Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Герко, О дизъюнктности некоторых типов расширений топологических полугрупп преобразований, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 527–544

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm201>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:00:14

УДК 513.8

О ДИЗЬЮНКТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ РАСШИРЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

А. И. Герко

На минимальные топологические полугруппы преобразований распространяются (с некоторыми обобщениями) теоремы Бронштейна о дизъюнктности F-, PE-, V-расширений минимальных топологических групп преобразований.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. В статье изучается отношение дизъюнктности расширений минимальных топологических полугрупп преобразований. Для групп преобразований понятие дизъюнктности множеств впервые ввел и изучил Ферстенберг [1], а для расширений групп преобразований – Шапиро [2]. Многие результаты теории дизъюнктности минимальных множеств и их расширений содержат книги [3] и [4] и статья [5].

Большая часть результатов статьи навеяна теоремами 19.25, 19.33 и 19.38 из [3], которые мы объединим в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\varphi: (X, T) \rightarrow (Y, T)$ и $\psi: (Z, T) \rightarrow (Y, T)$ – расширения минимальных групп преобразований, причем ψ открыто; φ_0 и ψ_0 – максимальные равностепенно непрерывные факторы расширений φ и ψ соответственно. Для дизъюнктности расширений φ и ψ достаточно дизъюнктности расширений φ_0 и ψ_0 и одного из следующих условий:

- 1) φ – F-расширение;
- 2) φ – PE-расширение и множество почти периодических точек из $R_{\varphi\psi} = \{(x, z) \mid (x, z) \in X \times Z \wedge x\varphi = z\psi\}$ плотно в $R_{\varphi\psi}$;
- 3) φ – V-расширение.

Для случая, когда φ – F-расширение полугрупп преобразований, мы получаем аналогичный результат, отказавшись при этом от условия открытости расширения ψ (теорема 5). В случае, когда φ – PE-расширение полугрупп преобразований (и при более общих предположениях), получаем аналогичный результат, заменив условие открытости расширения ψ на условие представимости расширения ψ в виде композиции проксимального расширения и В-расширения (теорема 6). В случае, когда φ – V-расширение полугрупп преобразований (и при более общих предположениях), получаем аналогичный результат при дополнительном условии представимости расширения ψ в виде композиции проксимального расширения и В-расширения (теорема 14).

2. Общие определения и вспомогательные утверждения. В статье мы используем, как правило, общепринятые в топологической динамике терминологию и обозначения. Для большей полноты изложения приведем только лишь необходимый на наш взгляд минимум определений и фактов (более подробно см. [1]–[7]).

Символом $U[X]$ будем обозначать равномерность топологического пространства X , согласованную с его топологией. Мы используем правостороннюю форму записи функциональной зависимости.

Топологической полугруппой преобразований (короче, *полугруппой преобразований*) называем тройку (X, S, π) , где X – компактное хаусдорфово топологическое пространство (фазовое пространство), S – топологическая полугруппа с нейтральным элементом e (фазовая полугруппа) и $\pi: X \times S \rightarrow X$ – непрерывное отображение такое, что для всех $x \in X$ и всех $s, t \in S$ выполнено $(x, e)\pi = x$ и $((x, s)\pi, t)\pi = (x, st)\pi$.

Вместо (X, S, π) мы, как правило, будем писать (X, S) .

Пусть (X, S, π) – полугруппа преобразований, $s \in S$, $A \subset X$. Через π^s обозначаем отображение $X \rightarrow X$, заданное по правилу $x\pi^s = (x, s)\pi$, $x \in X$. Вместо $x\pi^s$ пишем xs , а через xS обозначаем множество $\{xs \mid s \in S\}$, $x \in X$. Множество A называется *минимальным*, если $A \neq \emptyset$ и $xS = A$ для всех $x \in A$. Полугруппа преобразований (X, S) называется *минимальной*, если X – минимальное множество. Если для $x \in X$ множество xS минимальное, то точка x называется *почти периодической*. Множество всех почти периодических точек множества A обозначаем через AJ . Класс всех минимальных полугрупп преобразований с фиксированной фазовой полугруппой S обозначаем через $K(S)$.

Под *расширением (морфизмом)* $\varphi: (X, S, \pi) \rightarrow (Y, S, \rho)$ полугрупп преобразований мы понимаем непрерывную сюръекцию $\varphi: X \rightarrow Y$ такую, что для всех $x \in X$ и всех $s \in S$ выполнено $x\pi^s\varphi = x\rho^s$.

Символом $K^1(Y, S)$ обозначаем класс расширений $\varphi: (X, S) \rightarrow (Y, S)$ с фиксированной полугруппой преобразований (Y, S) и произвольной полугруппой преобразований (X, S) из $K(S)$. Расширения из $K^1(Y, S)$ называем *минимальными расширениями*.

Пусть $\varphi: (X, S) \rightarrow (Y, S)$, $\psi: (Z, S) \rightarrow (Y, S)$ – расширения. Обозначим

$$R_{\varphi\psi} = \{(x, z) \mid (x, z) \in X \times Z \wedge x\varphi = z\psi\}, \quad R_{\varphi} = R_{\varphi\varphi}, \quad \Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\},$$

$$P(R_{\varphi}) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{U}[X]} \bigcup_{s \in S} \{(x, y) \mid (x, y) \in R_{\varphi} \wedge (xs, ys) \in \alpha\},$$

$$Q(R_{\varphi}) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{U}[X]} \overline{\bigcup_{s \in S} \{(x, y) \mid (x, y) \in R_{\varphi} \wedge (xs, ys) \in \alpha\}}.$$

Расширение φ называется *дистальным* (соответственно *проксимальным, регионально дистальным*), если $P(R_{\varphi}) = \Delta(X)$ (соответственно $P(R_{\varphi}) = R_{\varphi}$, $Q(R_{\varphi}) = \Delta(X)$).

Расширение φ называется *дистальным в точке* $x \in X$, если $xP(R_{\varphi}) = \{x\}$.

Расширение φ называется *почти дистальным* (соответственно *почти автоморфным*), если множество точек, в которых расширение φ дистально (соответственно инъективно), плотно в X . Почти автоморфное расширение φ называется *сильно почти автоморфным*, если инвариантно множество точек, в которых φ инъективно.

Расширение φ называется *B-расширением*, если $R_{\varphi} = \overline{R_{\varphi}J}$.

Регионально дистальное расширение $\psi: (Z, S, \sigma) \rightarrow (Y, S, \rho)$ называется **RD-фактом** расширения $\varphi: (X, S, \pi) \rightarrow (Y, S, \rho)$, если $\varphi = \eta \circ \psi$ для некоторого расширения $\eta: (X, S, \pi) \rightarrow (Z, S, \sigma)$.

Расширение φ называется **RD-простым**, если его всякий RD-фактор, отличный от φ , является изоморфизмом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\delta: (X, S) \rightarrow (W, S)$ и $\eta: (W, S) \rightarrow (Y, S)$ – минимальные расширения, $\varphi = \delta \circ \eta$. Расширение η дистально тогда и только тогда, когда $P(R_\varphi) \subset R_\delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если расширение η дистально, то включение $P(R_\varphi) \subset R_\delta$ следует из определения отношения $P(R_\varphi)$ и равномерной непрерывности отображения δ . Предположим, что $P(R_\varphi) \subset R_\delta$, $(x, z) \in P(R_\eta)$ и точки $x', z' \in X$ таковы, что $x'\delta = x$ и $z'\delta = z$. Найдутся минимальный правый идеал $I(W)$ полугруппы Эллиса $E(W)$ полугруппы преобразований (W, S) и идемпотент $v \in I(W)$ такие, что $x = xv = zv$. Найдется также идемпотент w , принадлежащий полугруппе Эллиса $E(X)$ полугруппы преобразований (X, S) , такой, что $w\delta^* = v$, где $\delta^*: E(X) \rightarrow E(W)$ – гомоморфизм полугрупп Эллиса, индуцированный гомоморфизмом δ . В таком случае $x'\delta = x = zv = z'\delta v = z'w\delta$, т.е. $x'\delta = z'w\delta$; следовательно, $(z', z'w)(\delta \times \delta) = (z, x)$. Так как $(z'w, z') \in P(R_\varphi) \subset R_\delta$, из предыдущего соотношения следует $x = z$. Мы доказали, что $P(R_\eta) = \Delta(W)$, значит расширение η дистально.

В дальнейшем (U, S, σ) – универсальная полугруппа преобразований для $K(S)$, E – полугруппа Эллиса полугруппы преобразований (U, S, σ) , I – фиксированный минимальный правый идеал из E , $u \in I$ – фиксированный идемпотент, $\mathcal{E} = Iu$. Естественно определяется полугруппа преобразований $(I, S) \in K(S)$, и пусть $(X, S) \in K(S)$, $E(X, S)$ – полугруппа Эллиса полугруппы преобразований (X, S) , $\Phi: (U, S) \rightarrow (X, S)$ – морфизм из определения универсальности полугруппы преобразований (U, S) , $\Theta: (E, S) \rightarrow (E(X, S), S)$ – морфизм, индуцированный Φ . Полугруппа E действует естественно на X по правилу $x\rho = x(p\Theta)$, $x \in X$, $p \in E$.

