Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, А. М. Назари, О расстоянии до ближайшей матрицы с тройным собственным значением нуль, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 545–555

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:24:00

УДК 519.6

О РАССТОЯНИИ ДО БЛИЖАЙШЕЙ МАТРИЦЫ С ТРОЙНЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ НУЛЬ

Х. Д. Икрамов, А. М. Назари

Оценивается спектральное расстояние от A до множества $\mathcal{M}$ ($n \times n$)-матриц, имеющих собственное значение 0 кратности ≥ 3 . Если

$$Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} A & \gamma_1 I_n & \gamma_3 I_n \\ 0 & A & \gamma_2 I_n \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \quad n \geq 3,$$

то

$$\rho_2(A, \mathcal{M}) \geq \max_{\gamma_1, \gamma_2 \geq 0, \gamma_3 \in \mathbb{C}} \sigma_{3n-2}(Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)),$$

где $\sigma_i(\cdot)$ есть i -е сингулярное число соответствующей матрицы при упорядочении сингулярных чисел по убыванию. При этом, если максимум в правой части достигается в точке $\gamma^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*)$, где $\gamma_1^* \gamma_2^* \neq 0$, то, в действительности, имеет место точное равенство

$$\rho_2(A, \mathcal{M}) = \sigma_{3n-2}(Q(\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*)).$$

Этот результат можно рассматривать как обобщение формулы А. Н. Малышева для спектрального расстояния от A до множества матриц с кратным собственным значением нуль.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. Пусть A – комплексная ($n \times n$)-матрица, $\mathcal{L}$ – множество ($n \times n$)-матриц с кратным собственным значением 0. В недавней статье А. Н. Малышева [1] получена следующая формула для спектрального расстояния от A до $\mathcal{L}$:

$$\rho_2(A, \mathcal{L}) = \min_{L \in \mathcal{L}} \|A - L\|_2 = \max_{\gamma \geq 0} \sigma_{2n-1}(P_\lambda(\gamma)). \quad (1)$$

Здесь

$$P_\lambda(\gamma) = \begin{pmatrix} A & \gamma I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad (2)$$

а $\sigma_i(\cdot)$ обозначает i -е сингулярное число соответствующей матрицы. Предполагается, что сингулярные числа всякой матрицы упорядочены по убыванию.

Цель настоящего сообщения – указать аналогичную формулу для спектрального расстояния от A до множества $\mathcal{M}$ матриц, имеющих собственное значение 0 кратности ≥ 3 . Положим

$$Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{pmatrix} A & \gamma_1 I_n & \gamma_3 I_n \\ 0 & A & \gamma_2 I_n \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \quad n \geq 3. \quad (3)$$

Тогда

$$\rho_2(A, \mathcal{M}) \geq \max_{\gamma_1, \gamma_2 \geq 0, \gamma_3 \in \mathbb{C}} \sigma_{3n-2}(Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)). \quad (4)$$

При этом, если максимум в правой части достигается в точке $\gamma^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*)$, где $\gamma_1^* \gamma_2^* \neq 0$, то (4) превращается в точное равенство

$$\rho_2(A, \mathcal{M}) = \sigma_{3n-2}(Q(\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*)). \quad (5)$$

Доказательство этого утверждения проводится в п. 2–5. С определенными усложнениями оно следует схеме, примененной Малышевым в [1]. Центральным моментом доказательства является лемма 6, представляющая собой “многопараметрический” вариант одноименной леммы Малышева.

2. Нижняя оценка для $\rho_2(A, \mathcal{M})$. В этом пункте будет доказано неравенство (4). Доказательство использует две леммы, первая из которых хорошо известна.

