepsilon$. Рассмотрим элемент

$$(\lambda I - K_1 P - K_2 Q + \mathfrak{T}) - (\sigma_1(m_0, \xi_0)I + \mathfrak{T}),$$

символом которого является вектор-функция

$$(\sigma_1(m, \xi) - \sigma_1(m_0, \xi_0), \sigma_2(m, \xi) - \sigma_1(m_0, \xi_0)).$$

Поскольку первая компонента символа обращается в нуль в точке (m_0, ξ_0) , оператор $\lambda I - K_1 P - K_2 Q - \sigma_1(m_0, \xi_0)I$ не нётеров. Но тогда соответствующий класс вычетов $\lambda I - K_1 P - K_2 Q - \sigma_1(m_0, \xi_0)I + \mathfrak{T}$ не обратим в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$, т.е. число $\sigma_1(m_0, \xi_0) \in \text{Spr}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{T}}(\lambda I - K_1 P - K_2 Q + \mathfrak{T})$. Отсюда следует, что

$$\alpha - \varepsilon < |\sigma_1(m_0, \xi_0)| \leq \text{Spr}(\lambda I - K_1 P - K_2 Q + \mathfrak{T}).$$

В силу произвольности ε заключаем, что $\alpha \leq \text{Spr}(\lambda I - K_1 P - K_2 Q + \mathfrak{T})$. Учитывая, что $\text{Spr}(\lambda I - K_1 P - K_2 Q + \mathfrak{T}) \leq \|\lambda I - K_1 P - K_2 Q + \mathfrak{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{T}}$, получаем неравенство (6). Лемма доказана.

Теперь определим понятие символа для произвольного элемента из алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$. Для элементов вида $\lambda I - K_1 P - K_2 Q + \mathfrak{T}$ это сделано выше. Пусть

$$A + \mathfrak{T} \in (\mathfrak{A}/\mathfrak{T}) \setminus (\mathfrak{A}/\mathfrak{T})_0.$$

Тогда найдется такая последовательность $\{\lambda_j I - K_{1j} P - K_{2j} Q + \mathfrak{T}\}_{j=1}^{\infty}$, что

$$\|(A + \mathfrak{T}) - (\lambda_j I - K_{1j} P - K_{2j} Q + \mathfrak{T})\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{T}} \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

В силу оценки (6) последовательность $\{(\sigma_{1j}(m, \xi), \sigma_{2j}(m, \xi))\}_{j=1}^{\infty}$ символов элементов $\lambda_j I - K_{1j} P - K_{2j} Q + \mathfrak{T}$ сходится по норме пространства $[C(\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})]^2$ к некоторой вектор-функции $(\sigma_1(m, \xi), \sigma_2(m, \xi)) \in [C(\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})]^2$, которую будем называть *символом* элемента $A + \mathfrak{T}$.

Оценка (6) распространяется по непрерывности на всю алгебру $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$, т.е. для любого элемента $A + \mathfrak{T} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ и его символа $(\sigma_1(m, \xi), \sigma_2(m, \xi))$ справедливо неравенство

$$\|(\sigma_1(m, \xi), \sigma_2(m, \xi))\|_C \leq \|A + \mathfrak{T}\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{T}}. \quad (7)$$

Дадим описание множества максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество, образованное двумя экземплярами $(\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})_1$ и $(\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})_2$ компакта $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$, путем отождествления бесконечно удаленных точек. Каждому элементу $A + \mathfrak{T} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ с символом $(\sigma_1(m, \xi), \sigma_2(m, \xi))$ поставим в соответствие функцию

$$\sigma(m, \xi) = \begin{cases} \sigma_1(m, \xi), & (m, \xi) \in (\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})_1, \\ \sigma_2(m, \xi), & (m, \xi) \in (\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R})_2, \end{cases} \quad (8)$$

определенную на компакте $\mathfrak{M}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (m_0, ξ_0) – произвольная точка компакта $\mathfrak{M}$. Множество $\mathcal{M}_{(m_0, \xi_0)}$ всех элементов алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$, для которых функция $\sigma(m, \xi)$ обращается в нуль в точке (m_0, ξ_0) , является максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$. Других максимальных идеалов в этой алгебре нет. Преобразование Гельфанда элемента $A + \mathfrak{T} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ совпадает с функцией $\sigma(m, \xi)$, т.е.

$$\widehat{A + \mathfrak{T}}(\mathcal{M}_{(m, \xi)}) = \sigma(m, \xi). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разобьем на несколько этапов.