Пусть $\{(X_i, S) \mid i \in L\}$ – некоторое семейство полугрупп преобразований из $K(S)$, $x_i \in X_i$, $i \in L$. Обозначим $x = (x_i)_{i \in L}$ и φ_x – отображение $E \rightarrow \prod_{i \in L} X_i$, определяемое правилом $p\varphi_x = (x_i p)_{i \in L} \equiv xp$, $p \in E$. Естественно определяется полугруппа преобразований (xE, S) – подполугруппа преобразований прямого произведения семейства $\{(X_i, S) \mid i \in L\}$. Понятно, что имеет место также

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Множество xI минимальное в (xE, S) и точка x является почти периодической тогда и только тогда, когда $xv = x$ для некоторого идемпотента $v \in I$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} (X, S) & \xrightarrow{\delta} & (W, S) & & (Z, S) \\ & \searrow \varphi & \eta \downarrow & & \psi \swarrow \\ & & (Y, S) & & \end{array} \quad (1)$$

минимальных полугрупп преобразований

- 1) расширение δ почти дистально (почти автоморфно);

$$2) R_{\eta\psi} = R_{\eta\psi}J;$$

3) *расширение ψ открыто или расширение ψ полукратно, а расширение φ открыто.*

$$\text{Тогда } R_{\varphi\psi} = \overline{R_{\varphi\psi}J}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, для определенности, расширение δ почти дистально и V – открытое непустое подмножество множества $R_{\varphi\psi}$. Существуют открытые подмножества V_1 и V_2 множеств X и Z соответственно такие, что для всех $x \in V_1$ найдется $z \in V_2$, удовлетворяющее условию $(x, z) \in V$. Пусть $x \in V_1$, δ дистально в точке x и $z \in V_2$ таково, что $(x, z) \in V$. Поскольку $(x\delta, z) \in R_{\eta\psi} = R_{\eta\psi}J$, согласно утверждению 2 $(x\delta, z)v = (x\delta, z)$ для некоторого идемпотента $v \in I$. Поэтому $x\delta v = x\delta$ и $zv = z$. Так как $xv\delta = x\delta v = x\delta$, то $xv \in \delta^{-1}(x)$ (здесь и в дальнейшем символом $f^{-1}(b)$ мы обозначаем слой отображения $f: A \rightarrow B$ в точке $b \in B$). Поскольку δ дистально в точке x , то $xv = x$. Поэтому $(x, z)v = (x, z)$, $(x, z) \in R_{\varphi\psi}J$ по утверждению 2 и $R_{\varphi\psi}J \cap V \neq \emptyset$; следовательно, $R_{\varphi\psi} = \overline{R_{\varphi\psi}J}$.

Пусть $(X, S, \pi) \in K(S)$ и 2^X – совокупность всех непустых замкнутых подмножеств множества X с топологией Виеториса. Тогда $(2^X, S, \pi^*)$, где $(A, s)\pi^* = A\pi^s$, $A \in 2^X$, $s \in S$, является полугруппой преобразований и E следующим образом естественно действует на 2^X . Пусть $p \in E$ и $\lim_i \sigma^{s_i} = p$ для некоторой направленности $\{s_i\} \subset S$. Для $A \in 2^X$ определим

$$A \odot p = \lim_i A\sigma^{s_i} = \lim_i \{a\sigma^{s_i} \mid a \in A\},$$

где предел мы понимаем в топологии Виеториса. Если $A \subset X$ – не обязательно непустое замкнутое подмножество из X , то мы определим

$$A \odot p = \overline{A} \odot p.$$

Для $A = \emptyset$ считаем, что $A \odot p = \emptyset$.

Операция $\odot$ по правилу

$$c(A) = A \odot u \cap Xu, \quad A \subset Xu,$$

определяет оператор замыкания на Xu . Топологию, порождаемую оператором замыкания c , называем τ -топологией.

Оказывается, что $(\mathcal{E}, \tau)$ – компактная полутопологическая группа.

Пусть для $(X, S) \in K(S)$ и $x_0 \in Xu$

$$\mathcal{G}(X, x_0) \equiv \mathcal{G}(X) = \{p \mid p \in \mathcal{E} \wedge x_0 p = x_0\}.$$

Группа $\mathcal{G}(X)$ является τ -замкнутой подгруппой группы $\mathcal{E}$ и называется *группой Эллиса* полугруппы преобразований (X, S) .

Пусть $\varphi: (X, S) \rightarrow (Y, S) \in K^1(Y, S)$, $x_0 \in Xu$ и $y_0 = x_0\varphi$. Расширение φ называем *RIC-расширением*, если

$$\forall p \in I \quad \varphi^{-1}(y_0 p) = x_0(\mathcal{G}(Y, y_0) \odot p) \equiv x_0 \mathcal{G}(Y, y_0) \odot p.$$

Отметим, что RIC-расширения образуют достаточно широкий класс расширений. Так, если полугруппа преобразований (Y, S) не допускает нетривиальных проксимальных минимальных расширений, то каждое расширение из $K^1(Y, S)$ является RIC-расширением. В частности, если полугруппа S коммутативна и множество Y одноточечно, то всякое минимальное расширение полугруппы преобразований (Y, S) является RIC-расширением.

Если T – τ -замкнутое подмножество из $\mathcal{E}$, $u \in T$, $N(T)$ – базис фильтра τ -окрестностей элемента u в T , то символом $H(T)$ обозначаем множество $\bigcap_{V \in N(T)} \text{cl } s_\tau V$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $\varphi: (X, S) \rightarrow (Z, S)$ – проксимальное минимальное расширение, $\psi: (Z, S) \rightarrow (Y, S)$ – В-расширение, $(X_0, S) \rightarrow (Y, S)$ – максимальный RD-фактор расширения $\varphi \circ \psi$, $x_0 \in Xu$, $x_0\varphi \circ \psi = y_0$. Тогда $\mathcal{G}(X, x_0)H(\mathcal{G}(Y, y_0))$ – группа Эллиса полугруппы преобразований (X_0, S) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как расширение φ проксимально, то $\mathcal{G}(X, x_0) = \mathcal{G}(Z, x_0\varphi)$. Пусть $\psi_0: (Z_0, S) \rightarrow (Y, S)$ – максимальный RD-фактор расширения ψ . Тогда по теореме 3 из [8]

$$\mathcal{G}(Z_0) = \mathcal{G}(Z, x_0\varphi)H(\mathcal{G}(Y, y_0)) = \mathcal{G}(X, x_0)H(\mathcal{G}(Y, y_0)).$$

Если $\eta: (W, S) \rightarrow (Y, S)$ – RD-фактор расширения $\varphi \circ \psi$, то $\mathcal{G}(X, x_0) \subset \mathcal{G}(W)$ и $H(\mathcal{G}(Y, y_0)) \subset \mathcal{G}(W)$. Поэтому $\mathcal{G}(Z_0) \subset \mathcal{G}(W)$. Согласно лемме 7 из [9] η – фактор расширения ψ_0 . Значит, ψ_0 – максимальный RD-фактор расширения $\varphi \circ \psi$.

3. Расширения типа $\mathcal{P}$. Пусть θ – предельное трансфинитное число;

$$\{\varphi_\alpha \mid \alpha < \theta\} \equiv \{\varphi_\alpha: (X_\alpha, S) \rightarrow (Y, S) \mid \alpha < \theta\}$$

– трансфинитная последовательность расширений из $K^1(Y, S)$; x_α^0 – фиксированная точка из $X_\alpha u$; $y^0 = x_\alpha^0 \varphi_\alpha$, $\alpha < \theta$; $\{\varphi_\alpha^\beta: (X_\beta, S) \rightarrow (X_\alpha, S) \mid \alpha \leq \beta < \theta\}$ – семейство расширений полугрупп преобразований, для которых

$$\begin{aligned} x_\beta^0 \varphi_\alpha^\beta &= x_\alpha^0, & \varphi_\alpha^\beta \circ \varphi_\alpha &= \varphi_\beta, & \varphi_\alpha^\beta \circ \varphi_\gamma^\alpha &= \varphi_\gamma^\beta, \\ \varphi_\alpha^\alpha &\text{ – тождественное отображение,} & \alpha \leq \beta \leq \gamma < \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть Pr_γ – проектирование прямого произведения $\prod_{\alpha < \theta} X_\alpha$ на X_γ и x_θ^0 – точка из $\prod_{\alpha < \theta} X_\alpha$, для которой $x_\theta^0 \text{Pr}_\gamma = x_\gamma^0$, $\gamma < \theta$. Определены полугруппа преобразований $(\overline{x_\theta^0 S}, S)$ – подполугруппа преобразований прямого произведения $(\prod_{\alpha < \theta} X_\alpha, S)$ полугрупп преобразований (X_α, S) , $\alpha < \theta$, и расширение $\varphi_\theta: (\overline{x_\theta^0 S}, S) \rightarrow (Y, S)$ по правилу $x_\theta^0 r \varphi_\theta = y^0 r$, $r \in I$. Полугруппу преобразований $(\overline{x_\theta^0 S}, S)$ называем *проективным пределом трансфинитной последовательности* $\{(X_\alpha, S) \mid \alpha < \theta\}$ полугрупп преобразований (X_α, S) и их морфизмов φ_α^β , $\alpha \leq \beta < \theta$, и обозначаем

$$(\overline{x_\theta^0 S}, S) = \varprojlim ((X_\alpha, S), \varphi_\alpha^\beta)_0^\theta.$$

Расширение φ_θ называем *проективным пределом трансфинитной последовательности* $\{\varphi_\alpha \mid \alpha < \theta\}$ расширений φ_α и их морфизмов φ_α^β , $\alpha \leq \beta < \theta$, и обозначаем

$$\varphi_\theta = \varprojlim (\varphi_\alpha, \varphi_\alpha^\beta)_0^\theta.$$

Пусть μ – трансфинитное число, $\{\varphi_\alpha: (X_\alpha, S) \rightarrow (Y, S) \mid \alpha \leq \mu\}$ – семейство расширений из $K^1(Y, S)$ и $\{\varphi_\alpha^\beta \mid \alpha \leq \beta \leq \mu\}$ – семейство их морфизмов, удовлетворяющих условиям (2). Предположим также, что для каждого предельного трансфинитного числа θ , $\theta \leq \mu$,

$$\varphi_\theta = \varprojlim (\varphi_\alpha, \varphi_\alpha^\beta)_0^\theta, \quad (X_\theta, S) = \varprojlim ((X_\alpha, S), \varphi_\alpha^\beta)_0^\theta.$$

Система $\{\varphi_\alpha, \varphi_\alpha^\beta\}_0^\mu$ называется *проективной системой расширений*.

