Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Левчук, О слабо факторизуемых группах, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 565–572

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm204>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 10:50:57

УДК 512.54

О СЛАБО ФАКТОРИЗУЕМЫХ ГРУППАХ

В. М. Левчук

Группы с дополняемыми подгруппами, называемые вполне факторизуемыми, изучены в работах Ф. Холла, С. Н. Черникова и Н. В. Черниковой (Басовой). Для вполне факторизуемости достаточно (теорема 1), чтобы всякая собственная подгруппа имела нормальное дополнение в некоторой большей подгруппе. Группа называется слабо факторизуемой, если каждая ее собственная подгруппа дополняема в некоторой большей подгруппе; в “Коуровской тетради” поставлен вопрос 8.31 об описании таких конечных групп. Рассматриваются некоторые их свойства. Вопрос исследуется для силовских p -подгрупп групп Шевалле типа характеристики p . Основная теорема 2 устанавливает слабую факторизуемость силовских p -подгрупп в симметрической и знакопеременной группах подстановок и в классических линейных группах над полями характеристики $p > 0$, исключая унитарные группы нечетной размерности $> p$.

Библиография: 16 названий.

Введение. Подгруппу M называем *дополняемой* в группе G , если в G существует дополнение к ней, т.е. подгруппа K такая, что $M \cap K = 1$ и $G = MK (= KM)$. Группу называют *вполне факторизуемой*, если в ней дополняема любая подгруппа. Такие группы изучены в работах Ф. Холла [1], С. Н. Черникова [2] и Н. В. Черниковой (Басовой) [3], [4]. Близкие к ним группы исследовали и применяли Ю. М. Горчаков и др., см. [5], [6].

Для вполне факторизуемости группы достаточно, чтобы всякая ее собственная подгруппа обладала нормальным дополнением в некоторой большей подгруппе (теорема 1). Освобождаясь от условия нормальности дополнения, приходим к существенно более широкому классу групп: группу называем *слабо факторизуемой*, если любая ее собственная подгруппа дополняема в некоторой большей подгруппе. Вопрос об описании таких конечных групп записан в [7, вопрос 8.31]. К ним относятся, например, простая группа $PSL_2(7)$, диэдральные 2-группы и конечные группы простого показателя p ; существенность здесь условия конечности показывает пример А. Ю. Ольшанского [8, теорема 28.1] бесконечной группы показателя p с максимальными подгруппами простых порядков. Некоторые свойства слабо факторизуемых групп рассматриваются в п. 1. Слабую факторизуемость полупрямого произведения вполне факторизуемой и слабо факторизуемой групп устанавливает лемма 1.

Основная в работе теорема 2 выявляет слабую факторизуемость силовских p -подгрупп в симметрической и знакопеременной группах подстановок любой конечной степени и в классических линейных группах над полем характеристики $p > 0$, исключая унитарные группы нечетной размерности $> p$. С другой стороны, силовские 2-подгруппы

в скрученных группах Шевалле типов 2B_2 , 2F_4 и ${}^2A_{2n}$ над полем характеристики 2 и силовские 3-подгруппы групп Ри типа 2G_2 над полем характеристики 3 обладают собственной подгруппой, пересекающейся нетривиально с каждой неединичной подгруппой (предложение 1). См. также замечание в конце п. 2.

1. Вполне факторизуемые и слабо факторизуемые группы. Свойства полной и слабой факторизуемости группы очевидно наследуются на фактор-группы. Полная факторизуемость наследуется и на подгруппы, как показывает

ЛЕММА (С.Н. Черников [2]). Пусть G – группа, H, M и R – такие ее подгруппы, что $H \supseteq M$ и R – дополнение подгруппы M в G . Тогда $R \cap H$ – дополнение подгруппы M в H .

Отметим, что если D есть дополнение к подгруппе M в какой-либо подгруппе и элемент g лежит в произведении $N_G(D)N_G(M)$ нормализаторов подгрупп M и D в группе G , то $M(g^{-1}Dg)$ есть подгруппа и $g^{-1}Dg$ является в ней дополнением к M .

