Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Бобр, О разрешимости конечных неприводимых линейных групп с холловской TI -подгруппой, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 494–501

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm200>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:58:14

УДК 512.542

О РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП С ХОЛЛОВСКОЙ TI -ПОДГРУППОЙ

В. В. Бобр

Найдены условия при которых π -разрешимая комплексная линейная группа относительно небольшой степени будет разрешимой.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Развивая результаты, полученные в работах [1], [2], Айзекс [3] доказал, что если неприводимая комплексная линейная группа G степени n p -разрешима, $n < 2p$ и силовская подгруппа P неинвариантна в G , то $n = p - 1, p, p + 1, 2(p - 1)$ или $2p - 1$, причем n есть степень простого числа. Кроме того, наряду с Уинтером [4], показано, что в этом случае группа G будет либо разрешимой, либо $n = 2(|H| - 1)$ и G будет содержать главный фактор, изоморфный $PSL(2, 5)$. Предположив, что подгруппа H нечетного порядка разрешимой группы G будет TI -множеством, Ядченко [5] установил, что либо H инвариантна в G , либо n делится на такую степень f простого числа, что $f \equiv -1, 0$ или $1 \pmod{|H|}$. В [6] утверждается, что этот результат верен и для π -разрешимых групп степени $n < 2|H|$. Возникает вопрос: будет ли в данной ситуации группа G разрешимой? Решению этой задачи и посвящена данная работа.

ТЕОРЕМА. Пусть G – конечная π -разрешимая неприводимая комплексная линейная группа степени $n < 2|H|$, где H – ее неинвариантная холловская π -подгруппа нечетного порядка, которая является TI -множеством в G . Тогда либо G разрешима, либо $n = 2(|H| - 1)$ и G содержит главный фактор, изоморфный $PSL(2, 5)$.

2. Некоторые обозначения и предварительные результаты. Всюду под группой будем понимать конечную группу, а под характером – комплексный характер. Через $\pi(G)$ обозначим множество всех простых делителей порядка группы G , $\pi \subseteq \pi(G)$ и $\pi' = \pi(G) \setminus \pi$. Если $M \triangleleft G$ и $\varphi \in \text{Irr}(M)$, то $I_G(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi^g = \varphi\}$ – группа инерций характера φ в группе G . Пусть $G = AB$, $A \triangleleft G$, $(|A|, |B|) = 1$ и $\varphi \in \text{Irr}(B)$. Если $A \subseteq I_G(\varphi)$, то $\varphi \in \text{Irr}_A(B)$ и $\pi(A, B): \text{Irr}_A(B) \rightarrow \text{Irr}(C_B(A))$ – отображение Глаубермана. Подмножество X элементов группы G называется TI -множеством, если $X^g = X$ или $X^g \cap X \subseteq \{1\}$ для каждого $g \in G$. Остальные обозначения стандартны, их можно найти, например, в [7] или [8].

Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы G . Пусть G – минимальный контрпример.

Отметим, что согласно работе [6] степень точного неприводимого характера χ группы G может принимать только следующие значения: $n = \chi(1) = |H| - 1, |H|, |H| + 1, 2(|H| - 1)$ или $2|H| - 1$, причем n есть степень простого π' -числа, за исключением, может быть, $n = |H|$. Следующие леммы описывают еще некоторые свойства минимального контрпримера к основной теореме.

ЛЕММА 1. *Выполнено $O_{\pi'}(G) \neq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из того, что группа G π -разрешима, а ее подгруппа H является TI -множеством в G .

ЛЕММА 2. *G не содержит подгрупп индекса 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть M будет такой подгруппой группы G . То есть $|G : M| = 2$ и $M \triangleleft G$. Так как подгруппа H нечетного порядка и $H \not\triangleleft G$, то $H \not\triangleleft M$. Если характер χ_M неприводим, то согласно предположению индукции подгруппа M и, следовательно, группа G либо содержат главный фактор, изоморфный $PSL(2, 5)$ и $n = 2(|H| - 1)$, либо разрешимы. Поэтому

$$\chi_M = \theta_1 + \theta_2,$$

где $\theta_1, \theta_2 \in \text{Irr}(M)$, $\theta_1 \neq \theta_2$ и $\theta_2 = \theta_1^x$, для некоторого $x \in G$.