Пусть $\mathcal{P}$ – некоторое свойство расширений полугрупп преобразований. Расширение $\varphi: (X, S) \rightarrow (Y, S) \in K^1(Y, S)$ называем *расширением типа $\mathcal{P}$* , если существует проективная система расширений $\{\varphi_\alpha, \varphi_\alpha^\beta\}_0^\mu$ такая, что $X_0 = Y$, $X_\mu = X$ и для произвольного α , $\alpha < \mu$, расширение $\varphi_\alpha^{\alpha+1}$ удовлетворяет свойству $\mathcal{P}$.

Пусть T – τ -замкнутое подмножество из $\mathcal{E}$, $u \in T$. Для произвольного трансфинитного числа α определим индуктивно множество $H^\alpha(T)$:

- 1) $H^0(T) = T$;
- 2) пусть $H^\alpha(T)$ определено для каждого трансфинитного числа α , $\alpha < \beta$; если $\beta = \alpha + 1$, то положим $H^\beta(T) = H(H^\alpha(T))$; если β – предельное трансфинитное число, то положим $H^\beta(T) = \bigcap_{\alpha < \beta} H^\alpha(T)$.

Если T – группа, то $H^\alpha(T)$ – нормальный делитель группы T .

Пусть α – трансфинитное число. Расширение $\varphi: (X, S) \rightarrow (Y, S)$ называем α -*псевдоустойчивым*, если $H^\alpha(\mathcal{G}(Y)) \subset \mathcal{G}(X)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть φ_θ – проективный предел трансфинитной последовательности $\{\varphi_\alpha \mid \alpha < \theta\}$ расширений $\varphi_\alpha: (X_\alpha, S) \rightarrow (Y, S)$ и их морфизмов φ_α^β , $\alpha \leq \beta < \theta$; $\psi: (Z, S) \rightarrow (Y, S)$ – минимальное расширение; $\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{B}, \mathcal{F}$ – группы Эллиса полугрупп преобразований (X_α, S) , (Z, S) и (Y, S) соответственно, определяемые точками $x_\alpha^0 \in X_\alpha u$, $z_0 \in Zu$, $y_0 \in Yu$, $y_0 = x_\alpha^0 \varphi_\alpha = z_0 \psi$. Справедливы следующие утверждения.

1) Если для произвольного α , $\alpha < \theta$, множество $R_{\varphi_\alpha \psi}$ содержит единственное минимальное подмножество, то и $R_{\varphi_\theta \psi}$ содержит единственное минимальное подмножество.

2) Если для произвольного α , $\alpha < \theta$, расширение φ_α является RD-простым, то расширение φ_θ является RD-простым.

3) Если для произвольного α , $\alpha < \theta$, выполнено равенство $R_{\varphi_\alpha \psi} J = R_{\varphi_\alpha \psi}$, то $R_{\varphi_\theta \psi} J = R_{\varphi_\theta \psi}$.

4) Если для произвольного α , $\alpha < \theta$, множество $R_{\varphi_\alpha \psi}$ минимально, то минимально и множество $R_{\varphi_\theta \psi}$.

5) Если для произвольного α , $\alpha < \theta$, расширение φ_α является RIC-расширением, то φ_θ – RIC-расширение.

6) Если для произвольного α , $\alpha < \theta$, $H(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}_\alpha$, то $H(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}_\theta$.

7) Если для произвольного α , $\alpha < \theta$, расширение φ_α является β_α -псевдоустойчивым расширением, то расширение φ_θ является β_θ -псевдоустойчивым расширением для некоторого трансфинитного числа β_θ .

8) Если для произвольного α , $\alpha < \theta$, расширение φ_α дистально (регионально дистально, проксимально), то φ_θ – дистальное (соответственно регионально дистальное, проксимальное) расширение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем доказательства только лишь некоторых пунктов нашего утверждения. Докажем утверждение 1). Если $R_{\varphi_\alpha\psi}$ содержит единственное минимальное подмножество, то $\mathcal{F} = \mathcal{BA}_\alpha$ по теореме 1 из [8]. Поэтому

$$\mathcal{F} = \bigcap_{\alpha < \theta} \mathcal{BA}_\alpha = \mathcal{B} \bigcap_{\alpha < \theta} \mathcal{A}_\alpha = \mathcal{BA}_\theta,$$

т.е. $\mathcal{F} = \mathcal{BA}_\theta$. Это равносильно тому, что $R_{\varphi_\theta\psi}$ содержит единственное минимальное подмножество по теореме 1 из [8].

Докажем утверждение 3). Пусть $(x, z) \in R_{\varphi_\theta\psi}$. Так как $(x, z) = (x_\theta^0 p, z_\theta^0 q)$ для некоторых $p, q \in I$, то $(x_\alpha^0 p, z_\alpha^0 q) \in R_{\varphi_\alpha\psi} = R_{\varphi_\alpha\psi} J$ и по утверждению 2 найдется идемпотент $v_\alpha \in I$, для которого $(x_\alpha^0 p, z_\alpha^0 q)v_\alpha = (x_\alpha^0 p, z_\alpha^0 q)$, $\alpha < \theta$, причем можем считать в силу существования морфизмов φ_α^β , что $v_\alpha = v_\beta$ для произвольного β , $\beta \leq \alpha < \theta$. Обозначим $I_\alpha = \{v_\alpha \mid v_\alpha \in I \text{ — идемпотент и } (x_\alpha^0 p, z_\alpha^0 q)v_\alpha = (x_\alpha^0 p, z_\alpha^0 q)\}$ для $\alpha < \theta$. Непосредственно проверяем, что множество I_α замкнуто и семейство $\{I_\alpha \mid \alpha < \theta\}$ центрировано. Поскольку множество I компактно, существует $v \in \bigcap_{\alpha < \theta} I_\alpha$. В таком случае $(x_\alpha^0 p, z_\alpha^0 q)v = (x_\alpha^0 p, z_\alpha^0 q)$ для произвольного α , $\alpha < \theta$, и $(x, z)v = (x, z)$. Доказанное в силу утверждения 2 означает, что $(x, z) \in R_{\varphi_\theta\psi} J$. Значит, $R_{\varphi_\theta\psi} \subset R_{\varphi_\theta\psi} J$ и $R_{\varphi_\theta\psi} = R_{\varphi_\theta\psi} J$.

Докажем утверждение 5). Пусть γ — универсальное проксимальное расширение полугруппы преобразований (Y, S) . Тогда согласно теореме 2 из [10] множество $R_{\varphi_\alpha\gamma}$ минимально. В силу пункта 4) нашего утверждения множество $R_{\varphi_\theta\gamma}$ минимально и по теореме 2 из [10] φ_θ — RIC-расширение.

Непосредственно из определений, общих свойств расширений и утверждения 5 вытекают следующие два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть свойство $\mathcal{P}$ сохраняется при образовании композиции и проективных пределов. Если φ — расширение типа $\mathcal{P}$, то φ обладает свойством $\mathcal{P}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Каждое из перечисленных ниже свойств расширений сохраняется при образовании композиции и проективных пределов:

- 1) расширение проксимально;
- 2) расширение дистально;
- 3) расширение является RIC-расширением;
- 4) расширение $(X, S) \rightarrow (Y, S)$ удовлетворяет свойству $\mathcal{G}(Y) = \mathcal{G}(X)H(\mathcal{G}(Y))$;
- 5) расширение α -псевдоустойчиво для некоторого трансфинита α .

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Пусть свойство $\mathcal{P}$ состоит в том, что расширение является RIC-расширением и либо почти дистально, либо почти автоморфно. Если расширение $\varphi: (X, S) \rightarrow (Y, S)$ открыто и является расширением типа $\mathcal{P}$, а универсальное проксимальное минимальное расширение γ полугруппы преобразований (Y, S) полуоткрыто, то φ — RIC-расширение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\delta_\alpha: (X_\alpha, S) \rightarrow (Y, S)$, $\alpha < \mu$, $\delta_\alpha^\beta: (X_\beta, S) \rightarrow (X_\alpha, S)$, $\alpha \leq \beta \leq \mu$, и $\{\delta_\alpha, \delta_\alpha^\beta\}_0^\mu$ — проективная система из определения того, что φ — расширение типа $\mathcal{P}$. Тогда $(X_0, S) = (Y, S)$, $(X_\mu, S) = (X, S)$, $\delta_\mu = \varphi$ и для произвольного α , $\alpha < \mu$, $\delta_\alpha^{\alpha+1}$ — RIC-расширение, либо почти дистальное, либо почти автоморфное расширение. Докажем, что δ_α — RIC-расширение для произвольного $\alpha \leq \mu$.

