Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Литвинов, Об областях определения t -функций, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 573–576

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm205>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 09:02:37

УДК 517.11

ОБ ОБЛАСТЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ t -ФУНКЦИЙ

Н. В. Литвинов

Частично рекурсивная функция, отличная от пустой или константы, для которой всякая функция сходная с ней изомерна ей, называется t -функцией. Доказано, что область определения любой t -функции не является ни простым, ни псевдопростым множеством.

Библиография: 3 названия.

Через $\mathbb{N}$ обозначим множество всех целых неотрицательных чисел, $A \setminus B$ – разность множеств A и B . Если $A \subseteq \mathbb{N}$, то дополнение $\mathbb{N} \setminus A$ обозначим через $\bar{A}$. Под *функцией* понимаем одноместную частично рекурсивную функцию (ЧРФ). Термин *рекурсивная функция* будем применять ко всюду определенным на $\mathbb{N}$ ЧРФ. Обозначать ЧРФ будем строчными греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, а рекурсивные функции – строчными латинскими $f, g, h, \dots$. Далее $\delta\alpha$ и $\rho\alpha$ обозначают соответственно область определения и область значений функции α . Множество $\{x \mid \alpha(x) = a\}$ назовем a -уровнем функции α (обозначение α^a). Если $a \in \alpha^a$, то a назовем *неподвижной точкой* функции α .

Рекурсивной перестановкой называется равнозначная рекурсивная функция, отображающая $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$.

На множестве всех ЧРФ введем два отношения: схождения и рекурсивного изоморфизма. Говорим, что функция α *сходна* с функцией β (обозначение: $\alpha \sim \beta$), если существуют рекурсивные перестановки f и g такие, что $\alpha = f^{-1}\beta g$; функция α *рекурсивно изоморфна* функции β (обозначение $\alpha \equiv \beta$), если $\alpha = f^{-1}\beta f$ для некоторой рекурсивной перестановки f . Оба введенных отношения являются отношениями эквивалентности. Классы эквивалентных элементов по эквивалентности $\sim$ назовем *типами схождения*, а по эквивалентности $\equiv$ – *типами рекурсивного изоморфизма*. Если две функции рекурсивно изоморфны, то они сходны. Обратное, вообще говоря, не верно. Таким образом, типы схождения состоят из типов рекурсивного изоморфизма.

Роджерсом в [1] была поставлена проблема: какие типы схождения, кроме известных сейчас типов пустой (т.е. нигде не определенной) функции, типа всех функций констант и типа всех универсальных функций, также состоят из единственного типа рекурсивного изоморфизма? Этот вопрос до сих пор остается открытым.

В работе [2] было введено понятие t -функции, как функции, отличающейся от пустой функции и всех функций констант, тип схождения которой совпадает с типом рекурсивного изоморфизма. Используя это понятие, проблему Роджерса можно сформулировать так: существуют ли t -функции, не являющиеся универсальными?

В настоящей заметке доказано, что область определения любой t -функции не является ни простым, ни псевдопростым множеством.

Приведем результаты, полученные в [2], [3], которые будут использованы в дальнейшем. Если α – t -функция, то для нее выполнены следующие свойства.

Свойство P1 [3]. Область определения функции α , а также множество неподвижных точек являются нерекурсивными множествами.

Свойство P2 [2]. Область значений α есть натуральный ряд.

Свойство P3 [2]. Уровни α являются бесконечными попарно рекурсивно изоморфными множествами.

ЛЕММА 1. Пусть A и B – бесконечные рекурсивно перечислимые множества, $A \subseteq B$ и $A = f(B)$ для некоторой рекурсивной перестановки f . Тогда числа из множества $B \setminus A$ являются элементами различных бесконечных циклов функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как f – рекурсивная перестановка, то любое натуральное число принадлежит некоторому циклу (конечному или бесконечному) функции f . Покажем, что если $x \in B \setminus A$, то x не является элементом никакого конечного цикла f .

