Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов, Модель в теории возмущений
существенного спектра многочастичных операторов, *Ма-
тем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 556–564

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:44:21

МОДЕЛЬ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА МНОГОЧАСТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов

Найден непрерывный спектр модельного оператора Шрёдингера, действующего в прямой сумме гильбертовых пространств n -частичных состояний, $n = 0, 1, 2, 3$.
Библиография: 4 названия.

В своей хорошо известной работе Фридрихс [1] рассматривает оператор умножения на независимую переменную как невозмущенный оператор и в качестве возмущения выбирает интегральный оператор. Эта модель в дальнейшем называлась моделью теории возмущений непрерывного спектра, так как непрерывный (существенный) спектр самосопряженного оператора не изменяется при компактном возмущении.

В [2] рассмотрен спин-бозонный гамильтониан, который аналогичен стандартному трехчастичному гамильтониану, и исследованы абсолютно непрерывный спектр и связанные состояния.

В настоящей работе рассматривается некоторый модельный оператор, действующий в некотором подпространстве фоковского пространства, который является решетчатым аналогом спин-бозонного гамильтониана [2] и трехчастичного гамильтониана на решетке [3], [4]. Описаны местоположение и структура существенного спектра (т.е. выделены двухчастичные и трехчастичные существенные спектры). Определен “регуляризованный определитель” Фредгольма, нули которого совпадают с собственными значениями данного оператора, лежащими вне существенного спектра.

Пусть $\mathbb{T}^\nu$ – ν -мерный тор, $(\mathbb{T}^\nu)^2 = \mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^\nu$ – декартово произведение, $L_2(\mathbb{T}^\nu)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^\nu$, $L_2^s((\mathbb{T}^\nu)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых симметричных функций, C^1 – одномерное комплексное пространство.

Пусть оператор A действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = C^1 \oplus L_2(\mathbb{T}^\nu) \oplus L_2^s((\mathbb{T}^\nu)^2)$ по формуле

$$A \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(x) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 f_0 + \int b(t) f_1(t) dt \\ b(x) f_0 + u(x) f_1(x) + \int b(t) f_2(x, t) dt \\ \frac{1}{2}(b(x) f_1(y) + b(y) f_1(x)) + w(x, y) f_2(x, y) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}$, u_0 – фиксированное вещественное число, $b(x)$, $u(x)$ – вещественно-аналитические функции на торе $\mathbb{T}^\nu$, $w(x, y)$ – вещественно-аналитическая симметричная функция на $(\mathbb{T}^\nu)^2$. Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования.

ЛЕММА 1. *Оператор A , действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ по формуле (1), является ограниченным и самосопряженным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 1 очевидно.

Для любого $x \in \mathbb{T}^\nu$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [m_w(x); M_w(x)]$ функцию

$$\Delta_1(x, z) = u(x) - z - \frac{1}{2} \int \frac{b^2(t)}{w(x, t) - z} dt,$$

где

$$m_w(x) = \min_{y \in \mathbb{T}^\nu} w(x, y), \quad M_w(x) = \max_{y \in \mathbb{T}^\nu} w(x, y).$$

Пусть σ_1 – множество точек $z \in \mathbb{C}$, для которых уравнение $\Delta_1(x, z) = 0$ имеет решение хотя бы для одной $x \in \mathbb{T}^\nu$.

Введем обозначения

$$m_w = \min_{x, y \in \mathbb{T}^\nu} w(x, y), \quad M_w = \max_{x, y \in \mathbb{T}^\nu} w(x, y), \quad \Sigma = [m_w, M_w] \cup \sigma_1.$$

ТЕОРЕМА 1. *Существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(A)$ оператора A совпадает с множеством Σ , т.е. $\sigma_{\text{ess}}(A) = \Sigma$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение теоремы 1 справедливо как в случае $u_0 \in \Sigma$, так и в случае $u_0 \notin \Sigma$, где u_0 – фиксированный параметр, определенный в (1). Ради определенности в дальнейшем будем считать, что $u_0 \notin \Sigma$. На самом деле, в случае $u_0 \in \Sigma$ доказательство теоремы 1 несколько упрощается.