Обозначим $K_i = \text{Ker } \theta_i$, $i = 1, 2$. По теоремам 1 и 2 [9] либо $HK_i/K_i \triangleleft M/K_i$, либо факторгруппы M/K_i разрешимы, $i = 1, 2$.

Пусть для обоих $i = 1, 2$ одновременно выполняется одно из последних утверждений. Так как $K_1 \cap K_2 = \{1\}$, по лемме 1.9.6 [10] подгруппа M изоморфна подгруппе прямого произведения факторгрупп M/K_i , $i = 1, 2$. Значит, подгруппа M и, следовательно, группа G либо содержат главный фактор, изоморфный $PSL(2, 5)$ и $n = 2(|H| - 1)$, либо разрешимы.

Пусть $HK_1/K_1 \triangleleft M/K_1$ и факторгруппа M/K_2 разрешима. Рассмотрим подгруппу $L = \text{Ker}(\theta_2)_{HK_1} = K_2 \cap HK_1$. Пусть $l \in L$, т.е. $l = hk_1$, где $h \in H$, $k_1 \in K_1$. Так как $L \subseteq K_2$, то $(hk_1)^{k_1^{-1}} \in K_2$. Следовательно, $k_1 hk_1 (k_1)^{-1} = k_1 h \in K_2$. Отсюда $hk_1 (k_1 h)^{-1} = [h, k_1] \in K_2$. Но $[h, k_1] \in K_1$. Поэтому $[h, k_1] \in K_1 \cap K_2 = 1$. В силу произвольности выбора l заключаем, что $L = L_\pi \times L_{\pi'}$, где L_π – холловская π -подгруппа L , а $L_{\pi'}$ – холловская π' -подгруппа L . Тогда $L_\pi \subseteq O_\pi(G)$. По лемме 1 $L = 1$. Следовательно, $L = L_{\pi'} \subseteq K_1 \cap K_2 = 1$.

Если $H \triangleleft HK_1 \triangleleft M \triangleleft G$, то $H \triangleleft G$, что противоречит предположению. Следовательно, подгруппа HK_1 разрешима. Значит, подгруппа K_1 разрешима. Из сопряженности подгрупп K_1 и K_2 вытекает разрешимость K_2 . Но в рассматриваемом случае факторгруппа M/K_2 разрешима. Поэтому подгруппа M и, следовательно, группа G разрешимы. Получили противоречие с предположением.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Выполнено $G = HO_{\pi'}(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из п. 3 доказательства теоремы [6] следует, что $O_{\pi', \pi}(G) = HO_{\pi'}(G)$, причем $H \not\triangleleft O_{\pi', \pi}(G)$. Пусть $O_{\pi', \pi}(G) \neq G$. По теореме Клиффорда

$$\chi_{O_{\pi', \pi}(G)} = e \sum_{x \in T} \psi^x,$$

где e есть некоторое целое рациональное число, $\psi \in \text{Irr}(O_{\pi', \pi}(G))$ и T есть множество всех представителей смежных классов группы G по подгруппе $I_G(\psi)$, взятых по одному из каждого класса. Обозначим $K = \text{Ker } \psi$.

Как и в п. 2 доказательства теоремы [6], нетрудно показать, что $\psi(1) = |H| - 1, |H|, |H| + 1, 2(|H| - 1)$ или $2|H| - 1$ и $\psi(1)$ будет степенью некоторого простого π' -числа за исключением, может быть, случая $\psi(1) = |H|$.

Пусть F – некоторая холловская подгруппа H . По лемме Фраттини имеем

$$G = O_{\pi', \pi}(G)N_G(F).$$

Рассмотрим группу $R = O_{\pi', \pi}(G)C_G(F)$.

Пусть $R \neq G$. Из $n = e|T|\psi(1)$ и леммы 2 вытекает, что $|T| = 1$. Значит, подгруппа R удовлетворяет условию А. Согласно минимальности группы G либо R разрешима, либо $n = 2(|H| - 1)$ и R содержит главный фактор, изоморфный $PSL(2, 5)$. Рассмотрим факторгруппу

$$G/O_{\pi', \pi}(G) = O_{\pi', \pi}(G)N_G(F)/O_{\pi', \pi}(G) \simeq N_G(F)/N_G(F) \cap O_{\pi', \pi}(G). \quad (1)$$

Из строения дополнительного множителя группы Фробениуса [11] следует, что либо H циклическая, либо $H = \langle a \rangle \langle b \rangle$, где $(|a|, |b|) = 1$, $\langle a \rangle \triangleleft H$.