Очевидно, δ_0 – RIC-расширение. Предположим, что для произвольного трансфинитного числа α , $0 \leq \alpha < \theta \leq \mu$, δ_α – RIC-расширение. Если θ – предельное число, то δ_θ – RIC-расширение по утверждению 5. Пусть $\theta = \alpha + 1$. Тогда δ_α – RIC-расширение; $\delta_{\alpha+1} = \delta_\alpha^{\alpha+1} \circ \delta_\alpha$ – открытое расширение, $\delta_\alpha^{\alpha+1}$ – RIC-расширение, либо почти дистальное, либо почти автоморфное расширение, $R_{\delta_\alpha \gamma}$ – минимальное множество по теореме 2 из [10]. Если $\delta_\alpha^{\alpha+1}$ – RIC-расширение, то $\delta_{\alpha+1}$ – RIC-расширение, как композиция RIC-расширений. Если $\delta_\alpha^{\alpha+1}$ – почти дистальное либо почти автоморфное расширение, то $\overline{R_{\delta_{\alpha+1} \gamma} J} = R_{\delta_{\alpha+1} \gamma}$ по утверждению 3. А так как в силу проксимальности расширения γ $R_{\delta_{\alpha+1} \gamma}$ содержит единственное минимальное множество, то $R_{\delta_{\alpha+1} \gamma}$ – минимальное множество. В таком случае по теореме 2 из [10] $\delta_{\alpha+1}$ – RIC-расширение. Согласно принципу трансфинитной индукции δ_μ – RIC-расширение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Пусть свойство $\mathcal{P}$ состоит в том, что расширение является α -псевдоустойчивым для некоторого трансфинитного числа α RIC-расширением, либо расширение α -псевдоустойчиво для некоторого трансфинитного числа α и почти дистально, либо расширение почти автоморфно. Если расширение $\varphi: (X, S) \rightarrow (Y, S)$ открыто и является расширением типа $\mathcal{P}$, а универсальное проксимальное минимальное расширение полугруппы преобразований (Y, S) полуоткрыто, то φ – β -псевдоустойчивое для некоторого трансфинитного числа β RIC-расширение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство $\mathcal{P}$ влечет следующее свойство: расширение α -псевдоустойчиво для некоторого трансфинитного числа α . Поэтому из утверждений 7 и 6 следует, что φ – β -псевдоустойчивое для некоторого трансфинитного числа β расширение. Расширение φ является RIC-расширением по утверждению 8.

Расширение типа $\mathcal{P}$, где свойство $\mathcal{P}$ состоит в том, что расширение регионально дистально, называем *строгим сильным F-расширением*. Расширение типа $\mathcal{P}$, где свойство $\mathcal{P}$ состоит в том, что расширение проксимально либо регионально дистально, называем *строгим сильным PRD-расширением*.

Строгие сильные F-расширения (PRD-расширения) описаны, в частности, в статье [8]. Так, строгим сильным F-расширением является произвольное дистальное минимальное расширение $\varphi: (X, S) \rightarrow (Y, S)$, если дополнительно выполнено одно из условий:

- 1) S – группа;
- 2) полугруппа S σ -компактна и $Ss \subset sS$ для всех $s \in S$;
- 3) X и Y – метрические пространства.

Следующие два утверждения содержат характеристики строгих сильных F-расширений и строгих сильных PRD-расширений, которые нам понадобятся в дальнейшем.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. Расширение является строгим сильным F-расширением тогда и только тогда, когда оно дистально и α -псевдоустойчиво для некоторого трансфинита α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ – строгое сильное F-расширение. Согласно утверждениям 7 и 6 расширение φ дистально и α -псевдоустойчиво для некоторого трансфинитного числа α . Предположим, что $\varphi: (X, S) \rightarrow (Y, S)$ – дистальное расширение и $H^\alpha(\mathcal{G}(Y)) \subset \mathcal{G}(X)$ для некоторого трансфинитного числа α . Так как $R_\varphi J = R_\varphi$, то по теореме 8 из [8] существуют RD-простое расширение $\delta: (X, S) \rightarrow (W, S)$ и строгое

сильное F-расширение $\eta: (W, S) \rightarrow (Y, S)$ такие, что $\varphi = \delta \circ \eta$. Если мы докажем, что δ – изоморфизм, то наше утверждение доказано. Так как δ – RD-простое расширение, причем $R_\delta J = R_\delta$, то $\mathcal{G}(W) = \mathcal{G}(X)H(\mathcal{G}(W))$ по теореме 4 из [8]. В таком случае $\mathcal{G}(W) = \mathcal{G}(X)H^\alpha(\mathcal{G}(W))$ по утверждению 10 из [7]. Поскольку

$$\mathcal{G}(X) \subset \mathcal{G}(W) = \mathcal{G}(X)H^\alpha(\mathcal{G}(W))\mathcal{G}(X)H^\alpha(\mathcal{G}(Y)) \subset \mathcal{G}(X),$$

то $\mathcal{G}(X) = \mathcal{G}(W)$. В таком случае расширение δ проксимально. А так как $R_\delta J = R_\delta$ и R_δ содержит единственное минимальное подмножество в силу проксимальности δ , то δ – изоморфизм.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Строгое сильное PRD-расширение является α -псевдоустойчивым для некоторого трансфинитного числа α .*

Доказательство следует из определений и утверждений 7 и 6.

4. Дизъюнктность. Пара (φ, ψ) расширений $\varphi: (X, S) \rightarrow (Y, S)$ и $\psi: (Z, S) \rightarrow (Y, S)$ называется *дизъюнктой*, если множество $R_{\varphi\psi}$ минимально. Тот факт, что пара (φ, ψ) дизъюнктна, мы обозначаем символом $\varphi \perp \psi$. Если полугруппа преобразований (Y, S) тривиальна, то мы пишем $(X, S) \perp (Z, S)$ вместо $\varphi \perp \psi$.

В дальнейшем мы рассматриваем пары (φ, ψ) минимальных расширений $\varphi: (X, S) \rightarrow (Y, S)$ и $\psi: (Z, S) \rightarrow (Y, S)$. При этом постоянно предполагаем, что $x_0 \in Xu$, $z_0 \in Zu$, $y_0 = x_0\varphi = z_0\psi$; $\mathcal{A} = \mathcal{G}(X, x_0)$, $\mathcal{B} = \mathcal{G}(Z, z_0)$ и $\mathcal{F} = \mathcal{G}(Y, y_0)$ – группы Эллиса полугрупп преобразований (X, S) , (Z, S) и (Y, S) соответственно. Относительно диаграммы (1) предполагаем, что $\omega_0 = x_0\delta$, $\mathcal{D} = \mathcal{G}(W, \omega_0)$ – группа Эллиса полугруппы преобразований (W, S) . Считаем также, что $\varphi_0: (X_0, S) \rightarrow (Y, S)$ и $\psi_0: (Z_0, S) \rightarrow (Y, S)$ – максимальные RD-факторы φ и ψ соответственно. Через $Q^*(R_\varphi)$ обозначаем замкнутое инвариантное отношение эквивалентности на X , для которого $X_0 = X/Q^*(R_\varphi)$. Через $\mathcal{D}_2$ мы обозначаем группу Эллиса полугруппы преобразований (V, S) , где $(V, S) \rightarrow (Y, S)$ – универсальное регионально дистальное минимальное расширение полугруппы преобразований (Y, S) .

Из теоремы 1 из [8] следует

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место дизъюнктность $\varphi \perp \psi$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F} = \mathcal{A}\mathcal{B}$ и $R_{\varphi\psi} = R_{\varphi\psi}\bar{J}$.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнено одно из условий:*

- 1) *расширение φ α -псевдоустойчиво для некоторого трансфинитного числа α и ψ – RD-простое RIC-расширение;*
- 2) *расширение φ или ψ α -псевдоустойчиво для некоторого трансфинитного числа α , φ – RD-простое расширение и ψ – RIC-расширение.*

Тогда $\varphi \perp \psi$.

Доказательство. Пусть выполнено условие 1). Так как расширение φ α -псевдоустойчиво, то $H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$. Так как ψ – RD-простое RIC-расширение, то $R_{\varphi\psi}\bar{J} = R_{\varphi\psi}$ по следствию 1 из [8] и $\mathcal{F} = \mathcal{B}H(\mathcal{F})$ по теореме 4 из [8]. Из $\mathcal{F} = \mathcal{B}H(\mathcal{F})$ следует $\mathcal{F} = \mathcal{B}H^\alpha(\mathcal{F})$. В таком случае $\mathcal{F} = \mathcal{B}\mathcal{A}H^\alpha(\mathcal{F}) = \mathcal{B}\mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{F} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. Поэтому $\varphi \perp \psi$ согласно теореме 1.