Пусть $x \in B \setminus A$. Тогда по условию $y = f(x) \in A$. Кроме того, поскольку $f(A) \subseteq A$, то для всех k выполнено $f^k(y) \notin B \setminus A$ и, значит, для всех k $f^k(y) \neq x$.

Если бы два различных элемента x и y из $B \setminus A$ принадлежали одному бесконечному циклу рекурсивной перестановки f , то нашлось бы некоторое $k \geq 1$ такое, что либо $f^k(x) = y$, либо $f^k(y) = x$. Но это невозможно, так как для всякого $k \geq 1$ элементы $f^k(x)$ и $f^k(y)$ попадают во множество A . Лемма доказана.

Пусть α – произвольная функция, A – некоторое множество. Для всякого $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ определим множество $\alpha^i(A)$ следующим образом:

$$\alpha^i(A) = \begin{cases} \{x \mid (\exists y)(y \in A \wedge \alpha^{-i}(x) = y)\}, & \text{если } i < 0, \\ \{x \mid (\exists y)(y \in A \wedge \alpha^i(y) = x)\}, & \text{если } i \geq 0, \end{cases}$$

где $\alpha^i(x) = x$, если $i = 0$, и $\alpha^i(x) = \alpha(\alpha^{i-1}(x))$ при $i > 0$.

ЛЕММА 2. Пусть α – t -функция, a – неподвижная точка α . Тогда найдется рекурсивная перестановка g такая, что

- (1) $g(\delta\alpha) = \delta\alpha$;
- (2) элементы множества $U = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \alpha^{-i}(\{a\})$ принадлежат различным бесконечным циклам g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S_α – множество неподвижных точек функции α , b – неподвижная точка функции α отличная от a . Определим рекурсивную перестановку

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x = a, \\ a, & \text{если } x = b, \\ x & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и положим $\beta = f\alpha$. Через S_β обозначим множество неподвижных точек функции β . Очевидно, что $S_\beta = S_\alpha \setminus \{a, b\}$, а множество $\{a, b\}$ является циклом длины два функции β . Поскольку α — t -функция, то $\alpha = g^{-1}\beta g$ для некоторой рекурсивной перестановки g . Введем следующие обозначения:

$$U_\alpha^k = \bigcup_{i=0}^k \alpha^{-i}(S_\alpha), \quad U_\beta^k = \bigcup_{i=0}^k \beta^{-i}(S_\beta), \quad k \geq 0,$$

$$U_\alpha^\infty = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \alpha^{-i}(S_\alpha), \quad U_\beta^\infty = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \beta^{-i}(S_\beta).$$

Отметим, что при введенных обозначениях $S_\alpha = U_\alpha^0$ и $S_\beta = U_\beta^0$.

Так как $U_\beta^\infty \subseteq U_\alpha^\infty$ и $U \subseteq U_\alpha^\infty \setminus U_\beta^\infty$, согласно лемме 1 достаточно показать, что $g(U_\alpha^\infty) = U_\beta^\infty$. Очевидно, что $g(U_\alpha^0) = U_\beta^0$. Допустим теперь, что для некоторого $k \geq 2$ выполнено равенство $g(U_\alpha^{k-1}) = U_\beta^{k-1}$. Пусть $x \in U_\alpha^k$. Тогда $\alpha(x) = c$ для некоторого элемента c из U_α^{k-1} . По индуктивному предположению $g(c) \in U_\beta^{k-1}$. Имеем

$$\beta g(x) = g\alpha(x) \in U_\beta^{k-1} \quad \text{и} \quad g(x) = \beta^{-1}(g\alpha(x)) = \beta^{-1}(g(c)) \in U_\beta^k.$$

ЛЕММА 3. Пусть α — t -функция, A — бесконечное множество. Тогда множество $\alpha^{-1}(A)$ не рекурсивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через U множество $\alpha^{-1}(A)$.