Если $F = \langle b \rangle$, то $N_G(F) \cap O_{\pi', \pi}(G) \subseteq C_G(F)$. Следовательно, мы можем рассмотреть факторгруппу

$$C_G(F)/N_G(F) \cap O_{\pi', \pi}(G) \triangleleft N_G(F)/N_G(F) \cap O_{\pi', \pi}(G).$$

Так как подгруппа F циклическая, то факторгруппа

$$\frac{N_G(F)/N_G(F) \cap O_{\pi', \pi}(G)}{C_G(F)/N_G(F) \cap O_{\pi', \pi}(G)} \simeq N_G(F)/C_G(F) \quad (2)$$

абелева.

Если $F = \langle a \rangle$, то $N_G(F) \cap O_{\pi', \pi}(G) \subseteq HC_G(F)$. Так как $C_G(F) \triangleleft N_G(F)$, $F \subseteq H$ и H есть TI -множество в $N_G(F)$, то $HC_G(F) \triangleleft N_G(F)$. Следовательно, факторгруппа

$$\frac{N_G(F)/N_G(F) \cap O_{\pi', \pi}(G)}{HC_G(F)/N_G(F) \cap O_{\pi', \pi}(G)} \simeq N_G(F)/HC_G(F) \quad (3)$$

абелева.

Если $F = H$ циклическая, то $N_G(F) \cap O_{\pi', \pi}(G) \subseteq C_G(F)$. Значит, факторгруппа

$$\frac{N_G(F)/N_G(F) \cap O_{\pi', \pi}(G)}{C_G(F)/N_G(F) \cap O_{\pi', \pi}(G)} \simeq N_G(F)/C_G(F) \quad (4)$$

абелева.

Предположим, что подгруппа R разрешима. Тогда $C_G(F)$ также разрешима. Из выражений (2)–(4) следует разрешимость подгруппы $N_G(F)$ и согласно (1) разрешимость факторгруппы $G/O_{\pi',\pi}(G)$. Значит, группа G также разрешима. Пусть теперь $n = 2(|H| - 1)$ и R содержит главный фактор, изоморфный $PSL(2, 5)$. Очевидно, мы должны рассмотреть случай, когда он содержится в $R/O_{\pi',\pi}(G)$. Тогда $G/O_{\pi',\pi}(G)$ и, значит, G содержат главный фактор, изоморфный $PSL(2, 5)$.

Следовательно, $O_{\pi',\pi}(G)C_G(F) = G$. То есть $C_G(F) = N_G(F)$. Из выбора подгруппы F и теоремы Бернсайда следует, что $G = O_{\pi',\pi}(G)$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Выполнено $(O_{\pi'}(G))' = O_{\pi'}(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $(O_{\pi'}(G))' \neq O_{\pi'}(G)$. По теореме Клиффорда

$$\chi_{(O_{\pi'}(G))'} = e' \sum_{x \in T'} \varphi^x. \quad (5)$$

Покажем, что $H \triangleleft H(O_{\pi'}(G))'$. Допустим $H \not\triangleleft H(O_{\pi'}(G))'$. Рассмотрим характер

$$\chi_{H(O_{\pi'}(G))'} = \sum_{i=1}^t \alpha_i \omega_i,$$

где $\alpha_i > 0$, $\omega_i \in \text{Irr}(H(O_{\pi'}(G))')$, $i = 1, 2, \dots, t$. Обозначим $K_i = \text{Ker } \omega_i$.

Предположим дополнительно, что факторгруппа HK_l/K_l неинвариантна в группе $H(O_{\pi'}(G))'/K_l$ для некоторого $1 \leq l \leq t$. По лемме 2 [6] $H \cap K_l = 1$. Так как $HK_l/K_l \simeq H/H \cap K_l \simeq H$, то согласно теореме 1 [6] выполняется одно из следующих заключений: $\omega_l(1) = |H| - 1, |H|, |H| + 1, 2(|H| - 1)$ или $2|H| - 1$ и $\omega_l(1)$ будет степенью некоторого простого π' -числа за исключением, может быть, случая $\omega_l = |H|$.