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

Рассмотрим семейство операторов $T(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, действующих в пространстве $L_2(\mathbb{T}^\nu)$ по формуле

$$T(z)f(x) = \int \left[\frac{b(x)b(t)}{2\Delta_1(x, z)(w(x, t) - z)} + \frac{b(x)b(t)}{(u_0 - z)\Delta_1(x, z)} \right] f(t) dt$$

при $z \neq u_0$, и оператор $T(u_0)$, действующий в пространстве $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ как операторная матрица

$$T(u_0) = \begin{pmatrix} T_{00}(u_0) & T_{01}(u_0) \\ T_{10}(u_0) & T_{11}(u_0) \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{H}_0 = C^1$, $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbb{T}^\nu)$ и операторы $T_{ij}(u_0): \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1$, определяются равенствами

$$\begin{aligned} (T_{00}(u_0)f_0)_0 &= f_0, & (T_{01}(u_0)f_1)_0 &= \int b(t)f_1(t) dt, \\ (T_{10}(u_0)f_0)_1 &= -\frac{b(x)}{\Delta_1(x, u_0)}f_0, & (T_{11}(u_0)f_1)_1 &= \frac{b(x)}{2\Delta_1(x, u_0)} \int \frac{b(t)f_1(t)}{w(x, t) - u_0} dt. \end{aligned}$$

Отметим, что семейство операторов $T(z)$ при $z \neq u_0$ и $T(u_0)$ действуют в разных пространствах.

ЛЕММА 2. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда оператор $T(z)$ имеет собственное значение, равное единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $z \neq u_0$.

Необходимость. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ – собственное значение оператора A и f – соответствующий собственный вектор, т.е. система уравнений

$$\begin{cases} (u_0 - z)f_0 + \int b(t)f_1(t) dt = 0, \\ b(x)f_0 + (u(x) - z)f_1(x) + \int b(t)f_2(x, t) dt = 0, \\ \frac{1}{2}(b(x)f_1(y) + b(y)f_1(x)) + (w(x, y) - z)f_2(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

имеет нетривиальное решение $f = (f_0, f_1, f_2)$. Так как $z \neq u_0$ и $z \notin [m_w; M_w]$, из первого и третьего уравнений системы (2) для f_0 и $f_2(x, y)$ соответственно имеем

$$f_0 = -\frac{1}{u_0 - z} \int b(t)f_1(t) dt, \quad f_2(x, y) = -\frac{b(x)f_1(y) + b(y)f_1(x)}{2(w(x, y) - z)}. \quad (3)$$

Подставляя выражения для f_0 и $f_2(x, y)$ во второе уравнение системы (2) и учитывая $z \notin \sigma_1$, получим

$$f_1(x) - \int \left[\frac{b(x)b(t)}{2\Delta_1(x, z)(w(x, t) - z)} + \frac{b(x)b(t)}{(u_0 - z)\Delta_1(x, z)} \right] f_1(t) dt = 0. \quad (4)$$

Система (2) имеет ненулевое решение, поэтому уравнение (4) также имеет ненулевое решение. Это означает, что число 1 есть собственное значение оператора $T(z)$.

Достаточность. Пусть число 1 – собственное значение оператора $T(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, и $f_1 \in L_2(\mathbb{T}^\nu)$ – соответствующая собственная функция. Легко можно показать, что вектор-функция $f = (f_0, f_1, f_2)$ удовлетворяет уравнению $Af = zf$, где f_0 и f_2 определяются по формулам (3).

Доказательство случая $z = u_0$ повторяет ход доказательства случая $z \neq u_0$, поэтому во избежании повторения мы его не приводим. Лемма 2 доказана.

Пусть I – единичный оператор в $L_2(\mathbb{T}^\nu)$, K_0 – интегральный оператор в $L_2(\mathbb{T}^\nu)$, порожденный ядром

$$K_0(x, y; z) = \frac{b(x)b(y)}{2\Delta_1(x, z)(w(x, y) - z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma,$$

$\Delta(z)$ и $D(x, y; z)$ – соответственно определитель и минор Фредгольма оператора $I - K_0$.