ЛЕММА 1. *Матрица B порядка n имеет собственное значение 0 кратности ≥ 3 тогда и только тогда, когда*

$$\text{rank } B^3 \leq n - 3. \quad (6)$$

ЛЕММА 2. *Если выполнено условие (6), то матрица*

$$Q_B = \begin{pmatrix} B & \gamma_1 I_n & \gamma_3 I_n \\ 0 & B & \gamma_2 I_n \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \quad (7)$$

имеет ранг $\leq 3n - 3$, каковы бы ни были γ_1, γ_2 и γ_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что неравенство (6) возможно лишь при условии, что матрица B вырождена и

$$\text{rank } B^2 \leq n - 2. \quad (8)$$

При $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ утверждение леммы очевидно. Если $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 \neq 0$, то матрица (7) эквивалентна каждой из матриц

$$\begin{pmatrix} B & \gamma_3 I_n & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & \gamma_3 I_n & 0 \\ -(1/\gamma_3)B^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 I_n & 0 \\ -(1/\gamma_3)B^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \sim I_n \oplus B^2 \oplus B. \quad (9)$$

Эквивалентность двух матриц понимается здесь как возможность перевести любую из них в другую посредством элементарных преобразований строк и столбцов. Из (8) следует, что ранг матрицы (9) $\leq 3n - 3$.

Предположим теперь, что $\gamma_1 \gamma_2 = 0$, но одно из этих чисел ненулевое; пусть, для определенности, $\gamma_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{pmatrix} B & \gamma_1 I_n & \gamma_3 I_n \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & \gamma_1 I_n & 0 \\ 0 & B & -(\gamma_3/\gamma_1)B \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & \gamma_1 I_n & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \sim I_n \oplus B^2 \oplus B. \quad (10)$$

Таким образом, лемма справедлива и в этом случае.

Пусть, наконец, $\gamma_1 \neq 0$ и $\gamma_2 \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B & \gamma_1 I_n & \gamma_3 I_n \\ 0 & B & \gamma_2 B \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} B & \gamma_1 I_n & 0 \\ 0 & B & \gamma_2 I_n - (\gamma_3/\gamma_1)B \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & \gamma_1 I_n & 0 \\ 0 & B & \gamma_2 I_n \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 I_n & 0 \\ -(1/\gamma_1)B^2 & 0 & \gamma_2 I_n \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 I_n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 I_n \\ (1/(\gamma_1 \gamma_2))B^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim I_n \oplus I_n \oplus B^3. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь утверждение леммы следует из неравенства (6).

Перейдем к доказательству неравенства (4). Пусть Δ – матрица минимальной спектральной нормы такая, что $B = A + \Delta \in \mathcal{M}$. Согласно лемме 2 ранг матрицы Q_B (см. (7)) не превосходит $3n - 3$, поэтому сингулярное число $\sigma_{3n-2}(Q_B)$ равно нулю. Представим Q_B в виде

$$Q_B = Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) + \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} = Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) + D. \quad (12)$$

Учитывая, что $\|D\|_2 = \|\Delta\|_2$, и применяя неравенства Вейля для сингулярных чисел (см., например, [2, следствие 5.1]), выводим из представления (12) и равенства $\sigma_{3n-2}(Q_B) = 0$ оценку

$$\|D\|_2 \geq \sigma_{3n-2}(Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)).$$

Ввиду произвольности γ , получаем требуемое неравенство (4).

3. Свойства сингулярных векторов матрицы $Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Пусть

$$\sigma^* = \max_{\gamma_1, \gamma_2 \geq 0, \gamma_3 \in \mathbb{C}} \sigma_{3n-2}(Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)). \quad (13)$$

Если $\sigma^* = 0$, то, в частности, $\sigma_{3n-2}(Q(1, 1, 0)) = 0$. Выкладки, аналогичные тем, что проводились в предыдущем пункте, приводят к соотношению

$$Q(1, 1, 0) \sim I_n \oplus I_n \oplus A^3,$$

откуда следует, что $\text{rank } A^3 \leq n - 3$ и, стало быть, $A \in \mathcal{M}$. Таким образом, при $\sigma^* = 0$ формула (5) выполняется. Это позволяет нам в дальнейшем считать, что $\sigma^* > 0$.

Рассуждениями, начинающимися здесь и продолжающимися до конца п. 5, мы покажем (при ограничениях, указанных во введении) существование матрицы Δ такой, что

$$\|\Delta\|_2 = \sigma^* \quad (14)$$

и

$$A + \Delta \in \mathcal{M}. \quad (15)$$

Этим будет доказана формула (5).