1) Покажем, что множество $\mathcal{M}_{(m_0, \xi_0)}$ является максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$. Для этого на алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ определим функционал

$$f_{(m_0, \xi_0)}(A + \mathfrak{T}) = \sigma(m_0, \xi_0).$$

Здесь $\sigma(m, \xi)$ – функция, заданная на компакте $\mathfrak{M}$ по формуле (8). Данный функционал нетривиален, так как $f_{(m_0, \xi_0)}(I + \mathfrak{T}) = 1$. Далее, легко видеть, что функционал $f_{(m_0, \xi_0)}$ мультипликативен и в силу оценки (7) ограничен. Тогда ядро этого функционала

$$\text{Ker } f_{(m_0, \xi_0)} = \{A + \mathfrak{T} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{T} : \sigma(m_0, \xi_0) = 0\} = \mathcal{M}_{(m_0, \xi_0)}$$

является максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$.

2) Покажем теперь, что максимальными идеалами указанного типа исчерпываются все максимальные идеалы алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$. Пусть $\mathcal{M}$ – некоторый максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ и $f_{\mathcal{M}}$ – порождаемый им мультипликативный функционал.

Вначале покажем, что существует такая точка $(m_0, \xi_0) \in \mathfrak{M}$, что для любого элемента $A + \mathfrak{T} \in \mathcal{M} \cap (\mathfrak{A}/\mathfrak{T})_0$ справедливо равенство

$$0 = f_{\mathcal{M}}(A + \mathfrak{T}) = \sigma(m_0, \xi_0).$$

Допустим, что это не так, т.е. для любой точки $(m_0, \xi_0) \in \mathfrak{M}$ найдется такой элемент $\lambda_0 I - K_{01}P - K_{02}Q + \mathfrak{T} \in \mathcal{M}$, что

$$0 = f_{\mathcal{M}}(\lambda_0 I - K_{01}P - K_{02}Q + \mathfrak{T}) \neq \sigma_0(m_0, \xi_0).$$

Рассмотрим окрестность $U(m_0, \xi_0)$ точки (m_0, ξ_0) такую, что $|\sigma_0(m, \xi)| > 0$ для всех $(m, \xi) \in U(m_0, \xi_0)$. Множество $\{U(m, \xi)\}$ всех таких окрестностей образует открытое покрытие компакта $\mathfrak{M}$. Выберем из него конечное подпокрытие $\{U(m_j, \xi_j)\}_{j=1}^N$. При этом точке (m_j, ξ_j) отвечает элемент $\lambda_j I - K_{1j}P - K_{2j}Q + \mathfrak{T}$ с символом $(\sigma_{1j}(m, \xi), \sigma_{2j}(m, \xi))$, для которого функция $\sigma_j(m, \xi)$, заданная равенством (8), удовлетворяет условию

$$\sigma_j(m, \xi) \neq 0 \quad \forall (m, \xi) \in U(m_j, \xi_j).$$

Введем элемент

$$\bar{\lambda}_j I - \tilde{K}_{1j}P - \tilde{K}_{2j}Q + \mathfrak{T},$$

где оператор $\tilde{K}_{sj}$ ($s = 1, 2; j = 1, 2, \dots, N$) определяется равенством