Случай 1. Множество A рекурсивно кобесконечное. Допустим, что U — рекурсивное множество. Так как U бесконечное, без потери общности можно считать, что $A = U$. Определим рекурсивную перестановку f такую, что $f(A) = \bar{A}$, и положим $\beta = f\alpha$. Очевидно, $\beta(A) = \bar{A}$ и $\beta(\bar{A}) = A$ и β не имеет неподвижных точек. Противоречие со свойством P1.

Случай 2. Множество A коконечное. Множество U не может быть рекурсивным, поскольку в этом случае все (кроме, может быть, конечного числа) неподвижные точки α принадлежат U . Противоречие со свойством P1.

Случай 3. Множество A не рекурсивно. Множество U не может быть рекурсивным, так как в этом случае функция

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } (\exists y)(y \in U \wedge \alpha(y) = x), \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

является рекурсивной характеристической функцией множества A . Действительно, так как согласно P2 область значений α есть натуральный ряд, обязательно найдется y такое, что $\alpha(y) = x$. А так как множество U целиком состоит из уровней α , любое такое y принадлежит либо U , либо $\bar{U}$.

ТЕОРЕМА. Область определения любой t -функции не является ни простым, ни псевдопростым множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – t -функция, a – неподвижная точка функции α . Согласно лемме 2 найдется рекурсивная перестановка g такая, что $g(\delta\alpha) = \delta\alpha$ и элементы множества $\bigcup_{i=0}^{\infty} \alpha^{-i}(\{a\})$ принадлежат различным бесконечным циклам g . Обозначим через G множество $\{g(x), gg(x), ggg(x), \dots\}$ (сплинттер рекурсивной перестановки g в точке $g(x)$).

I. Предположим, что $\delta\alpha$ – простое множество. Опишем процедуру ПР для вычисления функции χ в точке x . Пусть s – сигнальная переменная, и пусть сначала $s = 0$.

ПРОЦЕДУРА ПР. Начинаем одновременно вычислять $\alpha(x)$ и перечислять множество G . Возможны следующие два случая. (Рассматриваем тот из них, который совершится раньше. Если оба случая произойдут одновременно, то для определенности рассматриваем первый случай.)

Случай 1. Вычислено $\alpha(x)$. Рассмотрим два подслучая.

(а) $\alpha(x) = a$. Полагаем $\chi(x) = 1$.

(б) $\alpha(x) \neq a$. Тогда, если $s = 1$; полагаем $\chi(x) = 0$, иначе s присваиваем значение 1 и выполняем процедуру ПР с $\alpha(x)$ в качестве x .

Случай 2. Вычислено x в G . Полагаем $\chi(x) = 0$.

Поскольку $g(\delta\alpha) = \delta\alpha$, а $\overline{\delta\alpha}$ – иммунное множество и, следовательно, не может иметь бесконечных РП-подмножеств, то $\overline{\delta\alpha}$ будет целиком состоять из конечных циклов рекурсивной перестановки g . Следовательно, всякое натуральное число принадлежит либо некоторому конечному сплинттеру g , либо множеству $\delta\alpha$. Учитывая это, нетрудно видеть, что функция χ является рекурсивной характеристической функцией множества $\alpha^{-2}(\{a\})$. Но согласно лемме 3 это множество нерекурсивно. Противоречие.

II. Пусть теперь $\delta\alpha$ – псевдопростое множество. Тогда найдется рекурсивно перечислимое множество B такое, что $\delta\alpha \cup B$ простое. В этом случае мы получим процедуру для вычисления рекурсивной характеристической функции множества $\alpha^{-2}(\{a\})$, перечисляя в процедуру ПР множество $G \cup B$ вместо множества G .

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Rogers H. On universal function // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16. № 1. P. 39–44.
- [2] Литвинов Н. В. О типах сходства и рекурсивного изоморфизма частично рекурсивных функций // Сиб. матем. ж. 2000. Т. 41. № 1. С. 164–166.
- [3] Поляков Е. А. О типах сходства и рекурсивного изоморфизма частично рекурсивных функций // Сиб. матем. ж. 1989. Т. 30. № 6. С. 188–192.

Шуйский государственный педагогический университет

Поступило
03.07.2000