Обозначим через $K(x, y; z)$ ядро оператора $T(z)$, $z \neq u_0$, т.е.

$$K(x, y; z) = K_0(x, y; z) + \varphi(x)b(y), \quad \text{где } \varphi(x) = \frac{b(x)}{(u_0 - z)\Delta_1(x, z)}.$$

Для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ определим регулярную функцию

$$\Omega(z) = \left(u_0 - z - \int \frac{b^2(t) dt}{\Delta_1(t, z)} \right) \Delta(z) + \int \frac{b(x)b(t)D(x, t; z)}{\Delta_1(t, z)} dx dt.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Определитель Фредгольма оператора $I - T(z)$ при $z \neq u_0$ представляется в виде*

$$\tilde{\Omega}(z) = (u_0 - z)^{-1} \Omega(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению определитель оператора $I - T(z)$, $z \neq u_0$, имеет вид

$$\tilde{\Omega}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} d_n(K; z),$$

$$\text{где } d_n(K; z) = \int \begin{vmatrix} K(x_1, x_1; z) & \dots & K(x_1, x_n; z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, x_1; z) & \dots & K(x_n, x_n; z) \end{vmatrix} dx_1 \dots dx_n. \quad (5)$$

Пользуясь элементарными свойствами определителей, получим

$$d_n(K; z) = d_n(K_0; z) + n d_n(K_0; \varphi, z),$$

где

$$d_n(K_0; \varphi, z) = \int \begin{vmatrix} \varphi(x_1)b(x_1) & K_0(x_1, x_2; z) & \dots & K_0(x_1, x_n; z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(x_n)b(x_1) & K_0(x_n, x_2; z) & \dots & K_0(x_n, x_n; z) \end{vmatrix} dx_1 \dots dx_n.$$

Тогда определитель (5) представляется в виде

$$\tilde{\Omega}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} d_n(K_0; z) - \int \varphi(x)b(x) dx + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} d_n(K_0, \varphi; z). \quad (6)$$

Разлагая определитель, стоящий под интегралом в выражении $d_n(K_0, \varphi; z)$, по первому столбцу, получим

$$d_n(K_0, \varphi; z) = \sum_{k=1}^n (-1)^{(k+1)} \int \varphi(t_k)b(t_1) d_k(K_0; t_1, \dots, t_n; z) dt_1 \dots dt_n, \quad (7)$$

где $d_k(K_0; t_1, \dots, t_n; z)$ – алгебраическое дополнение элемента $\varphi(t_k)\varphi(t_1)$.

В сумме (7) рассмотрим j -е слагаемое, $j = \overline{2, n}$. В определителе $d_j(K_0; t_1, \dots, t_n; z)$ последовательно меняя местами $(j-1)$ -й столбец с предыдущим столбцом, приведем его к первому столбцу. В полученном j -м слагаемом делая замену переменных

$$t_j = y, \quad t_1 = x, \quad t_2 = x_1, \quad \dots, \quad t_{j-1} = x_{j-2}, \quad t_{j+1} = x_{j-1}, \quad \dots, \quad t_n = x_{n-2},$$

имеем

$$(-1)^{j+1} \int \varphi(t_j)b(t_1) d_j(K_0; t_1, \dots, t_n; z) dt_1 \dots dt_n = \int \varphi(y)b(x) D_{n-2}(x, y; z) dx dy,$$

где

$$D_n(x, y; z) = \int \begin{vmatrix} K_0(x, y; z) & \dots & K_0(x, x_n; z) \\ K_0(x_1, y; z) & \dots & K_0(x_1, x_n; z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_0(x_n, y; z) & \dots & K_0(x_n, x_n; z) \end{vmatrix} dx_1 \dots dx_n.$$