ТЕОРЕМА 1. Для произвольной группы G эквивалентны следующие условия:

- (i) всякая собственная подгруппа группы G обладает нормальным дополнением в некоторой большей подгруппе;
- (ii) всякая подгруппа группы G обладает нормальным дополнением в G ;
- (iii) группа G является абелевой вполне факторизуемой группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждения (i) $\rightarrow$ (ii) и (ii) $\rightarrow$ (iii), поскольку утверждение (iii) $\rightarrow$ (i) очевидно.

(i) $\rightarrow$ (ii). Пусть H – собственная подгруппа группы G . Положим $H_0 = H$. Допустим, что для некоторого порядкового числа $\alpha > 0$ подгруппы H_β для всех $\beta < \alpha$ уже определены и порождают в G собственную подгруппу. Тогда нормальное дополнение к последней, выбранное произвольно в некоторой большей подгруппе группы G , обозначаем через H_α . Таким образом, получаем последовательность подгрупп $H_0, H_1, \dots, H_\alpha, \dots$, которые порождают группу G .

По построению $H_\alpha \triangleleft H_\beta H_\alpha$ при всех $\beta < \alpha$. Поэтому подгруппа N , порожденная подгруппами H_α для всевозможных $\alpha > 0$, нормальна в G . Ясно, что $G = HN$. Если t – произвольный элемент пересечения $H \cap N$, то он записывается в виде конечного произведения $t = h_1 h_2 \dots h_k$, где $k \geq 1$ – натуральное число, $h_i \in H_{\alpha_i}$ и $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$. Поэтому

$$h_k = (h_1 h_2 \dots h_{k-1})^{-1} t \in H_{\alpha_k} \cap (H_0 H_{\alpha_1} H_{\alpha_2} \dots H_{\alpha_{k-1}}) = 1.$$

Следовательно, $h_k = 1$ и аналогично $h_1 = h_2 = \dots = h_{k-1} = 1$, так что $t = 1$. Таким образом, $H \cap N = 1$ и N – нормальное дополнение подгруппы H в группе G .

(ii) $\rightarrow$ (iii). Докажем абелевость произвольной группы G с условием (ii). Поскольку G – вполне факторизуемая и, следовательно, периодическая группа [4], то при $G \neq 1$ она должна содержать подгруппу простого порядка. В силу (ii) группа G имеет также и нормальную подгруппу простого индекса; нормальное дополнение к ней, очевидно, лежит в центре группы G . Таким образом, в любой неединичной группе с условием (ii) центр неединичен.

Предположим, что группа G не совпадает со своим центром $Z(G)$. Выберем в ней какое-либо нормальное дополнение H к центру $Z(G)$. Пусть K – произвольная подгруппа

в H , и R – какое-либо ее нормальное дополнение в G . Тогда $R \cap H$ есть дополнение к подгруппе K в H по лемме Черникова. С другой стороны, $(R \cap H) \triangleleft H$. Следовательно, группа H также удовлетворяет условию (ii) и по доказанному ее центр $Z(H)$ неединичен. Однако, $G = Z(G) \times H$ и поэтому $Z(H) = Z(G) \cap H = 1$. Полученное противоречие доказывает равенство $H = 1$ и абелевость G . Теорема доказана.

Известно, что абелевы вполне факторизуемые группы – это в точности прямые произведения циклических групп простых порядков. Полностью вполне факторизуемые группы изучены в работах [1]–[4]. Их описывает

ТЕОРЕМА [4]. *Группа G тогда и только тогда вполне факторизуема, когда она представима в виде полупрямого произведения $G = H \rtimes N$ подгрупп H и N , раскладывающихся в прямое произведение циклических групп простых порядков, причем все множители хотя бы одного разложения группы H инвариантны в группе G .*

Следующая лемма указывает метод построения слабо факторизуемых групп из вполне факторизуемых групп.

