Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Мощевитин, И. Д. Шкредов, О критерии нормальности Пятецкого-Шапиро, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 577–589

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm206>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:51:07

УДК 511

О КРИТЕРИИ НОРМАЛЬНОСТИ ПЯТЕЦКОГО-ШАПИРО

Н. Г. Мошевитин, И. Д. Шкредов

В данной работе критерию нормальности Постникова–Пятецкого придана более современная форма и получены его неупрощаемые аналоги для конечных цепей Маркова, цепных дробей и обобщенного сдвига Бернулли.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Пусть X – пространство с сигма-алгеброй измеримых множеств Φ и мерой μ , а T – измеримое эргодическое отображение пространства X в себя, сохраняющее эту меру. Всюду ниже будем считать, что $\mu(X) = 1$.

Для произвольной измеримой функции $f(x)$ рассмотрим биркгофовское среднее

$$S_l(T, x, f) = S_l(x, f) = \sum_{m=0}^{l-1} f(T^m x).$$

Пусть $\{C_m\}$ – не более чем счетное семейство измеримых подмножеств X . Определим аналог хаусдорфовой меры $H(\cdot)$ для множества E относительно этого семейства, как $\inf\{\sum \mu(C_i)\}$, где $\inf$ берется по не более чем счетным покрытиям E . Будем говорить, что меры μ и H *согласованы*, если любое μ -измеримое множество является H -измеримым.

Обозначим через Γ семейство μ -измеримых множеств $\{V\}$, которые с любой точностью аппроксимируются множествами семейства $\{C_m\}$. (То есть для произвольного V из Γ и любого $\varepsilon > 0$ существуют наборы непересекающихся множеств $\{M_i\}$ и $\{N_i\}$ из семейства $\{C_m\}$, так что $\bigsqcup M_i \subseteq V \subseteq \bigsqcup N_i$ и $\sum \mu(N_i) - \varepsilon < \mu(V) < \sum \mu(M_i) + \varepsilon$).

Пусть χ_I – характеристическая функция измеримого множества I . Знаменитая эргодическая теорема Биркгофа (см., например, [1]) утверждает, что для почти всех точек x_0 выполнено

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi_I)}{\nu} = \mu(I). \quad (1)$$

В работе [2] Пятецким–Шапиро для динамической системы, порожденной отображением $x \mapsto \{qx\}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, интервала $[0, 1]$ в себя, был дан критерий того, чтобы для данной точки x_0 выполнялось (1). Ряд последующих работ Пятецкого–Шапиро и Постникова [2]–[5] и других (библиографию см. в [4], [5]) содержал обобщения и усиления первоначального критерия из работы [2].

Достаточно общая формулировка выглядит следующим образом (ср. с [5, теорема 6]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00912, и фонда INTAS.

ТЕОРЕМА А. Пусть точка $x_0 \in X$. Пусть меры μ и H согласованы и для любого μ -измеримого A выполнено $\mu(A) = H(A)$. Если существует положительная постоянная C , что для любого множества I из семейства $\{C_m\}$ выполняется

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi_I)}{\nu} \leq C\mu(I),$$

то для любого множества I из Γ выполняется

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi_I)}{\nu} = \mu(I).$$

Пусть q – целое число, $q > 1$, α – вещественное число. Обозначим через $P_\nu(\alpha, \Delta)$, где Δ – некоторый интервал из отрезка $[0, 1]$, число попаданий в Δ дробных долей $\{\alpha q^k\}$, $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$.

Для динамической системы, соответствующей распределению дробных долей $\{\alpha q^k\}$, с $X = [0, 1)$ и $Tx = \{qx\}$ в работе [3] Пятачким-Шапиро был доказан результат, значительно улучшающий общую теорему А.

ТЕОРЕМА Б. Пусть $\varphi(t)$ – монотонно возрастающая положительнозначная функция такая, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t^{1-\varepsilon}} = 0. \quad (2)$$

Если для любого интервала Δ выполняется

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{P_\nu(\alpha, \Delta)}{\nu} \leq \varphi(|\Delta|),$$

то дробные доли $\{\alpha q^k\}$ равномерно распределены.