Построение матрицы Δ опирается на свойства сингулярных векторов матрицы $Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ как в произвольной точке

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

так и в точке $\gamma = \gamma^*$, реализующей локальный экстремум функции

$$f(\gamma) = \sigma_{3n-2}(Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)). \quad (16)$$

В настоящем пункте перечисляются свойства, справедливые для всех γ .

Пусть σ – сингулярное число матрицы $Q(\gamma) = Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, а u и v – соответственно правый и левый сингулярные векторы, ассоциированные с σ . Это значит, что

$$Qu = \sigma v, \quad Q^*v = \sigma u. \quad (17)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$.

Представим u и v в блочном виде

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

где каждый из подвекторов u_i и v_j имеет размерность n .

Равенства (17) приводят к соотношениям

$$Au_1 + \gamma_1 u_2 + \gamma_3 u_3 = \sigma v_1, \quad (18)$$

$$Au_2 + \gamma_2 u_3 = \sigma v_2, \quad (19)$$

$$Au_3 = \sigma v_3, \quad (20)$$

$$A^*v_1 = \sigma u_1, \quad (21)$$

$$A^*v_2 + \gamma_1 v_1 = \sigma u_2, \quad (22)$$

$$A^*v_3 + \gamma_3 v_1 + \gamma_2 v_2 = \sigma u_3. \quad (23)$$

ЛЕММА 3. Если $\sigma > 0$, то

$$v_1^* v_3 = u_1^* u_3. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим (20) скалярно на v_1 , а (21) на u_3 . Беря сопряжение от второго из полученных соотношений и вычитая его из первого, приходим к равенству

$$\sigma(v_1^* v_3 - u_1^* u_3) = 0, \quad (25)$$

откуда следует (24).

ЛЕММА 4. Для любых $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \gamma_1(\delta_1 - \delta_2)v_1^* u_2 + \gamma_2(\delta_2 - \delta_3)v_2^* u_3 + \gamma_3(\delta_1 - \delta_3)v_1^* u_3 \\ & = \sigma[\delta_1(v_1^* v_1 - u_1^* u_1) + \delta_2(v_2^* v_2 - u_2^* u_2) + \delta_3(v_3^* v_3 - u_3^* u_3)]. \end{aligned} \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим равенства (18)–(20) скалярно соответственно на $\delta_1 v_1$, $\delta_2 v_2$, $\delta_3 v_3$. Затем умножим (21)–(23) соответственно на $\delta_1 u_1$, $\delta_2 u_2$, $\delta_3 u_3$. Возьмем сумму первых трех полученных соотношений и вычтем из нее результат комплексного сопряжения, примененного к сумме трех остальных соотношений. Это приводит к равенству (26).

ЛЕММА 5. *Справедливы соотношения*

$$\gamma_2 v_1^* u_3 = \sigma(v_1^* v_2 - u_1^* u_2), \quad (27)$$

$$\gamma_1 v_1^* u_3 = \sigma(u_2^* u_3 - v_2^* v_3). \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы получить (27), умножим скалярно (19) на v_1 , а (21) на u_2 , а затем вычтем из первого соотношения сопряженное ко второму. Аналогичные выкладки, где (20) умножается на v_2 , а (22) на u_3 , приводят к (28).

4. Дополнительные свойства в точке локального экстремума. Пусть в точке

$$\gamma^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*)$$

реализуется локальный экстремум σ^* функции $f(\gamma)$. Напомним, что γ_1 и γ_2 вещественны, а $\gamma_3 = \gamma_{3R} + i\gamma_{3I}$ – комплексная переменная. Удобно положить

$$\gamma_1 = \xi_1, \quad \gamma_2 = \xi_2, \quad \gamma_{3R} = \xi_3, \quad \gamma_{3I} = \xi_4$$

и рассматривать f как функцию четырех вещественных переменных $\xi_1, \dots, \xi_4$. Сингулярные векторы матрицы Q , относящиеся к числу σ^* в точке локального экстремума

$$\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*, \xi_4^*), \quad (29)$$

помимо свойств, выражаемых леммами 3–5, подчиняются соотношениям, заключенным в следующей лемме.