$$(\tilde{K}_{sj}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{k_{sj}(y, x)} \left(\frac{|y|}{|x|} \right)^{n/p-n/p'} \varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Легко проверить, что символом элемента $\bar{\lambda}_j I - \tilde{K}_{1j}P - \tilde{K}_{2j}Q + \mathfrak{T}$ является вектор-функция $(\sigma_{1j}(m, \xi), \sigma_{2j}(m, \xi))$. Рассмотрим элемент

$$C + \mathfrak{T} = \sum_{j=1}^N (\lambda_j I - K_{1j}P - K_{2j}Q + \mathfrak{T})(\bar{\lambda}_j I - \tilde{K}_{1j}P - \tilde{K}_{2j}Q + \mathfrak{T}) \in (\mathfrak{A}/\mathfrak{T})_0,$$

символ которого есть пара функций

$$\left(\sum_{j=1}^N |\sigma_{1j}(m, \xi)|^2, \sum_{j=1}^N |\sigma_{2j}(m, \xi)|^2 \right).$$

Очевидно, что символ элемента $C + \mathfrak{T}$ является невырожденным. Тогда учитывая, что элемент $C + \mathfrak{T}$ принадлежит множеству $(\mathfrak{A}/\mathfrak{T})_0$ и применяя теорему 1, заключаем, что элемент $C + \mathfrak{T}$ обратим в алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$. Но это противоречит тому, что $C + \mathfrak{T} \in \mathcal{M}$.

Возьмем теперь произвольный элемент $A + \mathfrak{T} \in (\mathfrak{A}/\mathfrak{T})_0$. Тогда

$$f_{\mathcal{M}}(A + \mathfrak{T}) = \sigma(m_0, \xi_0), \quad (10)$$

где (m_0, ξ_0) – точка, определенная выше. Действительно, положим $f_{\mathcal{M}}(A + \mathfrak{T}) = z_0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, и рассмотрим элемент $B + \mathfrak{T} = (A + \mathfrak{T}) - (z_0 I + \mathfrak{T})$. Поскольку $f_{\mathcal{M}}(B + \mathfrak{T}) =$

$f_{\mathcal{M}}(A + \mathfrak{I}) - z_0 f_{\mathcal{M}}(I + \mathfrak{I}) = 0$, то $B + \mathfrak{I} \in \mathcal{M}$. Но тогда по доказанному выше $\sigma(m_0, \xi_0) - z_0 = 0$, т.е. справедливо (10).

Таким образом, доказано, что существует точка $(m_0, \xi_0) \in \mathfrak{M}$ такая, что для любого $A + \mathfrak{I} \in (\mathfrak{A}/\mathfrak{I})_0$ выполнено равенство (10). Поскольку множество $(\mathfrak{A}/\mathfrak{I})_0$ плотно в алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$, то для любого элемента $A + \mathfrak{I} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ с символом $(\sigma_1(m, \xi), \sigma_2(m, \xi))$ справедливо равенство

$$f_{\mathcal{M}}(A + \mathfrak{I}) = \sigma(m_0, \xi_0),$$

где $\sigma(m, \xi)$ – функция, определенная формулой (8). Отсюда следует, что $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{(m_0, \xi_0)}$.

3) Исходя из вышесказанного, равенство (9) получается из определения преобразования Гельфанда. Теорема доказана.

Теперь мы можем описать необходимые и достаточные условия обратимости в алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$. Справедлива

ТЕОРЕМА 4. Пусть $A + \mathfrak{I} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$. Для того чтобы элемент $A + \mathfrak{I}$ был обратим в алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$, необходимо и достаточно, чтобы его символ был невырожденным, т.е.

$$\sigma_1(m, \xi) \neq 0, \quad \sigma_2(m, \xi) \neq 0 \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (11) является необходимым и достаточным для того, чтобы $\sigma(m, \xi) \neq 0$ для всех $(m, \xi) \in \mathfrak{M}$. В свою очередь это условие необходимо и достаточно для того, чтобы элемент $A + \mathfrak{I}$ не принадлежал ни одному максимальному идеалу алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$. Последнее равносильно обратимости элемента $A + \mathfrak{I}$ в алгебре $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$.