Как известно, хаусдорфова размерность множества чисел, не являющихся нормальными по основанию q , равна 1. (Более того, как показал Шмидт [6], хаусдорфова размерность множества чисел, не являющихся нормальными ни по какому основанию, равна единице.) С другой стороны, теорема Б означает, что хаусдорфова мера чисел, не нормальных по фиксированному основанию q , относительно функции φ равна 0.

В данной заметке теорема Б перенесена на некоторые другие динамические системы (в том числе и рассматривавшиеся в [4]), при этом функция φ будет выбираться так, чтобы хаусдорфова мера “исключительного” (в смысле эргодической теоремы) множества точек была равна 0.

2. Общая постановка задачи. Возьмем произвольное $\delta > 0$ и произвольное натуральное l . Рассмотрим множества

$$A_l(T, f, \delta) = A_l(f, \delta) = \left\{ x \in X : \left| \frac{S_l(T, x, f)}{l} - \int f d\mu \right| > \delta \right\}.$$

Как утверждает статистическая эргодическая теорема, для любого $\delta > 0$ мера множеств $A_l(f, \delta)$ стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$. (По поводу скорости сходимости см. [7], [8]).

Пусть $\{C_m\}$ – не более чем счетное семейство измеримых подмножеств X , а $\varphi(t)$ – монотонно возрастающая положительнозначная функция аргумента $t \in \mathbb{R}_+$. Определим меру $H_\varphi(\cdot)$ для множества E относительно этого семейства, как $\inf\{\sum \varphi(\mu(C_i))\}$, где $\inf$ берется по не более чем счетным покрытиям E . (При $\varphi(t) = t$ мера H_φ совпадает с рассматривавшейся выше мерой H .)

Мы сформулируем критерий Пятецкого для произвольной эргодической динамической системы и проведем доказательство, аналогичное доказательству из [2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть точка $x_0 \in X$. Если для произвольного множества I из семейства $\{C_m\}$ выполнено

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi_I)}{\nu} \leq \varphi(\mu(I))$$

и для любого $\delta > 0$ выполнено $H_\varphi(A_l(T, \chi_I, \delta)) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, то для произвольного множества V из Γ имеет место асимптотическое равенство

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi_V)}{\nu} = \mu(V). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любое $\delta > 0$ и характеристическую функцию χ произвольного множества I из семейства $\{C_m\}$. Для любых натуральных ν и l справедлива формула

$$S_\nu(x_0, \chi) = \frac{1}{l} \sum_{t=0}^{\nu-1} S_l(T^t x_0, \chi) + O(l). \quad (4)$$

Из этой формулы получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} - \mu(I) \right| &= \frac{1}{\nu} \left| \sum_{t=0}^{\nu-1} \left(\frac{S_l(T^t x_0, \chi)}{l} - \mu(I) \right) \right| + O\left(\frac{l}{\nu}\right) \\ &\leq \frac{1}{\nu} \sum_t^1 \left| \frac{S_l(T^t x_0, \chi)}{l} - \mu(I) \right| + \frac{1}{\nu} \sum_t^2 \left| \frac{S_l(T^t x_0, \chi)}{l} - \mu(I) \right| + O\left(\frac{l}{\nu}\right) \\ &\leq \delta + \frac{2R_\nu}{\nu} + O\left(\frac{l}{\nu}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

где суммирование в первой сумме распространено на те слагаемые, для которых

$$\left| \frac{S_l(T^t x_0, \chi)}{l} - \mu(I) \right| \leq \delta,$$

а R_ν обозначает количество слагаемых во второй сумме, для которых

$$\left| \frac{S_l(T^t x_0, \chi)}{l} - \mu(I) \right| > \delta.$$

Итак, для индексов t из области суммирования в $\sum^2$ выполняется $T^t x_0 \in A_l(\chi, \delta)$. Возьмем покрытие $A_l(\chi, \delta)$ множествами из семейства $\{C_m\}$, так что

$$\sum_i \varphi(\mu(C_i)) < H_\varphi(A_l(\chi, \delta)) + \delta.$$

По условию теоремы $H_\varphi(A_l(\chi, \delta)) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, значит

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{R_\nu}{\nu} \leq \sum_i \varphi(\mu(C_i)) < 2\delta \quad (6)$$

при достаточно больших l . Значит,

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} - \mu(I) \right| = 0,$$

т.е.