ЛЕММА 6. *Если точка ξ^* (см. (29)) реализует локальный экстремум $\sigma^* > 0$ функции f , то найдутся ассоциированные с σ^* правый и левый сингулярные векторы u и v такие, что*

$$\operatorname{Re} \left(v^* \frac{\partial Q}{\partial \xi_1}(\xi^*) u \right) = 0, \quad (30)$$

$$\operatorname{Re} \left(v^* \frac{\partial Q}{\partial \xi_2}(\xi^*) u \right) = 0, \quad (31)$$

$$\operatorname{Re} \left(v^* \frac{\partial Q}{\partial \xi_3}(\xi^*) u \right) = 0, \quad (32)$$

$$\operatorname{Re} \left(v^* \frac{\partial Q}{\partial \xi_4}(\xi^*) u \right) = 0. \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если σ^* – простое сингулярное число матрицы $Q(\xi^*)$, то

$$f(\xi) = \sigma_{3n-2}(Q(\xi)) \quad (34)$$

является (вещественной) аналитической функцией переменных $\xi_1, \dots, \xi_4$ в некоторой окрестности точки ξ^* и соотношения (30)–(33) суть попросту необходимые условия экстремума, записанные с помощью формулы дифференцирования сингулярного числа из [3, лемма 4].

Предположим теперь, что σ^* – кратное сингулярное число. В некоторой окрестности точки ξ^* рассмотрим функции

$$\sigma_- \equiv \sigma_{3n-2}(\xi), \quad \sigma_+ \equiv \sigma_{3n-3}(\xi).$$

Они не дифференцируемы в ξ^* вследствие наложенного на них условия упорядоченности $\sigma_{3n-2} \leq \sigma_{3n-3}$. Однако если отказаться от этого условия, то в окрестности точки ξ^* определены (вещественные) аналитические функции $\tilde{\sigma}_-(\xi)$ и $\tilde{\sigma}_+(\xi)$, также имеющие смысл сингулярных чисел, причем

$$\sigma_-(\xi) = \min\{\tilde{\sigma}_-(\xi), \tilde{\sigma}_+(\xi)\}, \quad (35)$$

$$\sigma_+(\xi) = \max\{\tilde{\sigma}_-(\xi), \tilde{\sigma}_+(\xi)\}. \quad (36)$$

Пусть $u_-(\xi), v_-(\xi)$ и $u_+(\xi), v_+(\xi)$ суть пары сингулярных векторов, ассоциированных соответственно с $\tilde{\sigma}_-(\xi)$ и $\tilde{\sigma}_+(\xi)$. Уравнение

$$F(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \equiv \tilde{\sigma}_+(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) - \tilde{\sigma}_-(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0 \quad (37)$$

задает трехмерное (вещественное) аналитическое многообразие, содержащее точку ξ^* . Выполним линейную замену переменных

$$\xi - \xi^* = S\eta, \quad \det S \neq 0,$$

так, чтобы в переменных $\eta_1, \dots, \eta_4$ касательная гиперплоскость к многообразию (37) описывалась уравнением

$$\eta_4 = 0. \quad (38)$$

Пусть l – произвольный ненулевой вектор, принадлежащий этой гиперплоскости. Тогда производная функции F в точке 0 по направлению l равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_+}{\partial l}(0) = \frac{\partial \tilde{\sigma}_-}{\partial l}(0).$$

В действительности, эти производные тоже равны нулю. Если допустить противное, например, что они положительны, то при смещении из нуля в направлении l обе функции $\tilde{\sigma}_+$ и $\tilde{\sigma}_-$ возрастают, а при смещении в противоположном направлении убывают. Таким же образом ведет себя функция (35), что противоречит исходному предположению: точка ξ^* есть локальный экстремум функции $f(\xi)$.