Пусть выполнено условие 2). Предположим, что расширение φ α -псевдоустойчиво. Тогда $H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$. Если φ – RD-простое расширение, то $\mathcal{F} = \mathcal{A}\mathcal{D}_2$ по теореме 4 из [8];

следовательно, $\mathcal{F} = \mathcal{ABH}(\mathcal{F})\mathcal{D}_2$. Так как ψ – RIC-расширение, то $\overline{R_{\varphi\psi}J} = R_{\varphi\psi}$ и $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{BH}(\mathcal{F})$. В таком случае $\mathcal{F} = \mathcal{ABH}(\mathcal{F})$, значит $\mathcal{F} = \mathcal{ABH}^\alpha(\mathcal{F}) = \mathcal{AB}$, т.е. $\mathcal{F} = \mathcal{AB}$. Поэтому $\varphi \perp \psi$ согласно теореме 1. Аналогично рассуждаем, если расширение ψ α -псевдоустойчиво.

Будем говорить, что расширение $\varphi: (X, S) \rightarrow (Y, S)$ удовлетворяет условию Γ , если для всех $y \in Y$ и всех $s \in S$ выполнено равенство $\varphi^{-1}(ys) = \varphi^{-1}(y)s$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть расширение φ открыто, универсальное проксимальное минимальное расширение γ полугруппы преобразований (Y, S) полуоткрыто и $H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{AB}$ для некоторого трансфинитного числа α . Если расширение φ дистально в точке и удовлетворяет условию Γ либо почти дистально, то $\varphi \perp \psi$ тогда и только тогда, когда $\varphi_0 \perp \psi_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать импликацию $\varphi_0 \perp \psi_0 \implies \varphi \perp \psi$. Пусть расширение φ почти дистально. Тогда $R_{\varphi\gamma} = \overline{R_{\varphi\gamma}J}$ согласно утверждению 3. Поскольку $R_{\varphi\gamma}$ содержит единственное минимальное множество в силу проксимальности γ , то $R_{\varphi\gamma}$ – минимальное множество. В таком случае φ – RIC-расширение по теореме 2 из [10]. Если расширение φ дистально в точке и удовлетворяет условию Γ , то оно является RIC-расширением по следствию 5 из [10]. Итак, в условиях теоремы φ – RIC-расширение. Тогда $R_{\varphi\psi} = \overline{R_{\varphi\psi}J}$ согласно следствию 1 из [8]. Если $\varphi_0 \perp \psi_0$, то $\mathcal{F} = \mathcal{AH}(\mathcal{F})\mathcal{B}\mathcal{D}_2$ в силу теоремы 4 из [8] и теоремы 1. Так как $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{AH}(\mathcal{F})$, то $\mathcal{F} = \mathcal{AH}(\mathcal{F})$, откуда в силу утверждения 10 из [7] $\mathcal{F} = \mathcal{AH}^\alpha(\mathcal{F})$. А так как $H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{AB}$, из последнего равенства получаем, что $\mathcal{F} = \mathcal{AB}$. Тогда $\varphi \perp \psi$ в силу теоремы 1.

ТЕОРЕМА 4. Пусть свойство $\mathcal{P}$ состоит в том, что расширение является α -псевдоустойчивым для некоторого трансфинитного числа α RIC-расширением, либо расширение α -псевдоустойчиво для некоторого трансфинитного числа α и почти дистально, либо расширение почти автоморфно. Если расширение φ открыто и является расширением типа $\mathcal{P}$, а универсальное проксимальное минимальное расширение полугруппы преобразований (Y, S) полуоткрыто, то $\varphi \perp \psi$ тогда и только тогда, когда $\varphi_0 \perp \psi_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что из $\varphi_0 \perp \psi_0$ следует $\varphi \perp \psi$. Согласно утверждению 9 φ – β -псевдоустойчивое для некоторого трансфинитного числа β RIC-расширение. Поэтому $H^\beta(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$ и $R_{\varphi\psi} = \overline{R_{\varphi\psi}J}$ по следствию 1 из [8]. Если $\varphi_0 \perp \psi_0$, то $\mathcal{F} = \mathcal{AH}(\mathcal{F})\mathcal{B}\mathcal{D}_2$ в силу теоремы 4 из [8] и теоремы 1. Так как $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{AH}(\mathcal{F})$ по определению $\mathcal{D}_2$, из последнего соотношения следует равенство $\mathcal{F} = \mathcal{ABH}(\mathcal{F})$. В таком случае в силу утверждения 10 из [7] $\mathcal{F} = \mathcal{ABH}^\alpha(\mathcal{F})$. А так как $H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{AB}$, то $\mathcal{F} = \mathcal{AB}$. Согласно теореме 1 $\varphi \perp \psi$.

ТЕОРЕМА 5. Если φ или ψ – строгое сильное F-расширение, то $\varphi \perp \psi$ тогда и только тогда, когда $\varphi_0 \perp \psi_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что из $\varphi_0 \perp \psi_0$ следует $\varphi \perp \psi$. Предположим, что φ является строгим сильным F-расширением. Тогда согласно утверждению 10 φ – дистальное расширение, следовательно, $R_{\varphi\psi}J = R_{\varphi\psi}$, и $H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$ для некоторого трансфинитного числа α . Если $\varphi_0 \perp \psi_0$, то $\mathcal{F} = \mathcal{AH}(\mathcal{F})\mathcal{B}\mathcal{D}_2$ в силу теоремы 4 из [8] и теоремы 1. Так как в силу определения $\mathcal{D}_2$ и теоремы 4 из [8] $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{AH}(\mathcal{F})$, из

последнего равенства следует, что $\mathcal{F} = \mathcal{ABH}(\mathcal{F})$. В таком случае по утверждению 10 из [7] $\mathcal{F} = \mathcal{ABH}^\alpha(\mathcal{F})$. Откуда в силу соотношения $H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$ следует равенство $\mathcal{F} = \mathcal{AB}$. Согласно теореме 1 $\varphi \perp \psi$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть

- 1) φ или ψ – композиция проксимального расширения и В-расширения;
- 2) $H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{AB}$ для некоторого трансфинитного числа α (в частности, φ или ψ – фактор строгого сильного PRD-расширения);
- 3) $R_{\varphi\psi} = \overline{R_{\varphi\psi}J}$.

Тогда и только тогда $\varphi \perp \psi$, когда $\varphi_0 \perp \psi_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что из $\varphi_0 \perp \psi_0$ следует $\varphi \perp \psi$. Если $\varphi_0 \perp \psi_0$, то $\mathcal{F} = \mathcal{AD}_2\mathcal{BH}(\mathcal{F})$ либо $\mathcal{F} = \mathcal{AH}(\mathcal{F})\mathcal{BD}_2$ в силу условия 1) теоремы, теоремы 4 из [8], теоремы 1 и утверждения 4. Так как в силу определения $\mathcal{D}_2$ и теоремы 4 из [8] $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{AH}(\mathcal{F})$ либо $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{BH}(\mathcal{F})$, то $\mathcal{F} = \mathcal{ABH}(\mathcal{F})$. В силу условия 2) теоремы и утверждения 11 $H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{AB}$ для некоторого трансфинита α . Согласно утверждению 10 из [7] $\mathcal{F} = \mathcal{ABH}^\alpha(\mathcal{F})$. Тогда $\mathcal{F} = \mathcal{AB}$. Согласно теореме 1 $\varphi \perp \psi$.

Если для расширений φ и ψ существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} (X_1, S) & \xrightarrow{\varphi_1} & (W, S) & \xleftarrow{\psi_1} & (Z_1, S) \\ p_1 \downarrow & & \eta \downarrow & & p_2 \downarrow \\ (X, S) & \xrightarrow{\varphi} & (Y, S) & \xleftarrow{\psi} & (Z, S) \end{array}, \quad (3)$$

в которой η – строгое сильное PRD-расширение, p_1 и p_2 – минимальные проксимальные расширения и $\varphi_1 \perp \psi_1$, то пару (φ, ψ) называем *сильной PRD-парой* расширений.

Пара (φ, ψ) расширений называется *RD-простой*, если каждый общий RD-фактор расширений φ и ψ , отличный от φ и ψ , является изоморфизмом.

Описание сильных PRD-пар расширений в терминах групп Эллиса содержит следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. Пара (φ, ψ) – сильная PRD-пара тогда и только тогда, когда $\mathcal{AB}$ – группа и $H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{AB}$ для некоторого трансфинитного числа α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (φ, ψ) – сильная PRD-пара. Тогда имеет место коммутативная диаграмма (3), в которой η – строгое сильное PRD-расширение, p_1 и p_2 – проксимальные расширения и $\varphi_1 \perp \psi_1$. Из проксимальности расширений p_1 и p_2 следует, что $\mathcal{G}(X_1) = \mathcal{A}$ и $\mathcal{G}(Z_1) = \mathcal{B}$. Поскольку $\varphi_1 \perp \psi_1$, то $\mathcal{G}(W) = \mathcal{AB}$. Следовательно, $\mathcal{AB}$ – группа. Так как η – строгое сильное PRD-расширение, то $H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{G}(W) = \mathcal{AB}$ для некоторого трансфинитного числа α .