Пусть φ^{x_0} для некоторого $x_0 \in T'$ будет неприводимой компонентой характера $(\omega_l)_{(O_{\pi'}(G))'}$. По лемме 1 [5] либо $I_{H(O_{\pi'}(G))'}(\varphi^{x_0}) = (O_{\pi'}(G))'$, либо $I_{H(O_{\pi'}(G))'}(\varphi^{x_0}) = H(O_{\pi'}(G))'$. Если имеет место первое утверждение, то $\omega_l(1) = |H|$. Из $\varphi^{x_0}(1) < 2|H|$ получаем, что $\varphi^{x_0}(1) = 1$. Так как характер χ точный, то подгруппа $(O_{\pi'}(G))'$ абелева. Следовательно, группа G разрешима. Значит, $I_{H(O_{\pi'}(G))'}(\varphi^{x_0}) = H(O_{\pi'}(G))'$. То есть $(\omega_l)_{(O_{\pi'}(G))'} = m\varphi^{x_0}$, где m – целое рациональное число.

Пусть $n \neq 2(|H| - 1)$. Тогда характер $\chi_{H(O_{\pi'}(G))'}$ неприводим. Согласно предположению, подгруппа $H(O_{\pi'}(G))'$ и, следовательно, группа G разрешимы.

Пусть теперь $n = 2(|H| - 1)$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $\varphi(1) = \omega(1) = 2(|H| - 1)$, т.е. характер $\chi_{H(O_{\pi'}(G))'}$ неприводим. По предположению подгруппа $H(O_{\pi'}(G))'$ и, значит, группа G разрешимы или содержат главный фактор, изоморфный $PSL(2, 5)$, и $n = 2(|H| - 1)$.

Случай 2: $\varphi(1) = \omega(1) = |H| - 1$. Согласно равенству (5) $n = e'|T'|(|H| - 1)$. Из леммы 2 получаем, что $|T'| = 1$, т.е. $\chi_{(O_{\pi'}(G))'} = 2\varphi$. По следствию 7 [9] подгруппа $(O_{\pi'}(G))'$ разрешима.

Значит, $HK_i/K_i \triangleleft H(O_{\pi'}(G))'/K_i$, для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Тогда $HK_i \triangleleft H(O_{\pi'}(G))'$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Так как $HK_i = HF_i$, где F_i – холловская π' -подгруппа HK_i , и $\cap_{i=1}^t F_i \subseteq \cap_{i=1}^t K_i = 1$, то $H = \cap_{i=1}^t HF_i = \cap_{i=1}^t HK_i \triangleleft H(O_{\pi'}(G))'$. Отсюда $(O_{\pi'}(G))' \subseteq$

$C_G(H)$. Так как $(O_{\pi'}(G))' \triangleleft G$, то по лемме 4 [6] либо $\chi_{(O_{\pi'}(G))'} = (\chi_{C_G(H)})_{(O_{\pi'}(G))'}$ есть сумма линейных характеров, либо $n = 2(|H| - 1)$ и подгруппа $(O_{\pi'}(G))'$ обладает точным неприводимым характером степени 2. В первом случае получаем, что подгруппа $(O_{\pi'}(G))'$ абелева, т.е. группа G разрешима. Значит, имеет место второй случай. Тогда согласно классификации линейных групп степени 2 [12] подгруппа $(O_{\pi'}(G))'$ разрешима или содержит главный фактор, изоморфный $PSL(2, 5)$. Следовательно, группа G разрешима либо $n = 2(|H| - 1)$ и G содержит главный фактор, изоморфный $PSL(2, 5)$.

Лемма доказана.

Пусть теперь Q есть такая H -инвариантная силовская q -подгруппа из $O_{\pi'}(G)$, что $Q \not\subseteq N_G(H)$. Согласно предположению и лемме 3 она существует. Рассмотрим подгруппу $G_1 = HQ$. Очевидно, $G_1 \neq G$. Пусть

$$\chi_{G_1} = \sum_{i=1}^t \alpha_i \xi_i, \quad (6)$$

где $\alpha_i \geq 0$, $\xi_i \in \text{Irr}(G_1)$, $i = 1, 2, \dots, t$.

Обозначим $L_i = \text{Ker } \xi_i$, $i = 1, 2, \dots, t$. Если $HL_i/L_i \triangleleft G_1/L_i$, то $HL_i \triangleleft G_1$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$ таких, что $\alpha_i > 0$. Значит, $H \triangleleft G_1$ в виду точности характера χ . Следовательно, $HL_k/L_k \not\triangleleft G_1/L_k$ для некоторого $1 \leq k \leq t$, причем $\alpha_i > 0$.