3. Критерий нётеровости в алгебре $\mathfrak{A}$. Перейдем к изучению алгебры $\mathfrak{A}$.

Назовем *символом* оператора $A \in \mathfrak{A}$ пару функций $(\sigma_1(m, \xi), \sigma_2(m, \xi))$, являющуюся символом класса вычетов $A + \mathfrak{I}$. Таким образом, все элементы целого класса вычетов имеют один и тот же символ. В дальнейшем, желая подчеркнуть, что речь идет о символе именно оператора A , а не класса вычетов $A + \mathfrak{I}$, будем писать $(\sigma_1^{(A)}(m, \xi), \sigma_2^{(A)}(m, \xi))$ вместо $(\sigma_1(m, \xi), \sigma_2(m, \xi))$.

ЛЕММА 2. Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Тогда если оператор A нётеров, то выполнено условие

$$\sigma_1^{(A)}(m, \xi) \neq 0, \quad \sigma_2^{(A)}(m, \xi) \neq 0 \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $A \in \mathfrak{A}_0$. Тогда найдется оператор $\lambda I - K_1 P - K_2 Q$ такой, что

$$A = \lambda I - K_1 P - K_2 Q + T, \quad \text{где } T \in \mathfrak{I}.$$

Операторы A и $\lambda I - K_1 P - K_2 Q$ имеют один и тот же символ $(\sigma_1^{(A)}(m, \xi), \sigma_2^{(A)}(m, \xi))$. Поскольку оператор A нётеров, то и оператор $\lambda I - K_1 P - K_2 Q$ нётеров. Остается лишь воспользоваться теоремой 1.

Пусть теперь A – произвольный оператор из алгебры $\mathfrak{A}$. Предположим, что хотя бы одна компонента его символа обращается в нуль в некоторой точке $(m_0, \xi_0) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$, например, $\sigma_1^{(A)}(m_0, \xi_0) = 0$. Так как оператор A нётеров, то найдется такое число

$\delta > 0$, что все операторы из δ -окрестности оператора A нётеровы. Подберем оператор $A_0 \in \mathfrak{A}_0$ с символом $(\sigma_{01}(m, \xi), \sigma_{02}(m, \xi))$ такой, что $\|A - A_0\| < \delta/2$. Тогда $\|(A + \mathfrak{T}) - (A_0 + \mathfrak{T})\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{T}} < \delta/2$ и в силу неравенства (7)

$$|\sigma_1^{(A)}(m_0, \xi_0) - \sigma_{01}(m_0, \xi_0)| < \frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, $|\sigma_{01}(m_0, \xi_0)| < \delta/2$. Рассмотрим оператор $A_0 - \sigma_{01}(m_0, \xi_0)I$. Поскольку $\|A - (A_0 - \sigma_{01}(m_0, \xi_0)I)\| < \delta$, то оператор $A_0 - \sigma_{01}(m_0, \xi_0)I$ нётеров. Так как оператор $A_0 - \sigma_{01}(m_0, \xi_0)I$ принадлежит $\mathfrak{A}_0$, по доказанному выше его символ

$$(\sigma_{01}(m, \xi) - \sigma_{01}(m_0, \xi_0), \sigma_{02}(m, \xi) - \sigma_{01}(m_0, \xi_0))$$

не вырождается на компакте $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$. Но как легко видеть, первая компонента символа обращается в нуль в точке (m_0, ξ_0) . Полученное противоречие завершает доказательство.

Следующая теорема является основным результатом данной работы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Для того чтобы оператор A был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы его символ $(\sigma_1^{(A)}(m, \xi), \sigma_2^{(A)}(m, \xi))$ удовлетворял условиям (12). Если эти условия выполнены, то индекс оператора A вычисляется по формуле

$$\text{ind } A = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind}_{\xi} \frac{\sigma_2^{(A)}(m, \xi)}{\sigma_1^{(A)}(m, \xi)}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия (12) установлена в лемме 2. Достаточность сразу следует из теоремы 4.