ЛЕММА 1. *Полупрямое произведение $F \rtimes K$ вполне факторизуемой группы F и слабо факторизуемой группы K есть слабо факторизуемая группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – собственная подгруппа группы $F \rtimes K$. Если $L \supseteq F$ и D – дополнение к $L \cap K$ в какой-либо подгруппе в K , то $LD = (F \rtimes (L \cap K))D$ – подгруппа и D дополняет в ней подгруппу L . Допустим, что $L \not\supseteq F$. Тогда пересечение $L \cap F$ обладает неединичным дополнением D в F , причем

$$D \cap L = (D \cap F) \cap L = D \cap (F \cap L) = 1, \quad DL = D(F \cap L)L = FL.$$

Поэтому подгруппа L дополняема в FL подгруппой D . Лемма доказана.

По аналогии с доказательством теоремы 1 показывается, что разрешимая подгруппа произвольной группы G всегда лежит в разрешимой подгруппе H , которая не имеет разрешимого нормального дополнения в больших подгруппах. Произвольное нормальное дополнение к H в большей подгруппе в этом случае имеет единичное пересечение с каждой разрешимой подгруппой, содержащей H .

Условие слабой факторизуемости нильпотентной группы, очевидно, равносильно тому, что любая ее собственная подгруппа дополняема и нормальна в некоторой большей подгруппе. Так, всякая конечная группа простого показателя p слабо факторизуема; существенность здесь условия конечности показывает пример А. Ю. Ольшанского [8, теорема 28.1] бесконечной группы с максимальными подгруппами простого порядка p .

ЛЕММА 2. *Диэдральная группа слабо факторизуема тогда и только тогда, когда ее порядок конечен и не делится на квадраты простых нечетных чисел.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В диэдральной 2-группе нормализатор любой собственной подгруппы L является также диэдральной подгруппой порядка $\geq 2|L|$ и, следовательно, с числом $> |L|$ инволюций; отсюда L имеет дополнение в подгруппе порядка $2|L|$. Поэтому в произвольной диэдральной группе G (или в группе, порождаемой двумя инволюциями) силовская 2-подгруппа G_2 является слабо факторизуемой группой. Группа G имеет циклическую подгруппу A индекса 2. Кроме того, $G = B \rtimes G_2$, где B есть

2-дополнение в A при $|A| < \infty$, и $B = A$ в противном случае. Если B – вполне факторизуемая группа, то G есть слабо факторизуемая группа по лемме 1. Очевидно, вполне факторизуемость циклической группы равносильна требованию, что ее порядок конечен и не делится на квадраты простых чисел.

Допустим сейчас, что для некоторого простого числа $p > 2$ индекс подгруппы $B^p = \{b^p \mid b \in B\}$ в B равен p . Тогда $M = B^p \rtimes G_2$ есть максимальная подгруппа индекса p в G . Предположим, что в G существует дополнение D к M . Поскольку $D \subseteq A$ и $D \cap B^p = 1$, должны иметь $|A| < \infty$ и $|D| = p$. Силоские p -подгруппы групп B и G содержатся в A . Поэтому они нормальны в G и совпадают. Более того, они совпадают с D в силу циклическости группы B и условия $D \cap B^p = 1$. Но тогда получаем противоречие с условием $|B : B^p| = p$. Таким образом, в группе G максимальная подгруппа M не имеет дополнения. Лемма доказана.

В диэдральной 2-группе циклическая подгруппа порядка > 2 не является слабо факторизуемой группой. Таким образом, свойство слабой факторизуемости группы не наследуется подгруппами. С другой стороны, очевидна

ЛЕММА 3. *Конечная группа является слабо факторизуемой, если все ее максимальные подгруппы дополняемы и слабо факторизуемы.*