Пусть $k = 1$. По лемме 2 из [6] $H \cap L_1 = 1$. Согласно теореме 1 [6] $\xi_1(1)$ может принимать лишь значения $|H| - 1$, $|H|$, $|H| + 1$, $2(|H| - 1)$ или $2|H| - 1$ и $\xi_1(1)$ будет степенью некоторого простого π' -числа, если $\xi_1(1) \neq |H|$. Запишем выражение (6) следующим образом:

$$\chi_{G_1} = \alpha_1 \xi_1 + \xi, \quad \text{где } \xi = \sum_{i=2}^t \alpha_i \xi_i. \quad (7)$$

ЛЕММА 5. Если $|O_{\pi'}(G) : C_{O_{\pi'}(G)}(H)|$ есть степень q , то $O_{\pi'}(G) = SC_{O_{\pi'}(G)}(H)$, где S — инвариантная q -подгруппа G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $G = HQC_{O_{\pi'}(G)}(H)$, то каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = hsc$, где $h \in H$, $s \in Q$, $c \in C_{O_{\pi'}(G)}(H)$. Следовательно,

$$(HQ)^g = (HQ)^{(hs)^c} = (HQ)^c = (H^c Q^c) = HQ^c.$$

Поэтому $H \subseteq \text{Core}_G(HQ)$. Значит, $\text{Core}_G(HQ) = HS$, где $S \leq Q$. По лемме Фраттини $G = HSN_G(H) = HSC_{O_{\pi'}(G)}(H)$. Так как S характеристична в $HS \triangleleft G$, то $S \triangleleft G$. Следовательно, $O_{\pi'}(G) = SC_{O_{\pi'}(G)}(H)$, где S — инвариантная q -подгруппа G .

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Если $\xi_1(1) = |H|$ и все неприводимые компоненты ξ имеют степень меньше $|H| - 1$, то подгруппы $C = C_{O_{\pi'}(G)}(H)$ и Q абелевы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\overline{G} = N_G(Q)$. Допустим $\overline{G} = G$. Тогда характеры χ_Q и $(\xi_1)_Q$ имеют общую неприводимую линейную компоненту λ , причем $H \not\subseteq I_G(\lambda)$. Тогда $H \cap I_G(\lambda) = 1$. Поскольку $\chi(1) = |G: I_G(\lambda)|e\lambda(1) = |G: I_G(\lambda)|e < 2|H|$, $|H|$ делит $|G: I_G(\lambda)|$ и e делит $|I_G(\lambda): Q|$, то $\chi(1) = |H|$. Следовательно, $\overline{G} \neq G$.

Нетрудно заметить, что характер $\chi_{\overline{G}}$ содержит неприводимую компоненту ξ_1^* степени $|H|$ и $(\xi_1^*)_{G_1} = \xi_1$, где ξ_1 из (7). Обозначим

$$\chi_{\overline{G}} = \xi_1^* + \xi^*.$$

Очевидно, $(\xi^*)_{G_1} = \xi$.

Предположим, что подгруппа C неабелева. Из лемм 3, 4 [6] и точности характера χ следует, что это возможно лишь в следующих случаях:

- 1) $\chi_C = \beta + |H|\beta_1$, $\beta(1) < |H|$, $\beta_1(1) = 1$;
- 2) $\chi_C = (|H| - 1)\beta$, $\beta(1) = 2$, где $\beta, \beta_1 \in \text{Irr}(C)$ и $\beta = (\chi)\pi(O_{\pi'}(G), H)$.

Рассмотрим первый из них.

Пусть $q_1, \dots, q_t$ – все такие простые π' -числа, что силовские q_i -подгруппы Q_i из $O_{\pi'}(G)$ не централизуют подгруппу H . Допустим, $t = 1$. Тогда $G = HQC$. По лемме 5 $G = HSC$, где S – инвариантная в G q -подгруппа. Из теоремы 1 [6] и теоремы Клиффорда следует, что либо характер χ_{HS} неприводим, либо все неприводимые компоненты χ_{HS} имеют степень $|H| - 1$. Так как $HS \triangleleft HQ$, то получаем противоречие с равенством (7). Поэтому $t > 1$. В точности повторяя рассуждения из работы [6, с. 16, 17], получаем, что подгруппы C и Q абелевы. Абелевость C доказана.