Тогда $d_n(K_0, \varphi; z)$ можно записать в виде

$$d_n(K_0, \varphi, z) = (n-1) \int \varphi(y)b(x)D_{n-2}(x, y; z) dx dy + \int \varphi(x)b(x) d_{n-1}(K_0, z) dx.$$

Полученное выражение для $d_n(K_0, \varphi; z)$ подставляем в (6) и, учитывая выражения для определителя и минора Фредгольма оператора $I - K_0$, имеем, что

$$\tilde{\Omega}(z) = \left(1 - \int \varphi(x)b(x) dx\right) \Delta(z) + \int \varphi(y)b(x)D(x, y; z) dx dy. \quad (8)$$

Далее, выражение для $\varphi(x)$ подставляя в (8), получим искомое представление для функции $\tilde{\Omega}(z)$. Предложение 1 доказано.

ЛЕММА 3. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда $\Omega(z) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ – собственное значение оператора A , т.е. система уравнений (2) имеет ненулевое решение (f_0, f_1, f_2) .

Рассмотрим три случая:

- 1) $z \neq u_0$,
- 2) $\Delta(z) \neq 0$,
- 3) $z = u_0, \Delta(z) = 0$.

1) Пусть $z \neq u_0$. В силу леммы 2 число 1 является собственным значением оператора $T(z)$, т.е. уравнение (4) имеет ненулевое решение. По теореме Фредгольма $\tilde{\Omega}(z) = 0$. Следовательно, $\Omega(z) = 0$.

2) Пусть $\Delta(z) \neq 0$. Так как $z \notin [m_w; M_w]$, из третьего уравнения системы (2) для $f_2(x, y)$ имеем

$$f_2(x, y) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b(x)f_1(y) + b(y)f_1(x)}{w(x, y) - z}. \quad (9)$$

Подставляя выражение для $f_2(x, y)$ во второе уравнение системы (2) и учитывая, что $z \notin \sigma_1$, имеем

$$\begin{cases} (u_0 - z)f_0 + \int b(t)f_1(t) dt = 0, \\ f_1(x) - \int \frac{b(x)b(t)f_1(t) dt}{2\Delta_1(x, z)(w(x, t) - z)} = -\frac{b(x)f_0}{\Delta_1(x, z)}. \end{cases} \quad (10)$$

Из условия $\Delta(z) \neq 0$ и теоремы Фредгольма для любого f_0 второе уравнение системы (10) имеет единственное решение, выражаемое формулой

$$f_1(x) = \frac{f_0}{\Delta(z)} \int \frac{b(t)D(x, t; z) dt}{\Delta_1(t, z)} - \frac{b(x)f_0}{\Delta_1(x, z)}. \quad (11)$$

Решение (11) подставляем в первое уравнение системы (10). Тогда $\Omega(z)\Delta^{-1}(z)f_0 = 0$. Если $f_0 = 0$, то из (11) и (9) вытекает, что $f_1(x) = 0$, $f_2(x, y) = 0$. Это противоречит тому, что (f_0, f_1, f_2) – ненулевое решение уравнения $Af = zf$. Следовательно, $f_0 \neq 0$ и поэтому $\Omega(z) = 0$.

3) Пусть $z = u_0$, $\Delta(z) = 0$. В силу леммы 2 число 1 является собственным значением оператора $T(z)$, т.е. система уравнений

$$\begin{cases} \int b(t)f_1(t) dt = 0, \\ f_1(x) - \int \frac{b(x)b(t)f_1(t) dt}{2\Delta_1(x, z)(w(x, t) - z)} = -\frac{b(x)f_0}{\Delta_1(x, z)} \end{cases} \quad (12)$$

имеет ненулевое решение (f_0, f_1) . Из условия $\Delta(z) = 0$ и теоремы Фредгольма следует, что уравнение

$$f_1(x) - \int \frac{b(x)b(t)f_1(t) dt}{2\Delta_1(x, z)(w(x, t) - z)} = 0 \quad (13)$$

и сопряженное к нему уравнение

$$g_1(x) - \int \frac{b(x)b(t)g_1(t) dt}{2\Delta_1(t, z)(w(x, t) - z)} = 0 \quad (14)$$