ПРИМЕР 1. Знакопеременная группа подстановок 4-й степени слабо факторизуема, поскольку ее максимальные подгруппы исчерпываются силоскими подгруппами, которые дополняемы и элементарные абелевы. Помимо нее в симметрической группе $\mathcal{S}_4$ подстановок 4-й степени максимальными являются диэдральные подгруппы порядков 6 и 8, которые дополняемы циклическими подгруппами. Следовательно, $\mathcal{S}_4$ является слабо факторизуемой группой. (Группа $\mathcal{S}_5$ этим свойством не обладает, поскольку ее диэдральная подгруппа порядка 12 максимальна и имеет общую инволюцию с любой подгруппой порядка 10; см. также [9]). Группа $PSL_2(7)$ порядка 168 имеет два класса сопряженных подгрупп, изоморфных S_4 (параболические подгруппы в группе $PSL_3(2) \simeq PSL_2(7)$); все они дополняемы подгруппой порядка 7. Остальные ее максимальные подгруппы дают нормализаторы силоских 7-подгрупп, имеющие порядок 21 и дополняемые силоской 2-подгруппой. Таким образом, простая группа $PSL_2(7)$ также слабо факторизуема. Как несложно вытекает из [10], среди простых групп $PSL_2(q)$ нет других слабо факторизуемых групп.

2. Силоские подгруппы классических групп. Классические линейные группы ниже рассматриваются как группы Шевалле классических лиевых типов $A_n, B_n, C_n, D_n, {}^2A_n$ и 2D_n . Следующая, основная в работе, теорема выявляет склонность к слабой факторизуемости силоских p -подгрупп классических групп.

ТЕОРЕМА 2. *Силоские p -подгруппы в симметрической и знакопеременной группах подстановок любой конечной степени и в группах Шевалле классических типов $\neq {}^2A_{2n}$ над полем характеристики $p > 0$ являются слабо факторизуемыми группами.*

Нам потребуется

ЛЕММА 4. *Силоская p -подгруппа симметрической группы подстановок степени p^n , $n \geq 1$, представима в виде*

$$V_n \rtimes (V_{n-1} \rtimes (\dots (V_3 \rtimes (V_2 \rtimes V_1)) \dots)) \quad (1)$$

для подходящих элементарных абелевых p -подгрупп $V_1, V_2, \dots, V_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p – простое число и P_n – силовская p -подгруппа симметрической группы подстановок степени p^n , $n \geq 1$. Группа P_n построена в [11; 5.9] и [12; 11.3.1] как сплетение n циклических групп преобразований,

$$P_n = (\dots ((Z_p \wr Z_p) \wr Z_p) \dots) \wr Z_p;$$

в частности, $|P_n| = p^{1+p+p^2+\dots+p^{n-1}}$. Ее представление вида (1) дает ассоциативность операции сплетения групп преобразований [12; 6.2.13], показывающая, что

$$P_n = Z_p \wr (Z_p \wr (Z_p \wr (\dots (Z_p \wr Z_p) \dots))).$$

(В классе групп операции полного и дискретного сплетений неассоциативны [12; 6.2.7].)

Сомножители V_j можно записать даже явно. Рассмотрим $(p^t \times p)$ -матрицу

$$A_{t1} = \begin{bmatrix} 1 & 1+p^t & 1+2p^t & \dots & 1+(p-1)p^t \\ 2 & 2+p^t & 2+2p^t & \dots & 2+(p-1)p^t \\ 3 & 3+p^t & 3+2p^t & \dots & 3+(p-1)p^t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^t & 2p^t & 3p^t & \dots & p^{t+1} \end{bmatrix}.$$

Прибавляя к каждому ее элементу число $(k-1)p^{t+1}$, получаем матрицу, обозначаемую через A_{tk} ($0 \leq t < n$, $1 \leq k \leq p^{n-t-1}$). Пусть β_{tk} есть подстановка, в циклической записи которой циклами являются строки матрицы A_{tk} . Для фиксированного t всевозможные подстановки β_{tk} перестановочны (так как действуют на непересекающихся множествах) и, следовательно, порождают элементарную абелеву p -подгруппу порядка $p^{p^{n-t-1}}$; ее обозначим через V_{n-t} . С другой стороны,

$$\beta_{tk}^{-1} \beta_{im} \beta_{tk} = \beta_{im'}, \quad 0 \leq i < t < n,$$

где m' однозначно определяется условиями

$$(i-1)p^{t-i} < m' \leq ip^{t-i}, \quad m' \equiv m + p^{t-i-1} \pmod{p^{t-i}}.$$

Отсюда вытекает, что подгруппы V_j , $1 \leq j \leq n$, порождают подгруппу (1), которая совпадает с P_n в силу равенства порядков. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Прямое произведение конечного числа групп вида (1), построенных из элементарных абелевых p -подгрупп, есть также группа вида (1), построенная из подходящих элементарных абелевых p -подгрупп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простая индукция сводит общий случай к случаю двух групп вида (1).