Перейдем к доказательству формулы (13). Пусть $A \in \mathfrak{A}_0$. Тогда найдется такой оператор $\lambda I - K_1 P - K_2 Q$, что

$$A = \lambda I - K_1 P - K_2 Q + T, \quad \text{где } T \in \mathfrak{T}.$$

Операторы A и $\lambda I - K_1 P - K_2 Q$ одновременно нётеровы и их индексы равны. Учитывая, что эти операторы имеют один и тот же символ, и применяя теорему 1, получаем требуемый результат.

Пусть A – произвольный оператор из алгебры $\mathfrak{A}$. Рассмотрим последовательность $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}_0$ такую, что $\|A_j - A\| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Тогда $\text{ind } A = \lim_{j \rightarrow \infty} \text{ind } A_j$, причем числовая последовательность $\{\text{ind } A_j\}_{j=1}^{\infty}$ стабилизируется, начиная с некоторого j_1 . Далее, из оценки (7) следует, что

$$\left\| \frac{\sigma_{2j}(m, \xi)}{\sigma_{1j}(m, \xi)} - \frac{\sigma_2^{(A)}(m, \xi)}{\sigma_1^{(A)}(m, \xi)} \right\|_C \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Но тогда

$$\text{ind}_{\xi} \frac{\sigma_2^{(A)}(m, \xi)}{\sigma_1^{(A)}(m, \xi)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \text{ind}_{\xi} \frac{\sigma_{2j}(m, \xi)}{\sigma_{1j}(m, \xi)},$$

причем существует такое число j_2 , что для всех $m \in \mathbb{Z}_+$ числовая последовательность $\{\text{ind}_\xi(\sigma_{2j}(m, \xi)/\sigma_{1j}(m, \xi))\}_{j=1}^\infty$ стабилизируется, начиная с j_2 . Положим $s = \max\{j_1, j_2\}$. Тогда

$$\text{ind } A = \text{ind } A_s = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind}_\xi \frac{\sigma_{2s}(m, \xi)}{\sigma_{1s}(m, \xi)} = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind}_\xi \frac{\sigma_2^{(A)}(m, \xi)}{\sigma_1^{(A)}(m, \xi)}.$$

Теорема доказана.

4. Матричный случай. Обозначим через $L_p^s(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, пространство s -мерных вектор-функций с компонентами из $L_p(\mathbb{R}^n)$ и рассмотрим в этом пространстве оператор

$$(K\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $k(x, y) = (k_{jl}(x, y))_{j,l=1}^s$ – матрица-функция s -го порядка, элементы которой удовлетворяют условиям $1^\circ) - 3^\circ)$. Определим также проектор P по формуле

$$P = (P\delta_{jl})_{j,l=1}^s,$$

где P задается равенством (2), и положим $Q = I - P$. Рассмотрим парный оператор

$$A = \lambda I - K_1 P - K_2 Q. \quad (14)$$

Изучим условия нётеровости в алгебре, порождаемой операторами вида (14).

Пусть $\mathcal{L}(L_p^s(\mathbb{R}^n))$ – алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве $L_p^s(\mathbb{R}^n)$. Через $\mathcal{L}^{s \times s}(L_p(\mathbb{R}^n))$ обозначим алгебру матриц порядка s , составленных из элементов алгебры $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$. Известно (см. [9, с. 12]), что $\mathcal{L}(L_p^s(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{L}^{s \times s}(L_p(\mathbb{R}^n))$. Таким образом, каждый оператор $B \in \mathcal{L}(L_p^s(\mathbb{R}^n))$ представим в виде матрицы $B = (B_{jl})_{j,l=1}^s$, где $B_{jl} \in \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$, $j, l = 1, 2, \dots, s$. Норма оператора B в пространстве $\mathcal{L}(L_p^s(\mathbb{R}^n))$ определяется равенством