имеют нетривиальные решения и правая часть $b(x)\Delta_1^{-1}(x, z)$ второго уравнения системы (12) ортогональна всем решениям уравнения (14). При каждом $x \in \mathbb{T}^\nu$ минор $D(x, y; z) = g_1(y)$ является решением уравнения (14). Из ортогональности $b(x)\Delta_1^{-1}(x, z)$ и $g_1(x)$ имеем

$$\int b(t)\Delta_1^{-1}(t, z)D(x, t; z) dt = 0$$

при всех $x \in \mathbb{T}^\nu$. Отсюда вытекает, что $\Omega(z) = 0$.

Достаточность. Пусть $\Omega(z) = 0$ для некоторого $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$. Если $\Delta(z) \neq 0$, то вектор-функция $f = (f_0, f_1, f_2)$, где $f_0 = \Delta(z)$, а f_1 и f_2 определяются по формулам (11) и (9) соответственно, удовлетворяет уравнению $Af = zf$.

Справедливость последнего равенства вытекает из фундаментального соотношения Фредгольма.

Пусть теперь $\Delta(z) = 0$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$f_1(x) - \int \left[\frac{b(x)b(t)}{2\Delta_1(x, z)(w(x, t) - z)} + \frac{b(x)b(t)}{\Delta_1(x, z)} \right] f_1(t) dt = 0. \quad (15)$$

Определитель Фредгольма, соответствующий уравнению (15), равен

$$\Omega(z) = \left(1 - \int \frac{b^2(t) dt}{\Delta_1(t, z)} \right) \Delta(z) + \int \frac{b(x)b(t)D(x, t; z)}{\Delta_1(t, z)} dx dt = 0.$$

Следовательно, уравнение имеет ненулевое решение. Уравнение (15) эквивалентно второму уравнению системы (12), где $f_0 = \int b(t)f_1(t) dt$. По теореме Фредгольма правая

часть $b(x)\Delta_1^{-1}(x, z)$ второго уравнения системы (12) ортогональна всем решениям g_1 сопряженного однородного уравнения (14), т.е.

$$\int g_1(x)b(x)\Delta_1^{-1}(x, z) dx = 0.$$

Так как $g_1(x) = f_1(x)\Delta_1(x, z)$, то $\int b(t)f_1(t) dt = 0$, т.е. любое решение $f_1(x)$ уравнения (15) ортогонально $b(x)$. Отсюда следует, что если $\Delta(z) = 0$, то уравнение $Af = zf$ имеет решение $(0, f_1(x), f_2(x, y))$, где $f_1 \in L_2(\mathbb{T}^\nu)$ – ненулевое решение уравнения (13) и $f_2(x, y) \in L_2^s((\mathbb{T}^\nu)^2)$ определяется по формуле (9). Лемма 3 доказана.

Таким образом, согласно лемме 3 функция $\Omega(z)$ обладает характеристическим свойством определителя Фредгольма. По этой причине мы назовем ее “регуляризованным определителем” Фредгольма оператора $I - T(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала докажем, что $[m_w, M_w] \subset \sigma_{\text{ess}}(A)$. Пусть $z_0 \in [m_w, M_w]$ – произвольная точка. Докажем, что $z_0 \in \sigma_{\text{ess}}(A)$. Для этого построим последовательность ортонормированных вектор-функций $\{f^{(n)}\}$, для которых $\|(A - z_0)f^{(n)}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $w(x, y)$ – непрерывная функция, то существует точка $(x_0, y_0) \in (\mathbb{T}^\nu)^2$ такая, что $z_0 = w(x_0, y_0)$.

Рассмотрим следующую окрестность точки $(x_0, y_0) \in (\mathbb{T}^\nu)^2$:

$$W_n = V_n(x_0) \times V_n(y_0),$$

где

$$V_n(x_0) = \left\{ x : \frac{1}{n+1} < |x - x_0| < \frac{1}{n} \right\}$$

– выколота окрестность точки $x_0 \in \mathbb{T}^\nu$.