Пусть U и V – группы вида (1), построенные по элементарным абелевым p -подгруппам $U_1, U_2, \dots, U_m$ и, соответственно, $V_1, V_2, \dots, V_n$. Допустим, что $1 \leq m \leq n$. Положим $U_k = 1$ при $k < 1$. Тогда прямое произведение $W = U \times V$ есть группа вида (1), построенная по элементарным абелевым p -подгруппам $W_j = U_{j+m-n} \times V_j$, $1 \leq j \leq n$. Лемма доказана.

Докажем сейчас теорему 2 для силовских подгрупп в симметрической и знакопеременной группах подстановок.

Пусть p – простое число и P – силовская p -подгруппа симметрической группы $\mathcal{S}_k$ подстановок произвольной конечной степени k . Известно (см. [11; 5.9] и [12; 11.3.1]), что группа P изоморфна прямому произведению силовских p -подгрупп симметрических групп подстановок p -примарных степеней. Поэтому в силу лемм 4 и 5 P есть группа вида (1) для подходящих элементарных абелевых p -подгрупп $V_1, V_2, \dots, V_n$. Индукция по n и лемма 1 показывают, что такая группа всегда является слабо факторизуемой.

Ясно, что P есть силовская p -подгруппа и в знакопеременной группе $\mathcal{A}_k$ при $p > 2$. Допустим, что $p = 2$. Тогда пересечение $\mathcal{A}_k \cap P$ есть силовская 2-подгруппа в $\mathcal{A}_k$. В силу леммы 5 и по построению подгрупп V_i в лемме 4 можно считать, что каждая из них при $i < n$ порождается подстановками с четным числом циклов одной длины. Поэтому все подгруппы $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}$ лежат в $\mathcal{A}_k \cap P$. По лемме Черникова подгруппа $(\mathcal{A}_k \cap P) \cap V_n$ есть дополнение к подгруппе $V_{n-1} \rtimes (\dots (V_3 \rtimes (V_2 \rtimes V_1)) \dots)$ в $\mathcal{A}_k \cap P$. Поскольку $\mathcal{A}_k \cap V_n = (\mathcal{A}_k \cap P) \cap V_n \leq (\mathcal{A}_k \cap P)$, должны иметь

$$\mathcal{A}_k \cap P = (\mathcal{A}_k \cap V_n) \rtimes (V_{n-1} \rtimes (\dots (V_3 \rtimes (V_2 \rtimes V_1)) \dots)).$$

Следовательно, силовские подгруппы знакопеременной группы подстановок также слабо факторизуемы.

Рассмотрим далее случай групп Шевалле. Через Φ обозначим приведенную систему корней простой комплексной алгебры Ли, через Φ^+ – систему ее положительных корней. Группа Шевалле $G(K)$ нормального типа $G = \Phi$ или скрученного типа $G = {}^2\Phi$ над полем K порождается корневыми подгруппами X_a ($a \in G$); см. [13]. Ее максимальная унитарная подгруппа $UG(K) = \langle X_a \mid a \in G^+ \rangle$ при $\text{char } K = p > 0$ есть силовская p -подгруппа.