Рассмотрим подгруппу $\overline{C} = C \cap Q$. Если подгруппа $\overline{C}$ единична, то G_1 будет группой Фробениуса с ядром Q и дополнительным множителем H . Так как $\xi(1) < |H|$, то все неприводимые компоненты характера ξ имеют степень 1. Если $\overline{C}$ неединична, то из леммы 4 [6] следует, что все неприводимые компоненты характера ξ ограничиваются на подгруппу $\overline{C}$ неприводимо. Так как подгруппа $\overline{C} \subseteq C$ абелева, то они линейны. По лемме 1 [5] ограничение характера χ_Q есть сумма линейных характеров. Из точности характера χ получаем, что подгруппа Q абелева.

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Если $\xi_1(1) = |H|$, то $\chi(1) = |H|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $\chi(1) > |H|$. Тогда в равенстве (7) $0 < \xi(1) < |H|$.

Пусть все неприводимые компоненты ξ имеют степень меньше $|H| - 1$. По лемме 6 подгруппа Q абелева. Рассмотрим подгруппу $N = N_{O_{\pi'}(G)}(Q)$. Так как $(O_{\pi'}(G))' = O_{\pi'}(G)$, из теории трансфера следует, что q не делит $|N: N'|$ и, следовательно,

$$Z(N) \cap Q = 1. \quad (8)$$

Рассмотрим два возможных случая.

- 1) Характер χ_{HN} неприводим. Так как подгруппа Q абелева, то по теореме 5.2.3 [7]

$$Q = [H, Q] \times C_Q(H).$$

По теореме Клиффорда

$$\chi_{[H, Q]} = e^* \sum_{x \in T^*} \omega^x.$$

Легко видеть, что $\omega \neq 1_{[H, Q]}$. Применив теорему 13.34 [8] к группе Фробениуса $H[H, Q]$, заключаем, что $\chi(1) = |H|$.

2) Характер $\chi_{HN} = \xi_1^* + \xi^*$, где ξ_1^* есть неприводимый характер подгруппы HN степени $|H|$ и ξ^* – характер подгруппы HN .

Пусть все неприводимые компоненты ξ^* имеют степень меньше $|H| - 1$. Тогда, $HL^*/L^* \triangleleft HN/L^*$, где $L^* = \text{Ker } \xi^*$. Отсюда $HL^* \triangleleft HN$ и $Q_0 = L^* \cap Q \triangleleft HN$. Значит, $[N, Q_0] \subseteq Q_0 \subseteq \text{Ker } \xi^*$. Поскольку $[N, Q_0] \subseteq N' \subseteq \text{Ker } \xi_1^*$, то $[N, Q_0] \subseteq \text{Ker } \xi_1^* \cap \text{Ker } \xi^* = 1$. Следовательно, $N \subseteq C_{HN}(Q_0)$. Так как подгруппа $Q_0 \subseteq Q$ абелева, то $Q_0 \subseteq Z(N)$. Получили противоречие с утверждением (8) ввиду $Q_0 \neq 1$. Следовательно, $\xi^* \in \text{Irr}(HN)$ и $\xi^*(1) = |H| - 1$. По леммам 3 и 4 [6] $\hat{\chi}_H = 2\rho_H - 1_H$. С другой стороны, $\xi_1(1) = |H|$ и все неприводимые компоненты характера ξ имеют степень меньше $|H| - 1$. Значит, $\hat{\chi}_H = \rho_H + (|H| - 1)1_H$. Противоречие.

Пусть теперь $\xi(1) = |H| - 1$. Тогда $q = 2$ и по лемме 5 $O_{\pi'}(G) = SC_{O_{\pi'}(G)}(H)$, где S – инвариантная 2-подгруппа G . По теореме Клиффорда $(\xi_1)_S$ и, следовательно, χ_S есть сумма линейных характеров. Тогда H характеристична в $HS \triangleleft G$. Противоречие.

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. Рассмотрим возможные случаи.

1. $n = |H| - 1$. Очевидно $\xi_1(1) = |H| - 1$, где ξ из (7). Следовательно, $|O_{\pi'}(G) : C_{O_{\pi'}(G)}(H)|$ есть степень двойки. Кроме того, согласно лемме 4 [6] подгруппа C абелева. Значит, по лемме 5 факторгруппа G/HS и, следовательно, группа G разрешимы.

2. $n = |H|$. Согласно лемме 1 [5] характер $\chi_{O_{\pi'}(G)}$ есть сумма линейных характеров. Из точности характера χ получаем, что подгруппа $O_{\pi'}(G)$ абелева. По лемме 3 группа G разрешима.