Равенства

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_+}{\partial l}(0) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}_-}{\partial l}(0) = 0 \quad (39)$$

означают, что

$$\operatorname{Re} \left(v_+^*(0) \frac{\partial Q}{\partial l} u_+(0) \right) = 0 \quad (40)$$

и

$$\operatorname{Re} \left(v_-^*(0) \frac{\partial Q}{\partial l} u_-(0) \right) = 0. \quad (41)$$

Пусть u – произвольный вектор из вещественной линейной оболочки векторов $u_+(0)$ и $u_-(0)$:

$$u = \alpha u_+(0) + \beta u_-(0), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (42)$$

Таким образом, u является правым сингулярным вектором, относящимся к σ^* . Пусть v – соответствующий левый сингулярный вектор, т.е. $Q(0)u = \sigma^* v$ и

$$v = \alpha v_+(0) + \beta v_-(0). \quad (43)$$

Мы утверждаем, что

$$\operatorname{Re} \left(v^* \frac{\partial Q}{\partial l} u \right) = 0. \quad (44)$$

Предположим противное, т.е.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(v^* \frac{\partial Q}{\partial l} u \right) &= \alpha^2 \operatorname{Re} \left(v_+^*(0) \frac{\partial Q}{\partial l} u_+(0) \right) + \beta^2 \operatorname{Re} \left(v_-^*(0) \frac{\partial Q}{\partial l} u_-(0) \right) \\ &+ \alpha \beta \operatorname{Re} \left(v_+^*(0) \frac{\partial Q}{\partial l} u_-(0) + v_-^*(0) \frac{\partial Q}{\partial l} u_+(0) \right) \neq 0, \end{aligned}$$

т.е. в силу (40) и (41)

$$\operatorname{Re} \left\{ \left(v_+^*(0) \frac{\partial Q}{\partial l} u_-(0) \right) + \overline{\left(u_+^*(0) \frac{\partial Q^*}{\partial l} v_-(0) \right)} \right\} \neq 0. \quad (45)$$

Чтобы воспользоваться классическими результатами Реллиха о возмущениях собственных значений эрмитовых операторов, рассмотрим поведение кратного собственного значения $(\sigma^*)^2$ матрицы $Q^*(\gamma^*)Q(\gamma^*)$ при малых возмущениях γ . Это поведение в переменных $\eta_1, \dots, \eta_4$ определяется собственными значениями (2×2) -матрицы

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} u_+^*(0) \\ u_-^*(0) \end{pmatrix} \left(Q^*(0) \frac{\partial Q}{\partial l} + \frac{\partial Q^*}{\partial l} Q(0) \right) \begin{pmatrix} u_+(0) & u_-(0) \end{pmatrix} \\ &= \sigma^* \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Re} \left(v_+^*(0) \frac{\partial Q}{\partial l} u_+(0) \right) & a \\ \bar{a} & 2 \operatorname{Re} \left(v_-^*(0) \frac{\partial Q}{\partial l} u_-(0) \right) \end{pmatrix} \\ &= \sigma^* \begin{pmatrix} 0 & a \\ \bar{a} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (46)$$

В этих выкладках использованы соотношения

$$Q(0)u_+(0) = \sigma^* v_+(0), \quad Q(0)u_-(0) = \sigma^* v_-(0)$$

и равенства (40) и (41). Что касается элемента $(1, 2)$, то

$$a = v_+^*(0) \frac{\partial Q}{\partial l} u_-(0) + u_+^*(0) \frac{\partial Q}{\partial l} v_-(0).$$

В силу (45) $a \neq 0$ и матрица (46) имеет два ненулевых собственных значения $\sigma^*|a|$ и $-\sigma^*|a|$. Эти числа имеют смысл производных в нуле для двух аналитических собственных значений матрицы $Q^*(\eta)Q(\eta)$, порождаемых расщеплением кратного собственного значения $(\sigma^*)^2$ при смещении из нуля в направлении l . То обстоятельство, что производные не равны нулю, противоречит равенствам (39). Это противоречие доказывает (44).