ЛЕММА 6. Унитарная подгруппа $UG(K)$ любого из типов

$$G = A_n, B_n, C_n, D_{n+1} \quad (n > 2), \quad {}^2D_{n+1}, {}^2A_{2n-1}, E_{n+1} \quad (n = 5, 6)$$

над полем K характеристики $p > 0$ представима в виде (1) для подходящих элементарных абелевых p -подгрупп $V_1, V_2, \dots, V_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению подгруппа $T(r)$ группы $U\Phi(K)$, $r \in \Phi^+$, порождается корневыми подгруппами X_a ($a \in \Phi^+$), для которых $r - a$ есть линейная комбинация простых корней с неотрицательными коэффициентами. Ясно, что определение этой подгруппы имеет смысл и для скрученных групп, причем $T(r) \leq UG(K)$.

Пусть сейчас подгруппа $T(r)$ группы $U\Phi(K)$ выбрана для простого корня r , который в обозначениях [14, таблицы I–IX] является первым в графе Кокстера системы корней Φ

для лиевых типов B_n и D_n , а в остальных случаях – последним. В частности, r для лиевых типов B_n и C_n – это длинный простой корень, крайний в графе Кокстера. В скрученных группах типов ${}^2A_{2n-1}$ и ${}^2D_{n+1}$ подгруппу $T(r)$ выбираем, как обычно, по аналогии с типами C_n и B_n , соответственно; см. также [13, 13.3.1 и 13.3.2]. Таким образом, в представлении [15, § 2] группы $UG(K)$ (ее представление в [15] Φ^+ -матрицами для классических типов G основано на том, что каждому положительному корню вида $e_i - te_j$ ($i \geq j$, $t \in \{0, -1, +1\}$) сопоставляется элементарная Φ^+ -матрица $e_{i,tj}$) подгруппе $T(r)$ для лиевых типов B_n , D_n и ${}^2D_{n+1}$ соответствует подгруппа T_{nn-1} , а для лиевых типов C_n и ${}^2A_{2n-1}$ – подгруппа $T_{1,-1}$. С использованием лемм 3–5 [15] и таблиц V–VII [14] несложно убедиться, что в группе $UG(K)$ корневые подгруппы, не входящие в $T(r)$, порождают дополнение к $T(r)$ и, кроме того,

$$\begin{aligned} UC_n(K) &= T(r) \rtimes UA_{n-1}(K), & U^2A_{2n-1}(K) &= T(r) \rtimes UA_{n-1}(K), \\ UE_n(K) &= T(r) \rtimes UE_{n-1}(K) \quad (n = 7, 8), & UE_6(K) &= T(r) \rtimes UD_5(K); \end{aligned}$$

для лиевых типов A_n , B_n , D_n и ${}^2D_{n+1}$ дополнение является унитарной подгруппой группы Шевалле типа A_{n-1} , B_{n-1} , D_{n-1} и 2D_n , соответственно, т.е. одноименного типа, но меньшего лиева ранга.

Во всех перечисленных случаях, исключая тип E_8 , выбранная подгруппа $T(r)$ является прямым произведением порождающих ее корневых подгрупп. То же самое верно и для подгрупп $UA_1(K)$ ($\simeq UB_1(K) \simeq U^2D_2(K)$) и $UD_2(K)$, т.е. типа $A_1 \cdot A_1$. При $G \neq {}^2A_{2n}$, 2B_2 , 2G_2 , 2F_4 корневые подгруппы группы $UG(K)$ изоморфны аддитивной группе основного поля K или (в случае скрученных групп) его определенного подполя; см. [13, 13.6.4]. Поэтому в условиях леммы подгруппа $T(r)$ является элементарной абелевой p -подгруппой, и мы полагаем $V_n = T(r)$. Требуемое в лемме представление (1) группы $UG(K)$ сейчас получаем индукцией по лиеву рангу n . Лемма доказана.