Пусть $\mu(W_n)$ – мера множества W_n .

Последовательность функции $\{f^{(n)}\}$ выбираем следующим образом:

$$f^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_2^{(n)}(x, y) \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad f_2^{(n)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu(W_n)}}, & (x, y) \in W_n, \\ 0, & (x, y) \notin W_n. \end{cases}$$

Очевидно, что $\{f^{(n)}\}$ – ортонормированная последовательность.

Рассмотрим $(A - z_0)f^{(n)}$ и оценим его норму:

$$\|(A - z_0)f_n\|^2 \leq \left[\max_{x \in V_n(x_0)} b(x) \right]^2 \mu(V_n(x_0)) + \sup_{(x, y) \in W_n} |w(x, y) - z_0|^2.$$

Из построения множества $V_n(x_0)$ и из непрерывности функции $w(x, y)$ следует, что

$$\|(A - z_0)f^{(n)}\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

т.е. $z_0 \in \sigma_{\text{ess}}(A)$. Из произвольности точки z_0 следует, что $[m_w, M_w] \subset \sigma_{\text{ess}}(A)$.

Теперь докажем, что $\sigma_1 \subset \sigma_{\text{ess}}(A)$. Возьмем произвольную точку $z_0 \in \sigma_1$. Покажем, что $z_0 \in \sigma_{\text{ess}}(A)$. Для этого построим последовательность ортонормальных вектор-функций $\{f^{(n)}\}$ такую, что $\|(A - z_0)f^{(n)}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $z_0 \in \sigma_1$, то существует точка $x_0 \in \mathbb{T}^\nu$ такая, что $\Delta_1(x_0, z_0) = 0$. Возможны два случая:

- 1) $z_0 \in [m_w, M_w]$,
- 2) $z_0 \notin [m_w, M_w]$.

Если $z_0 \in [m_w; M_w]$, то, как показано выше, $z_0 \in \sigma_{\text{ess}}(A)$. Пусть $z_0 \notin [m_w; M_w]$; тогда последовательность $\{f^{(n)}\}$ выбираем следующим образом:

$$f^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1^{(n)}(x) \\ f_2^{(n)}(x, y) \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad f_1^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{c_n(x)}{\sqrt{\mu(V_n(x_0))}}, & x \in V_n(x_0), \\ 0, & x \notin V_n(x_0), \end{cases}$$

$$f_2^{(n)}(x, y) = -\frac{b(x)f_1^{(n)}(y) + b(y)f_1^{(n)}(x)}{2(w(x, y) - z_0)}, \quad x, y \in \mathbb{T}^\nu.$$

Здесь $c_n \in L_2(\mathbb{T}^\nu)$ выбирается из условия ортонормальности $\{f^{(n)}\}$.

Существование $c_n(x)$ вытекает из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует ортонормальная система $\{c_n\} \subset L_2(\mathbb{T}^\nu)$, удовлетворяющая условиям*

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \text{supp } c_n \subset V_n(x_0), \\ \text{b)} \quad & \int_{V_n(x_0)} \int_{V_m(x_0)} \frac{b(x)b(y)c_n(x)c_m(y)}{(w(x, y) - z_0)^2} dx dy = 0, \quad n \neq m. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Последовательность $\{c_n\}$ построим по методу индукции. Пусть $c_1(x) = \chi_{V_1}(x)(\sqrt{\mu(V_1(x_0))})^{-1}$, где $\chi_{V_1}(x)$ – характеристическая функция множества $V_1(x_0)$. Теперь $\tilde{c}_2 \in L_2(V_2(x_0))$ выбираем так, чтобы $\|\tilde{c}_2\| = 1$ и $(\tilde{c}_2, w_1^{(2)}) = 0$, где

$$w_1^{(2)}(x) = \int \frac{b(x)b(y)c_1(y)\chi_{V_2}(x)}{(w(x, y) - z_0)^2} dy.$$