Вернемся к сингулярным числам матрицы $Q(\eta)$ и рассмотрим их поведение при смещении из нуля в направлении η_4 . При таком смещении мы попадаем в область, где

$$\tilde{\sigma}_+(\eta) \geq \sigma^* \geq \tilde{\sigma}_-(\eta)$$

либо

$$\tilde{\sigma}_-(\eta) \leq \sigma^* \leq \tilde{\sigma}_+(\eta).$$

Это означает, что

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_+}{\partial \eta_4}(0) \frac{\partial \tilde{\sigma}_-}{\partial \eta_4}(0) \leq 0$$

или

$$\operatorname{Re} \left(v_+^*(0) \frac{\partial Q}{\partial \eta_4} u_+(0) \right) \operatorname{Re} \left(v_-^*(0) \frac{\partial Q}{\partial \eta_4} u_-(0) \right) \leq 0. \quad (47)$$

Далее используем идею, заимствованную из леммы 5 в [1]. Полагая в (42) и (43) $0 \leq \alpha \leq 1$, $\beta = \sqrt{1 - \alpha^2}$, определим непрерывную функцию от α формулой

$$\phi(\alpha) = \operatorname{Re} \left(v^* \frac{\partial Q}{\partial \eta_4} u \right).$$

Если оба числа

$$\phi(0) = \operatorname{Re} \left(v_+^*(0) \frac{\partial Q}{\partial \eta_4} u_+(0) \right)$$

и

$$\phi(1) = \operatorname{Re} \left(v_-^*(0) \frac{\partial Q}{\partial \eta_4} u_-(0) \right)$$

отличны от нуля, то согласно (47) они противоположны по знаку. Тогда найдется $\alpha_0 \in (0, 1)$ такое, что

$$\phi(\alpha_0) = \operatorname{Re} \left(v^* \frac{\partial Q}{\partial \eta_4} u \right) = 0. \quad (48)$$

Подведем итог проведенным рассуждениям. Мы показали, что найдется пара сингулярных векторов u и v такая, что выполнено (48). В то же время эта пара удовлетворяет соотношению (44), каково бы ни было направление l , касательное в нуле к многообразию (37). Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re} \left(v^* \frac{\partial Q}{\partial l} u \right) = 0 \quad (49)$$

для любого ненулевого вектора $l \in \mathbb{C}^4$. Возвращаясь к переменным $\xi_1, \dots, \xi_4$ и используя (49) для смещений вдоль координатных осей, получаем соотношения (30)–(33). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношения (30)–(33) равносильны соотношениям

$$\operatorname{Re}(v_1^* u_2) = 0, \quad (50)$$

$$\operatorname{Re}(v_2^* u_3) = 0, \quad (51)$$

$$v_1^* u_3 = 0. \quad (52)$$

Это следует из формул

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \xi_1} = \frac{\partial Q}{\partial \gamma_1} &= \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \frac{\partial Q}{\partial \xi_2} = \frac{\partial Q}{\partial \gamma_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial Q}{\partial \xi_3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \frac{\partial Q}{\partial \xi_4} &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Составим $(n \times 3)$ -матрицы

$$U = (u_1 u_2 u_3) \quad \text{и} \quad V = (v_1 v_2 v_3) \quad (53)$$

из подвекторов сингулярных векторов u и v , описываемых в лемме 6. Тогда

$$V^* V = U^* U. \quad (54)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\sigma^* > 0$, из (27) и (28) находим

$$v_1^* v_2 = u_1^* u_2, \quad (55)$$

$$v_2^* v_3 = u_2^* u_3. \quad (56)$$

В силу (50)–(52) левая часть соотношения (26) имеет нулевую вещественную часть, откуда

$$\delta_1(v_1^* v_1 - u_1^* u_1) + \delta_2(v_2^* v_2 - u_2^* u_2) + \delta_3(v_3^* v_3 - u_3^* u_3) = 0,$$

каковы бы ни были числа δ_1 , δ_2 и δ_3 . Это означает, что

$$v_1^* v_1 = u_1^* u_1, \quad (57)$$

$$v_2^* v_2 = u_2^* u_2, \quad (58)$$

$$v_3^* v_3 = u_3^* u_3. \quad (59)$$

Наконец, выполняется лемма 3. Матричное равенство (54) есть точный эквивалент соотношения (24) этой леммы, объединенного с соотношениями (55)–(59).