Предположим, что $\mathcal{AB}$ – группа и $H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{AB}$ для некоторого трансфинитного числа α . Согласно теореме 9 из [8] имеет место коммутативная диаграмма (3), в которой η – строгое сильное PRD-расширение, p_1 и p_2 – проксимальные расширения, (φ_1, ψ_1) – RD-простая пара и $\overline{R_{\varphi_1\psi_1}J} = R_{\varphi_1\psi_1}$. Для доказательства утверждения надо доказать, что $\varphi_1 \perp \psi_1$, а для этого в силу теоремы 1 достаточно доказать равенство $\mathcal{G}(W) = \mathcal{G}(X_1)\mathcal{G}(Z_1)$. Докажем это равенство. Из проксимальности расширений p_1 и p_2 следует, что $\mathcal{G}(X_1) = \mathcal{A}$ и $\mathcal{G}(Z_1) = \mathcal{B}$. Тогда по теореме 4 из [8]

$\mathcal{G}(W) = \mathcal{ABH}(\mathcal{G}(W))$. Поскольку $\mathcal{G}(W) = \mathcal{ABH}^\alpha(\mathcal{G}(W))$ согласно утверждению 10 из [7] и $H^\alpha(\mathcal{G}(W)) \subset H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{AB} \subset \mathcal{G}(W)$, из равенства $\mathcal{G}(W) = \mathcal{ABH}(\mathcal{G}(W))$ следует, что $\mathcal{G}(W) = \mathcal{AB} = \mathcal{G}(X_1)\mathcal{G}(Z_1)$.

Если $Ss \subset sS$ для всех $s \in S$, то в терминах групп Эллиса и слабо эргодических множеств некоторое достаточное условие тому, что (φ, ψ) – сильная PRD-пара, содержит следующее утверждение, доказательство которого следует из теоремы 20 работы [8].

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. *Если $Ss \subset sS$ для всех $s \in S$, $\mathcal{AB}$ – группа и в $(R_{\varphi\psi}, S)$ минимально каждое слабо эргодическое множество, в котором плотно множество почти периодических точек, то (φ, ψ) – сильная PRD-пара.*

ТЕОРЕМА 7. *Если для RD-простой сильной PRD-пары (φ, ψ) $\overline{R_{\varphi\psi}J} = R_{\varphi\psi}$, то $\varphi \perp \psi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 12 $\mathcal{AB}$ – группа и $H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{AB}$ для некоторого трансфинитного числа α . Если пара (φ, ψ) RD-проста, то $\mathcal{F} = \mathcal{ABH}(\mathcal{F})$ по теореме 4 из [8]. В таком случае в силу утверждения 10 из [7] $\mathcal{F} = \mathcal{ABH}^\alpha(\mathcal{F})$. А так как $H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{AB}$, то $\mathcal{F} = \mathcal{AB}$. Согласно теореме 1 $\varphi \perp \psi$.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть в диаграмме (1)*

- 1) φ или ψ – композиция проксимального расширения и В-расширения;
- 2) δ – строгое сильное F-расширение;
- 3) $R_\delta \subset Q^*(R_\varphi)$.

Тогда если $\eta \perp \psi$, то $\varphi \perp \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \perp \psi$. Тогда множество $R_{\eta\psi}$ минимально и $\mathcal{F} = \mathcal{BD} = \mathcal{DB}$. Из $\mathcal{F} = \mathcal{BD}$ и утверждения 7 из [7] следует, что

$$H(\mathcal{F}) \subset \mathcal{BH}(\mathcal{D}). \quad (4)$$

Из условия 2) теоремы и утверждения 10 следует, что δ – дистальное α -псевдоустойчивое для некоторого трансфинитного числа α расширение. Если $\theta = \delta \times \text{id } Z$, то расширение $\theta: (R_{\varphi\psi}, S) \rightarrow (R_{\eta\psi}, S)$ дистально; следовательно, множество $R_{\varphi\psi}$ состоит из почти периодических точек.

Предположим, что φ – композиция проксимального расширения и В-расширения. Тогда согласно утверждению 4 и условию 3) нашей теоремы $\mathcal{D} \subset \mathcal{AH}(\mathcal{F})$. Поскольку $\mathcal{F} = \mathcal{BD}$, в таком случае

$$\mathcal{F} = \mathcal{ABH}(\mathcal{F}). \quad (5)$$

Предположим, что ψ – композиция проксимального расширения и В-расширения. Из определения $\mathcal{D}_2$ и утверждения 4 следует, что $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{BH}(\mathcal{F})$. Согласно теореме 3 из [8] и условию 3) нашей теоремы $\mathcal{D} \subset \mathcal{AD}_2$. В таком случае $\mathcal{D} \subset \mathcal{ABH}(\mathcal{F})$ и из равенства $\mathcal{F} = \mathcal{DB}$ следует равенство (5). Таким образом, в условиях нашей теоремы справедливости соотношения (4) и (5). Из этих соотношений следует равенство $\mathcal{F} = \mathcal{ABH}(\mathcal{D})$. Используя это равенство, равенство (5) и трансфинитную индукцию, мы приходим к равенству $\mathcal{F} = \mathcal{ABH}^\alpha(\mathcal{D})$, из которого в силу включения $H^\alpha(\mathcal{D}) \subset \mathcal{A}$ следует равенство $\mathcal{F} = \mathcal{AB}$. Тогда $\varphi \perp \psi$ в силу теоремы 1.

ТЕОРЕМА 9. Пусть в диаграмме (1) δ – строгое сильное F -расширение и φ или ψ – RD -простое расширение, разлагающееся в композицию проксимального расширения и B -расширения. Тогда если $\eta \perp \psi$, то $\varphi \perp \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \perp \psi$. Тогда, как и в доказательстве теоремы 8, получаем, что $\mathcal{F} = \mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$, $H^\alpha(\mathcal{D}) \subset \mathcal{A}$ для некоторого трансфинитного числа α и $R_{\varphi\psi}J = R_\varphi\psi$. Если φ или ψ – RD -простое расширение, разлагающееся в композицию проксимального расширения и B -расширения, то в силу теоремы 3 из [8] и утверждения 4 $\mathcal{F} = \mathcal{A}H(\mathcal{F})$ либо $\mathcal{F} = \mathcal{B}H(\mathcal{F})$. В каждом из случаев $\mathcal{F} = \mathcal{A}\mathcal{B}H(\mathcal{F})$. Дальнейшее доказательство повторяет доказательство соответствующей части доказательства теоремы 8.

ТЕОРЕМА 10. Пусть в диаграмме (1)

- 1) φ или ψ – RD -простое расширение, разлагающееся в композицию проксимального расширения и B -расширения;
- 2) δ – почти дистальное (почти автоморфное) расширение;
- 3) расширение ψ открыто или расширение ψ полукратно, а расширение φ открыто;
- 4) $H^\alpha(\mathcal{D}) \subset \mathcal{A}\mathcal{B}$ для некоторого трансфинитного числа α .

Тогда если $\eta \perp \psi$, то $\varphi \perp \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \perp \psi$. Тогда $R_{\eta\psi}J = R_{\eta\psi}$ и $\mathcal{F} = \mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$. Из условия 1) теоремы следует равенство $\mathcal{F} = \mathcal{A}\mathcal{B}H(\mathcal{F})$. В силу условий 2) и 3) теоремы, равенства $R_{\eta\psi}J = R_{\eta\psi}$ из утверждения 3 следует равенство $\overline{R_{\varphi\psi}J} = R_\varphi\psi$. Дальнейшее доказательство повторяет доказательство соответствующей части доказательства теоремы 8.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если φ – RD -простое почти дистальное открытое расширение, ψ – полукратно расширение и $H^\alpha(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}\mathcal{B}$ для некоторого трансфинитного числа α , то $\varphi \perp \psi$.

ТЕОРЕМА 11. Пусть свойство $\mathcal{P}$ состоит в том, что расширение является строгим сильным F -расширением либо почти автоморфно, и пусть в диаграмме (1)

- 1) φ – B -расширение или ψ – расширение, разлагающееся в композицию проксимального расширения и B -расширения;
- 2) расширение ψ открыто или расширение ψ полукратно, а расширение φ открыто;
- 3) δ – расширение типа $\mathcal{P}$;
- 4) $R_\delta \subset Q^*(R_\varphi)$.

Тогда если $\eta \perp \psi$, то $\varphi \perp \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \perp \psi$ и $\delta_\alpha: (X_\alpha, S) \rightarrow (W, S)$, $\alpha \leq \mu$, $\delta_\alpha^\beta: (X_\beta, S) \rightarrow (X_\alpha, S)$, $\alpha \leq \beta \leq \mu$, – морфизмы из определения того, что δ – расширение типа $\mathcal{P}$. Тогда $(X_0, S) = (W, S)$ и $(X_\mu, S) = (X, S)$. Обозначим $\gamma_\alpha = \delta_\alpha \circ \eta$, $\alpha \leq \mu$. Тогда $\varphi = \gamma_\mu$ и $\eta = \gamma_0$. Так как $\eta \perp \psi$, то $\gamma_0 \perp \psi$. Предположим, что для произвольного трансфинитного числа α , $\alpha < \beta \leq \mu$, верно $\gamma_\alpha \perp \psi$, и докажем, что $\gamma_\beta \perp \psi$. Если β – предельное число, то

$$\delta_\beta = \varprojlim (\delta_\alpha, \delta_\alpha^\nu)_0^\beta, \quad \gamma_\beta = \delta_\beta \circ \eta = \varprojlim (\gamma_\alpha, \delta_\alpha^\nu)_0^\beta.$$

Так как $\gamma_\alpha \perp \psi$ для произвольного $\alpha, \alpha < \beta$, то $\gamma_\beta \perp \psi$ по утверждению 5. Пусть $\beta = \alpha + 1$. Тогда $\gamma_\alpha \perp \psi$ по индуктивному предположению. Так как

$$\gamma_\beta = \gamma_{\alpha+1} = \delta_{\alpha+1} \circ \eta = \delta_\alpha^{\alpha+1} \circ \delta_\alpha \circ \eta = \delta_\alpha^{\alpha+1} \circ \gamma_\alpha,$$

то $\gamma_\beta = \delta_\alpha^{\alpha+1} \circ \gamma_\alpha$. Справедливы также свойства:

- a) $\delta_\alpha^{\alpha+1}$ – строгое сильное F-расширение либо
- b) $\delta_\alpha^{\alpha+1}$ – почти автоморфное расширение;
- c) γ_β – В-расширение (как фактор В-расширения, если φ – В-расширение) либо ψ разлагается в композицию проксимального расширения и В-расширения;
- d) $R_{\delta_\alpha^{\alpha+1}} \subset Q^*(R_{\gamma_\beta})$;
- e) расширение ψ открыто или расширение ψ полуоткрыто, а расширение γ_β открыто (как фактор открытого расширения φ).