Положим $c_2(x) = \tilde{c}_2(x)\chi_{V_2}(x)$. Продолжим этот процесс. Допустим, что построены $c_1(x), \dots, c_n(x)$. Тогда $\tilde{c}_{n+1}(x) \in L_2(V_{n+1}(x_0))$ выбираем так, чтобы она была ортогональна всем функциям

$$w_i^{(n+1)}(x) = \int \frac{b(x)b(y)c_i(y)\chi_{V_{n+1}}(x)}{(w(x, y) - z_0)^2} dy, \quad i = 1, \dots, n,$$

и $\|\tilde{c}_{n+1}\| = 1$. Пусть $c_{n+1}(x) = \tilde{c}_{n+1}(x)\chi_{V_{n+1}}(x)$. Таким образом мы построили ортонормированную систему $\{c_n\}$, удовлетворяющую условиям предложения. Предложение 2 доказано.

Продолжим доказательство теоремы 1.

Рассмотрим $(A - z_0)f^{(n)}$. По неравенству Шварца и условию $\|f^{(n)}\| = 1$ оценим норму

$$\|(A - z_0)f^{(n)}\|^2 \leq c \max_{t \in V_n} b^2(t)\mu(V_n(x_0)) + 2 \sup_{t \in V_n(x_0)} |\Delta_1(t, z_0)|^2,$$

где $c > 0$ – некоторое число.

Так как $\mu(V_n(x_0)) \rightarrow 0$, $\sup_{t \in V_n(x_0)} |\Delta_1(t, z_0)|^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\|(A - z_0)f^{(n)}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что $z_0 \in \sigma_{\text{ess}}(A)$. Из произвольности точки z_0 следует, что $\sigma_1 \subset \sigma_{\text{ess}}(A)$. Итак, мы доказали, что $[m_w, M_w] \cup \sigma_1 \subset \sigma_{\text{ess}}(A)$.

Теперь докажем обратное включение, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(A) \subset \Sigma$. Для этого достаточно показать, что $\mathbb{C} \setminus \Sigma \subset \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(A)$. Регуляризованный определитель Фредгольма $\Omega(z)$ оператора $I - T(z)$ определен в области $\mathbb{C} \setminus \Sigma$. Норма оператора $T(z)$ стремится к нулю при $z \rightarrow -\infty$. Действительно, пусть $z \rightarrow -\infty$; тогда ядро оператора $T(z)$ ограничено и можно перейти к пределу под знаком интеграла. Так как ядро стремится к нулю при $z \rightarrow -\infty$, то и $T(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$. В силу непрерывности нормы следует, что $\|T(z)\| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$. Следовательно, уравнение $T(z)f = f$ не имеет нетривиальных решений при больших $|z|$.

Из леммы 2 и самосопряженности оператора A следует, что уравнение $T(z)f = f$ может иметь нетривиальные решения только при вещественных z . Так как $\Omega(z)$ регулярна в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ и у нее нет невещественных нулей, множество ее нулей может иметь предельные точки только на граничных точках множества Σ . Согласно лемме 3 множество нулей функции $\Omega(z)$ совпадает с дискретным спектром оператора A ; следовательно, $\sigma_{\text{ess}}(A) \subset \Sigma$, что и требовалось доказать.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ценные и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фридрихс К. О. Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1972.
- [2] Minlos R., Spohn H. The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons // Topics in Statistical and Theoretical Physics. Amer. Math. Soc. Transl. (2). V. 177. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1996. P. 159–193.
- [3] Лакаев С. Н. Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц // Функцион. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 3. С. 15–28.
- [4] Лакаев С. Н. О бесконечном числе трехчастичных связанных состояний системы трех квантовых решетчатых частиц // ТМФ. 1991. Т. 89. № 1. С. 94–104.

(С. Н. Лакаев) Самаркандский государственный университет
 (Т. Х. Расулов) Комплексный научно-исследовательский институт
 региональных проблем Самаркандского отделения АН РУ
E-mail: lakaev@samarkand.uz, info@samarkand.uz

Поступило
 15.02.2001
 Исправленный вариант
 06.02.2002