Леммы 6 и 1 доказывают теорему для случая групп Шевалле. Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

Силовские p -подгруппы в группах Шевалле типов E_6 и E_7 над полем характеристики $p > 0$ слабо факторизуемы в силу лемм 6 и 1. Исключительная для теоремы 2 и леммы 6 группа $U^2A_{2n}(K)$ при $\text{char } K = p > 2n$ есть нильпотентная группа показателя p и поэтому также слабо факторизуема. В то же время, ограничение $G \neq {}^2A_{2n}$ в теореме 2 существенно, как показывает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Силовские 2-подгруппы в скрученных группах Шевалле типов 2B_2 , 2F_4 и ${}^2A_{2n}$ над полем характеристики 2 и силовские 3-подгруппы групп Ри типа 2G_2 обладают собственной подгруппой, пересекающейся нетривиально с любой неединичной подгруппой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В группах $U^2A_2(K)$ и $U^2B_2(K)$ над полем K характеристики 2 квадрат любого нецентрального элемента является неединичным элементом центра, как следует из [13, 13.6.4 (iv), (vi)]. Поэтому их центр (равносильно, коммутант или подгруппа Фраттини) пересекается нетривиально с любой неединичной подгруппой. Используя [13, 13.6.4 (vii)] (см. также [16]), то же самое получаем для коммутанта группы $U^2G_2(K)$ над полем K характеристики 3.

Пусть $U = U^2\Phi(K)$, где K – поле характеристики 2, а Φ – типа A_{2n} или F_4 . Тогда в Φ существует и определен однозначно фундаментальный класс S эквивалентности

типа A_2 или B_2 . Как и в [13, 13.6.4 (iv), (vi)], ему соответствует в U корневая подгруппа X_S , изоморфная $U^2 A_2(K)$ или соответственно $U^2 B_2(K)$; см. также [15]. Остальные корневые подгруппы в группе U порождают нормальную подгруппу U_S . Подгруппу, которую порождают U_S и центр подгруппы X_S , обозначим через M . Пусть $\alpha \in U \setminus M$. Тогда α по модулю U_S есть нецентральный элемент подгруппы X_S и по доказанному его квадрат не может лежать в U_S . Отсюда вытекает, что подгруппа M пересекается нетривиально с любой неединичной подгруппой группы U . Это завершает доказательство.

Поскольку всякая конечная группа изоморфно вкладывается в симметрическую группу подстановок подходящей конечной степени, то теорема 2 дает

СЛЕДСТВИЕ. Всякая конечная p -группа изоморфно вкладывается в слабо факторизуемую конечную p -группу.

В связи с вопросом 8.31 [7] сделаем два замечания. Прежде всего, заметим, что предыдущее следствие еще не исключает возможность эффективного описания конечных слабо факторизуемых p -групп. Например, не выявлено, какую часть среди них занимают все p -группы, получаемые кратным применением леммы 1 из вполне факторизуемых p -групп и групп показателя p . Отметим также предположение о том, что группа $PSL_2(7)$ является единственной слабо факторизуемой группой из конечных простых неабелевых групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hall Ph. Complemented groups // J. London Math. Soc. 1937. V. 12. P. 201–204.
- [2] Черников С. Н. Группы с системами дополняемых подгрупп // Матем. сб. 1954. Т. 35 (77). № 1. С. 93–128.
- [3] Баева Н. В. Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР. 1953. Т. 92. № 5. С. 877–880.
- [4] Черникова Н. В. Группы с дополняемыми подгруппами // Матем. сб. 1956. Т. 39 (81). № 3. С. 1202–1220.
- [5] Горчаков Ю. М. Группы с конечными классами сопряженных элементов. М.: Наука, 1978.
- [6] Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980.
- [7] Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Изд. 14-е. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999.
- [8] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
- [9] Thompson J. G. Hall subgroups of the symmetric groups // J. Combin. Theory. 1966. V. 1. № 2. P. 271–279.
- [10] Ito N. On the factorizations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$ // Acta Sci. Math. 1953. V. 15. № 1. P. 79–84.
- [11] Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962.
- [12] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. 4-е изд. М.: Наука, 1996.
- [13] Carter R. W. Simple Groups of Lie Type. London: J. Wiley, 1972.
- [14] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI. М.: Мир, 1972.
- [15] Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 3. С. 315–338.
- [16] Левчук В. М., Нужин Я. Н. О строении групп Ри // Алгебра и логика. 1985. Т. 24. № 1. С. 26–41.