Если выполнены свойства a), c) и d), то $\gamma_\beta \perp \psi$ согласно теореме 8. Пусть выполнены свойства b) и e). Так как почти автоморфное расширение проксимально, то $\mathcal{G}(X_\beta) = \mathcal{G}(X_\alpha)$. Из $\gamma_\alpha \perp \psi$ следует, что $\mathcal{F} = \mathcal{G}(X_\alpha)\mathcal{B} = \mathcal{G}(X_\beta)\mathcal{B}$ и $R_{\gamma_\alpha\psi}J = R_{\gamma_\alpha\psi}$. Согласно утверждению 3 $\overline{R_{\gamma_\beta\psi}J} = R_{\gamma_\beta\psi}$. В таком случае в силу теоремы 1 $\gamma_\beta \perp \psi$. Согласно принципу трансфинитной индукции $\gamma_\mu \perp \psi$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть свойство $\mathcal{P}$ состоит в том, что расширение регионально дистально либо почти автоморфно. Если φ – RD-простое расширение типа $\mathcal{P}$ и ψ – открытое расширение, разлагающееся в композицию проксимального расширения и В-расширения, то $\varphi \perp \psi$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть полугруппа S коммутативна и свойство $\mathcal{P}$ состоит в том, что расширение регионально дистально либо почти автоморфно. Если $\delta: (X, S) \rightarrow (W, S)$ – расширение типа $\mathcal{P}$ и $R_\delta \subset Q^*(X \times X)$, то $(W, S) \perp (Z, S)$ тогда и только тогда, когда $(X, S) \perp (Z, S)$.

ТЕОРЕМА 12. Пусть в диаграмме (1)

- 1) φ или ψ – композиция проксимального расширения и В-расширения;
- 2) расширение ψ открыто или расширение ψ полуоткрыто, а расширение φ открыто;
- 3) расширение δ почти дистально и α -псевдоустойчиво для некоторого трансфинита α ;
- 4) $R_\delta \subset Q^*(R_\varphi)$.

Тогда если $\eta \perp \psi$, то $\varphi \perp \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \perp \psi$. Как и в доказательстве теоремы 8, мы получим, что $\mathcal{F} = \mathcal{A}\mathcal{B}$. Из утверждения 3 следует, что $R_{\varphi\psi} = \overline{R_{\varphi\psi}J}$. Тогда $\varphi \perp \psi$ по теореме 1.

ТЕОРЕМА 13. Пусть свойство $\mathcal{P}$ состоит в том, что расширение почти дистально и α -псевдоустойчиво для некоторого трансфинита α . И пусть в диаграмме (1)

- 1) φ – В-расширение или ψ – расширение, разлагающееся в композицию проксимального расширения и В-расширения;
- 2) расширение ψ открыто или расширение ψ полуоткрыто, а расширение φ открыто;
- 3) δ – расширение типа $\mathcal{P}$;
- 4) $R_\delta \subset Q^*(R_\varphi)$.

Тогда если $\eta \perp \psi$, то $\varphi \perp \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство теоремы 11, только вместо теоремы 8 нужно воспользоваться теоремой 12.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть свойство $\mathcal{P}$ состоит в том, что расширение почти дистально и α -псевдоустойчиво для некоторого трансфинита α . Если φ – RD-простое типа $\mathcal{P}$ расширение и ψ – открытое расширение, разлагающееся в композицию проксимального расширения и В-расширения, то $\varphi \perp \psi$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть полугруппа S коммутативна и свойство $\mathcal{P}$ состоит в том, что расширение почти дистально и α -псевдоустойчиво для некоторого трансфинита α . Если $\delta: (X, S) \rightarrow (W, S)$ – расширение типа $\mathcal{P}$ и $R_\delta \subset Q^*(X \times X)$, то $(W, S) \perp (Z, S)$ тогда и только тогда, когда $(X, S) \perp (Z, S)$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть свойство $\mathcal{P}$ состоит в том, что расширение является строгим сильным F-расширением, либо почти автоморфно, либо почти дистально и α -псевдоустойчиво для некоторого трансфинита α . И пусть в диаграмме (1)

- 1) расширение ψ открыто и разлагается в композицию проксимального расширения и В-расширения;
- 2) δ – расширение типа $\mathcal{P}$;
- 3) $R_\delta \subset Q^*(R_\varphi)$.

Тогда если $\eta \perp \psi$, то $\varphi \perp \psi$.

ТЕОРЕМА 14. Пусть свойство $\mathcal{P}$ состоит в том, что расширение является строгим сильным F-расширением либо расширение сильно почти автоморфно. Для расширения φ типа $\mathcal{P}$ и открытого расширения ψ , разлагающегося в композицию проксимального расширения и В-расширения, $\varphi \perp \psi$ тогда и только тогда, когда $\varphi_0 \perp \psi_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать импликацию $\varphi_0 \perp \psi_0 \implies \varphi \perp \psi$. Пусть $\varphi_0 \perp \psi_0$. Тогда $\varphi_0 \perp \psi$. Предположим, что $\delta_\alpha: (X_\alpha, S) \rightarrow (Y, S)$, $\alpha < \mu$, $\delta_\alpha^\beta: (X_\beta, S) \rightarrow (X_\alpha, S)$, $\alpha \leq \beta \leq \mu$, и $\{\delta_\alpha, \delta_\alpha^\beta\}_0^\mu$ – проективная система из определения того, что φ – расширение типа $\mathcal{P}$. Тогда $(X_0, S) = (Y, S)$, $(X_\mu, S) = (X, S)$ и для произвольного α , $\alpha < \mu$, $\delta_\alpha^{\alpha+1}$ – строгое сильное F-расширение либо сильно почти автоморфное расширение. И пусть расширение $\eta: (X, S) \rightarrow (X/Q^*(R_\varphi), S)$ таково, что $\varphi = \eta \circ \varphi_0$. Построим индуктивно проективную систему $\{\eta_\alpha, \eta_\alpha^\beta\}_0^\mu$ расширений $\eta_\alpha: (Y_\alpha, S) \rightarrow (X/Q^*(R_\varphi), S)$ и их морфизмов $\eta_\alpha^\beta: (Y_\beta, S) \rightarrow (Y_\alpha, S)$, для которой

- 1) $\eta_\alpha^{\alpha+1}: (Y_{\alpha+1}, S) \rightarrow (Y_\alpha, S)$, $0 \leq \alpha < \mu$, – строгое сильное F-расширение либо почти автоморфное расширение;
- 2) полугруппа преобразований (Y_μ, S) изоморфна полугруппе преобразований (X, S) .

При $\alpha = 0$ положим $(Y_0, S) = (X/Q^*(R_\varphi), S)$; η_0 и η_0^0 – тождественные отображения, $\sigma_0 = \eta$.

При $\alpha = 1$ положим $(Y_1, S) = (X_\mu/(R_{\delta_1^\mu} \cap R_{\sigma_0}), S)$; $\eta_0^1: Y_1 \rightarrow Y_0$ – каноническое отображение по правилу

$$x(R_{\delta_1^\mu} \cap R_{\sigma_0})\eta_0^1 = x\sigma_0, \quad x \in X_\mu;$$

$\eta_1 = \eta_0^1 \circ \eta_0; \sigma_1: X_\mu \rightarrow Y_1$ – каноническое отображение по правилу

$$x\sigma_1 = x(R_{\delta_1^\mu} \cap R_{\sigma_0}), \quad x \in X_\mu;$$

$\zeta_1: Y_1 \rightarrow X_1$ – каноническое отображение по правилу

$$x(R_{\delta_1^\mu} \cap R_{\sigma_0})\zeta_1 = x\delta_1^\mu, \quad x \in X_\mu.$$

Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (X_\mu, S) & \xrightarrow{\delta_2^\mu} & (X_2, S) \\ \sigma_1 \downarrow & \searrow \delta_1^\mu & \delta_1^2 \downarrow \\ (Y_1, S) & \xrightarrow{\zeta_1} & (X_1, S) \end{array}.$$

Предположим, что для произвольного трансфинита α , $0 \leq \alpha < \theta \leq \mu$, построены расширения $\eta_\alpha, \eta_\alpha^\beta$, $0 \leq \alpha \leq \beta < \theta$, и коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (X_\mu, S) & \xrightarrow{\delta_{\alpha+1}^\mu} & (X_{\alpha+1}, S) \\ \sigma_\alpha \downarrow & \searrow \delta_\alpha^\mu & \delta_{\alpha+1}^{\alpha+1} \downarrow \\ (Y_\alpha, S) & \xrightarrow{\zeta_\alpha} & (X_\alpha, S) \end{array}.$$

Если θ – предельное число, то положим $\eta_\theta: (Y_\theta, S) \rightarrow (X/Q^*(R_\varphi), S)$ – проективный предел трансфинитной последовательности расширений $\{\eta_\alpha \mid \alpha < \theta\}$ и их морфизмов η_α^β , $\alpha \leq \beta < \theta$; $\eta_\alpha^\theta: Y_\theta \rightarrow Y_\alpha$ – естественное проектирование из определения Y_θ , $\alpha \leq \theta$.