$$\|B\| = \max_{1 \leq l \leq s} \sum_{j=1}^s \|B_{jl}\|.$$

Обозначим через $\mathfrak{A}^{s \times s}$ наименьшую замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_p^s(\mathbb{R}^n))$, содержащую все операторы A вида (14). Заметим, что если $A = (A_{jl})_{j,l=1}^s \in \mathfrak{A}^{s \times s}$, то операторы $A_{jl} \in \mathfrak{A}$ для всех $j, l = 1, 2, \dots, s$. Каждому оператору $A = (A_{jl})_{j,l=1}^s \in \mathfrak{A}^{s \times s}$ поставим в соответствие две матрицы-функции

$$\mathfrak{S}_1(m, \xi) = (\sigma_{jl}^{(1)}(m, \xi))_{j,l=1}^s, \quad \mathfrak{S}_2(m, \xi) = (\sigma_{jl}^{(2)}(m, \xi))_{j,l=1}^s,$$

определенные на компакте $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$. Здесь $(\sigma_{jl}^{(1)}(m, \xi), \sigma_{jl}^{(2)}(m, \xi))$ – символ оператора $A_{jl} \in \mathfrak{A}$. Пару матриц-функций $(\mathfrak{S}_1(m, \xi), \mathfrak{S}_2(m, \xi))$ будем называть *символом* оператора A .

ТЕОРЕМА 6. Пусть $A \in \mathfrak{A}^{s \times s}$. Для того чтобы оператор A был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\det \mathfrak{S}_1(m, \xi) \neq 0, \quad \det \mathfrak{S}_2(m, \xi) \neq 0 \quad \forall (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}. \quad (15)$$

Если условие (15) выполнено, то индекс оператора A вычисляется по формуле

$$\text{ind } A = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind}_{\xi} \det \mathfrak{S}_2(m, \xi) \det \mathfrak{S}_1(m, \xi). \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $A = (A_{jl})_{j,l=1}^s$. Поскольку операторы $A_{jl} \in \mathfrak{A}$, они коммутируют между собой с точностью до компактного оператора. Тогда, как известно, необходимым и достаточным условием нётеровости оператора A в $\mathcal{L}^{s \times s}(L_p(\mathbb{R}^n))$ является нётеровость оператора $\det A$ в $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$. Очевидно, что оператор $\det A$ принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$. Следовательно, по теореме 5 оператор $\det A$ нётеров тогда и только тогда, когда его символ не обращается в нуль ни в одной точке компакта $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$. Но символом оператора $\det A$ является пара функций $(\det \mathfrak{S}_1(m, \xi), \det \mathfrak{S}_2(m, \xi))$. Таким образом, оператор A нётеров тогда и только тогда, когда выполнено условие (15).

Формула (16) доказывается аналогично формуле (13). Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Н.К. Карапетянцу за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений // Math. Nachr. 1977. V. 76. P. 91–107.
- [2] Карапетянц Н. К. Интегральные операторы свертки и с однородными ядрами с переменными коэффициентами. Дисс. ... д. ф.-м. н. Тбилиси: Матем. ин-т им. Размадзе, 1989.
- [3] Karapetians N., Samko S. Equations with Involutive Operators. Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2001.
- [4] Авсянкин О. Г., Карапетянц Н. К. Многомерные интегральные операторы с однородными степени $-n$ ядрами // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 6. С. 727–729.
- [5] Авсянкин О. Г., Карапетянц Н. К. Парные интегральные операторы с однородными ядрами и их приложения // Деп. ВИНТИ 15.12.98 № 3672–В98. М.: ВИНТИ, 1998.
- [6] Карапетянц Н. К., Самко С. Г. Уравнения с инволютивными операторами и их приложения. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1988.
- [7] Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шиллов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960.
- [8] Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.
- [9] Крупник Н. Я. Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы. Кипинев: Штиинца, 1984.