3. $n = |H| + 1$. По лемме 7 в равенстве (7) $\xi = 0$ либо $\xi_1(1) = |H| - 1$ и $\xi(1) = 2$. Следовательно, как и в п. 1, получаем разрешимость группы G .

4. $n = 2|H| - 2$. Согласно лемме 7 в равенстве (7) возможно одно из следующих утверждений:

$$\begin{aligned} \xi_1(1) &= 2|H| - 2, \\ \xi_1(1) &= |H| + 1 \quad \text{и} \quad \xi(1) = |H| - 3, \\ \xi_1(1) &= |H| - 1 \quad \text{и} \quad \xi(1) = |H| - 1. \end{aligned}$$

При каждом из них по лемме 4 [6] подгруппа C абелева либо C обладает точным неприводимым характером степени 2. Поэтому [12] C разрешима или C содержит главный фактор, изоморфный $PSL(2, 5)$. Осталось заметить, что подгруппа HS разрешима, инвариантна в группе G и $G/HS \simeq C/C \cap S$, где S из леммы 5.

5. $n = 2|H| - 1$. Согласно лемме 7 в равенстве (7) возможно одно из следующих утверждений:

$$\begin{aligned} \xi_1(1) &= 2|H| - 1, \\ \xi_1(1) &= 2(|H| - 1) \quad \text{и} \quad \xi(1) = 1, \\ \xi_1(1) &= |H| + 1 \quad \text{и} \quad \xi(1) = |H| - 2, \\ \xi_1(1) &= |H| - 1 \quad \text{и} \quad \xi(1) = |H|. \end{aligned}$$

В первом случае получаем, что характер χ_{G_1} и, следовательно, χ_Q неприводимы. Тогда $O_{\pi'}(G) = QC$. Применяя леммы 4 и 3 [6] к подгруппе HQ , находим, что $\hat{\chi}_H = 2\rho_H - 1_H$. Тогда из лемм 3 и 4 [6] вытекает, что C абелева. Следовательно, группа G разрешима.

В остальных случаях получаем, что $|O_{\pi'}(G):C|$ есть степень двойки. Следовательно, $O_{\pi'}(G) = C_G(H)Q$. Тогда

$$L = [O_{\pi'}(G), H] = [C_G(H)Q, H] \subseteq [C_G(H), H][Q, H] \subseteq [Q, H]$$

есть нормальная в $O_{\pi'}(G)$ 2-подгруппа. Так как $H \ntriangleleft HO_{\pi'}(G)$, то

$$[L, H] = [[O_{\pi'}(G), H], H] = [O_{\pi'}(G), H] \neq 1,$$

т.е. $H \ntriangleleft HL$. Следовательно, характер χ_L неприводим. Поэтому χ_{G_1} неприводим. Этот случай уже рассмотрен.

Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ito N. On the theorem of N.F. Blichfeldt // Nagoya Math. J. 1953. V. 15. P. 75–77.
- [2] Winter D. L. On finitesolvable linear groups // Illinois J. Math. 1971. V. 15. № 3. P. 425–428.
- [3] Isaacs I. M. Complex p -solvable linear groups // J. Algebra. 1973. V. 24. № 3. P. 513–530.
- [4] Winter D. L. On the structure of certain p -solvable linear groups // J. Algebra. 1974. V. 31. № 3. P. 543–546.
- [5] Ядченко А. А. Разрешимые неприводимые линейные группы произвольной степени с холловской TI -подгруппой // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 2. С. 137–144.
- [6] Бобр В. В., Ядченко А. А. О π -разрешимых неприводимых линейных группах относительно небольшой степени // Весні НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2001. № 1.
- [7] Gorenstein D. Finite Groups. New York: Harper and Row, 1968.
- [8] Isaacs I. M. Character Theory of Finite Groups. New York: Academic Press, 1976.
- [9] Ядченко А. А. О конечных π -разрешимых линейных группах // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1986. С. 181–207.
- [10] Huppert B. Endliche Gruppen. V. 1. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.
- [11] Старостин А. И. О группах Фробениуса // Укр. матем. ж. 1971. Т. 23. № 3. С. 629–639.
- [12] Blichfeldt H. F. Finite Collineation Groups. Chicago (IL): University of Chicago Press, 1917.

Институт математики НАН Беларуси, г. Гомель
E-mail: goim@nauka.belpak.gomel.by

Поступило
24.12.2001