5. Построение минимального возмущения Δ . Как уже было сказано, построение матрицы Δ , удовлетворяющей условиям (14) и (15), использует сингулярные векторы u и v , исследованные в двух предыдущих пунктах статьи. Эти векторы относятся к сингулярному числу σ^* , являющемуся значением функции $f(\gamma)$ (см. (16)) в точке локального экстремума

$$\gamma^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*).$$

Наше построение предполагает, что

$$\gamma_1^* \neq 0, \quad \gamma_2^* \neq 0.$$

Покажем, что в этом случае столбцы каждой из матриц (53) линейно независимы. Если допустить, что $u_3 = 0$, то равенства (18) и (19) редуцируются к виду

$$\begin{aligned} Au_1 + \gamma_1^* u_2 &= \sigma^* v_1, \\ Au_2 &= \sigma^* v_2. \end{aligned}$$

Вместе с (21) и (22) они составляют соотношения (6) и (7) из статьи Малышева. Далее применимы рассуждения из раздела 5.1 этой статьи, показывающие, что векторы u_1 и u_2 (следовательно, v_1 и v_2) линейно независимы. Между тем, равенство (23) дает

$$\bar{\gamma}_3^* v_1 + \gamma_2^* v_2 = 0,$$

где $\gamma_2^* \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что $u_3 \neq 0$.

Предположим, что

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0. \quad (60)$$

Тогда в силу (54)

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0. \quad (61)$$

Если в соотношении

$$aAu_1 + bAu_2 + cAu_3 = 0, \quad (62)$$

производном от (60), заменить векторы Au_1 , Au_2 и Au_3 их выражениями, вытекающими из (18)–(20), а затем вычесть из полученного равенства умноженное на σ^* равенство (61), то получим

$$\gamma_1^* au_2 + (\gamma_3^* a + \gamma_2^* b)u_3 = 0. \quad (63)$$

Отсюда

$$\gamma_1^* av_2 + (\gamma_3^* a + \gamma_2^* b)v_3 = 0. \quad (64)$$

Опять применяя матрицу A к (63), используя (19) и вычитая (64), умноженное на σ^* , находим

$$(\gamma_1^* \gamma_2^* a)u_3 = 0,$$

откуда $a = 0$. Теперь из (63) имеем $b = 0$, а из (60) – $c = 0$. Итак, векторы u_1 , u_2 и u_3 (следовательно, v_1 , v_2 и v_3) линейно независимы.

Снова как в разделе 5.1 из [1], определим матрицу Δ формулой

$$\Delta = -\sigma^* VU^+. \quad (65)$$

Из (54) легко следует (14). Кроме того,

$$\Delta U = -\sigma^* V(U^+ U) = -\sigma^* V.$$

Отсюда

$$(A + \Delta)u_3 = Au_3 - \sigma^* v_3 = 0, \quad (A + \Delta)u_2 = Au_2 - \sigma^* v_2 = -\gamma_2^* u_3$$

и

$$(A + \Delta)^2 u_2 = -\gamma_2^* (A + \Delta)u_3 = 0.$$

Наконец,

$$(A + \Delta)u_1 = Au_1 - \sigma^* v_1 = -\gamma_1^* u_2 - \gamma_3^* u_3$$

и

$$(A + \Delta)^3 u_1 = -\gamma_1^* (A + \Delta)^2 u_2 - \gamma_3^* (A + \Delta)^2 u_3 = 0.$$

Итак, матрица $(A + \Delta)^3$ имеет, по меньшей мере, трехмерное ядро, а потому $A + \Delta \in \mathcal{M}$.

Отметим, в заключение, что в настоящее время нам не вполне ясна ситуация в тех случаях, когда в точке локального экстремума $\gamma^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*)$ хотя бы одна из координат γ_1^*, γ_2^* равна нулю. Пользуясь приемами из [1], можно и здесь построить матрицу Δ с нормой $\|\Delta\|_2 = \sigma^*$ такую, что $A + \Delta$ имеет *двойное* собственное значение нуль. Остается открытым вопрос: можно ли дополнительным возмущением превратить это двойное собственное значение в *тройное*, сохранив норму σ^* суммарного возмущения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Malyshev A. N. A formula for the 2-norm distance from a matrix to the set of matrices with multiple eigenvalues // Numer. Math. 1999. V. 83. P. 443–454.
- [2] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001.
- [3] Sun J.-G. A note on simple non-zero singular values // J. Comput. Math. 1988. V. 6. P. 259–266.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
20.05.2002