Пусть $\theta = \alpha + 1$ для некоторого трансфинитного числа α . Положим

$$(Y_{\alpha+1}, S) = (X_\mu / (R_{\delta_{\alpha+1}^\mu} \cap R_{\sigma_\alpha}), S);$$

$\eta_\alpha^{\alpha+1}: Y_{\alpha+1} \rightarrow Y_\alpha$ – каноническое отображение по правилу

$$x(R_{\delta_{\alpha+1}^\mu} \cap R_{\sigma_\alpha})\eta_\alpha^{\alpha+1} = x\sigma_\alpha, \quad x \in X_\mu;$$

$\eta_{\alpha+1} = \eta_\alpha^{\alpha+1} \circ \eta_\alpha; \eta_\gamma^{\alpha+1} = \eta_\alpha^{\alpha+1} \circ \eta_\gamma^\alpha$, $\gamma \leq \alpha$; $\sigma_{\alpha+1}: X_\mu \rightarrow Y_{\alpha+1}$ – каноническое отображение по правилу

$$x\sigma_{\alpha+1} = x(R_{\delta_{\alpha+1}^\mu} \cap R_{\sigma_\alpha}), \quad x \in X_\mu;$$

$\zeta_{\alpha+1}: Y_{\alpha+1} \rightarrow X_{\alpha+1}$ – каноническое отображение по правилу

$$x(R_{\delta_{\alpha+1}^\mu} \cap R_{\sigma_\alpha})\zeta_{\alpha+1} = x\delta_{\alpha+1}^\mu, \quad x \in X_\mu.$$

Коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc}
 (X_\mu, S) & & \xrightarrow{\delta_{\alpha+1}^\mu} & & (X_{\alpha+1}, S) \\
 & \searrow \sigma_{\alpha+1} & & \nearrow \zeta_{\alpha+1} & \\
 \sigma_\alpha \downarrow & & (Y_{\alpha+1}, S) & & \delta_{\alpha+1}^{\alpha+1} \downarrow \\
 & \nearrow \eta_{\alpha+1}^{\alpha+1} & & & \\
 (Y_\alpha, S) & & \xrightarrow{\zeta_\alpha} & & (X_\alpha, S)
 \end{array}$$

Докажем, что расширение $\eta_\alpha^{\alpha+1}$ является строгим сильным F-расширением либо почти автоморфно. Поскольку φ – расширение типа $\mathcal{P}$, оно согласно утверждениям 6, 7 и 10 является ν -псевдоустойчивым для некоторого трансфинитного числа ν . Понятно, что расширение δ_α^μ , а следовательно, и расширения σ_α и $\eta_\alpha^{\alpha+1}$ ν -псевдоустойчивы. Допустим, что $\delta_\alpha^{\alpha+1}$ – строгое сильное F-расширение. Тогда $\delta_\alpha^{\alpha+1}$ – дистальное расширение и по утверждению 1 выполняется включение $P(R_{\delta_\alpha^\mu}) \subset R_{\delta_{\alpha+1}^\mu}$. Поскольку $P(R_{\sigma_\alpha}) \subset P(R_{\delta_\alpha^\mu})$, то $P(R_{\sigma_\alpha}) \subset R_{\delta_{\alpha+1}^\mu}$. А так как $P(R_{\sigma_\alpha}) \subset R_{\sigma_\alpha}$, то $P(R_{\sigma_\alpha}) \subset R_{\delta_{\alpha+1}^\mu} \cap R_{\sigma_\alpha}$. Поэтому по утверждению 1 расширение $\eta_\alpha^{\alpha+1}$ дистально. Поскольку расширение $\eta_\alpha^{\alpha+1}$ и ν -псевдоустойчиво, оно является строгим сильным F-расширением по утверждению 10. Допустим, что $\delta_\alpha^{\alpha+1}$ – сильно почти автоморфное расширение. Пусть точка x из X_μ такова, что $xR_{\delta_{\alpha+1}^\mu} = xR_{\delta_\alpha^\mu}$, и $s \in S$. Поскольку $xR_{\sigma_\alpha} \subset xR_{\delta_\alpha^\mu} = xR_{\delta_{\alpha+1}^\mu}$, то

$$xR_{\sigma_\alpha} \subset xR_{\delta_{\alpha+1}^\mu} \cap xR_{\sigma_\alpha} = x(R_{\delta_{\alpha+1}^\mu} \cap R_{\sigma_\alpha}),$$

т.е. $xR_{\sigma_\alpha} \subset x(R_{\delta_{\alpha+1}^\mu} \cap R_{\sigma_\alpha})$. Так как верно и обратное включение, то $xR_{\sigma_\alpha} = x(R_{\delta_{\alpha+1}^\mu} \cap R_{\sigma_\alpha})$. В силу инвариантности множества точек, в которых инъективно отображение $\delta_\alpha^{\alpha+1}$, отображение $\delta_\alpha^{\alpha+1}$ инъективно в точке $(xR_{\delta_{\alpha+1}^\mu})s$. А так как $(xR_{\delta_{\alpha+1}^\mu})s = xsR_{\delta_{\alpha+1}^\mu}$, отображение $\delta_\alpha^{\alpha+1}$ инъективно в точке $xsR_{\delta_{\alpha+1}^\mu}$. В таком случае по доказанному выше отображение $\eta_\alpha^{\alpha+1}$ инъективно в точке $xs(R_{\delta_{\alpha+1}^\mu} \cap R_{\sigma_\alpha})$. А так как

$$xs(R_{\delta_{\alpha+1}^\mu} \cap R_{\sigma_\alpha}) = (x(R_{\delta_{\alpha+1}^\mu} \cap R_{\sigma_\alpha}))s,$$

отображение $\eta_\alpha^{\alpha+1}$ инъективно в точке $(x(R_{\delta_{\alpha+1}^\mu} \cap R_{\sigma_\alpha}))s$. Таким образом, отображение $\eta_\alpha^{\alpha+1}$ инъективно в каждой точке траектории точки $x(R_{\delta_{\alpha+1}^\mu} \cap R_{\sigma_\alpha})$. Поскольку полугруппа преобразований $(Y_{\alpha+1}, S)$ минимальна, расширение $\eta_\alpha^{\alpha+1}$ почти автоморфно.

Итак, мы построили проективную систему $\{\eta_\alpha, \eta_\alpha^\beta\}_0^\mu$ расширений, удовлетворяющую условию 1). Поскольку δ_μ^μ – изоморфизм, из индуктивного построения видно, что σ_μ – изоморфизм, т.е. выполнено и условие 2). Расширение φ_0 является максимальным RD-фактором расширения $\eta_\mu \circ \varphi_0$, поэтому мы находимся в условиях теоремы 11 при $\delta = \eta_\mu$ и $\eta = \varphi_0$. Значит, $\eta_\mu \circ \varphi_0 \perp \psi$ и, следовательно, $\varphi \perp \psi$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть полугруппа S коммутативна и свойство $\mathcal{P}$ состоит в том, что расширение является строгим сильным F-расширением либо расширение сильно почти автоморфно. Если полугруппа преобразований (X, S) является расширением типа $\mathcal{P}$ одноточечной полугруппы преобразований, то

$$(X, S) \perp (Z, S) \iff (X/Q^*(X \times X), S) \perp (Z/Q^*(Z \times Z), S).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Furstenberg H. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation // Math. Systems Theory. 1967. V. 1. P. 1–49.
- [2] Shapiro L. Distal and proximal extensions of minimal flows // Math. Systems Theory. 1971. V. 5. P. 76–88.
- [3] Бронштейн И.У. Расширения минимальных групп преобразований. Кишинев: Штиинца, 1975.
- [4] Van der Woude J.C.S.P. Topological Dynamics. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1982.
- [5] Gerko A. I. On some disjointness classes of extensions of minimal topological transformation semigroups // Укр. матем. ж. 2000. Т. 67. № 10. С. 1335–1344.
- [6] Ellis R., Glasner Sh., Shapiro L. Proximal-isometric (PI -) flows // Advances in Math. 1975. V. 17. P. 213–260.
- [7] Герко А. И. $\tau(A)$ -топология и некоторые свойства групп, связанных с топологическими полугруппами преобразований // Изв. АН Республики Молдова. Матем. 1991. Т. 2. С. 23–31.
- [8] Gerko A. I. On the structure of n -fans of minimal topological transformation semigroups // Scientific Annals, Faculty of Mathematics and Informatics, State University of Moldova. 1999. V. 1. P. 50–74.
- [9] Герко А. И. RIC-расширения и структура расширений минимальных полугрупп преобразований // Матем. исследования (Кишинев). 1984. Т. 77. С. 45–60.
- [10] Герко А. И. Некоторые свойства RIC-расширений минимальных полугрупп преобразований // Матем. исследования (Кишинев). 1986. Т. 88. С. 11–19.

Государственный университет Молдовы, г. Кишинев
E-mail: gerko@usm.md

Поступило
12.02.2001