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} - \mu(I) \right| = 0.$$

Пусть теперь χ – характеристическая функция произвольного множества V из Γ . Для всякого положительного ε найдется набор множеств N_i из семейства $\{C_m\}$ таких, что $V \subseteq \bigsqcup N_i$ и $\mu(V) > \sum \mu(N_i) - \varepsilon$. Теперь имеем

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(T, x_0, \chi)}{\nu} \leq \sum \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(T, x_0, \chi_i)}{\nu} = \sum \mu(N_i) < \mu(V) + \varepsilon,$$

где $\chi_i = \chi_{N_i}$. Итак,

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(T, x_0, \chi)}{\nu} \leq \mu(V).$$

Аналогично,

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(T, x_0, \chi)}{\nu} \geq \mu(V).$$

Значит, для χ выполнено (3). Теорема доказана.

Часто оказывается, что семейство $\{C_m\}$ имеет специальный вид.

Пусть ξ – не более чем счетное измеримое разбиение пространства X . Если ξ и η – два таких разбиения, то их совместное разбиение определяется следующим образом: $\xi \vee \eta := \{A \cap B : A \in \xi, B \in \eta\}$. Для измеримого разбиения ξ , сохраняющего меру преобразования T , и произвольного натурального n определим итерированное разбиение $\xi_{-n}^T := \xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n+1}\xi$, $\xi_0^T = \xi$.

Мы будем считать, что семейство $\{C_m\}$ есть совокупность всех элементов разбиений ξ_{-n}^T . Множество всех этих элементов иногда обозначают через $\xi_{-\infty}^T = \{\xi_{-n}^T\}_{n=0}^\infty$ (эта ситуация была фактически рассмотрена в [4]). Как и прежде, Γ обозначает семейство μ -измеримых множеств $\{V\}$, которые с любой точностью аппроксимируются множествами семейства $\{C_m\}$.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть точка $x_0 \in X$. Если для любого n и характеристической функции χ_I произвольного элемента $I \in \xi_{-n}^T$ выполняется

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi_I)}{\nu} \leq \varphi(\mu(I)) \quad (7)$$

и, кроме того, для любого $\delta > 0$ выполняется $H_\varphi(A_l(T^n, \chi_I, \delta)) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, то для характеристической функции χ произвольного множества $V \in \Gamma$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} = \mu(V). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 для любого элемента начального разбиения ξ выполнено (8). Пусть χ – характеристическая функция множества $K = E_1 \cap T^{-1}E_2 \cap \dots \cap T^{-k+1}E_k$, $E_i \in \xi$, которое является элементом разбиения ξ_{-k}^T для некоторого k . Рассмотрим преобразование T^k и будем считать разбиение $\eta = \xi_{-k}^T$ начальным для этой новой динамической системы. Возьмем точки $x_0, T x_0, \dots, T^{k-1} x_0$. Для них выполнено условие (7) теоремы. Очевидно, что для преобразования T^k и этих точек выполнено

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(T^k, T^j x_0, \chi_I)}{\nu} \leq k \cdot \varphi(\mu(I)), \quad j = 0, \dots, k-1.$$

Меры H_φ и $H_{k\varphi}$ стремятся к нулю одновременно. Таким образом, все условия теоремы 1 для динамической системы, порожденной преобразованием T^k , с начальным разбиением η выполнены. Применяя формулу

$$S_\nu(T, x, \chi) = \sum_{j=0}^{k-1} S_{[\nu/k]}(T^k, T^j x, \chi) + O(k), \quad (9)$$

получаем

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(T, x_0, \chi)}{\nu} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_{[\nu/k]}(T^k, T^j x_0, \chi)}{[\nu/k]} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k} \mu(K) = \mu(K).$$

Далее будем действовать также, как и в конце доказательства теоремы 1. Пусть теперь χ – характеристическая функция произвольного множества V из Γ . Для всякого положительного ε найдется набор множеств N_i из семейства $\{C_m\}$ таких, что $V \subseteq \bigsqcup N_i$ и $\mu(V) > \sum \mu(N_i) - \varepsilon$. Теперь снова

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(T, x_0, \chi)}{\nu} \leq \mu(V) + \varepsilon.$$

Аналогично,

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(T, x_0, \chi)}{\nu} \geq \mu(V) - \varepsilon,$$

и теорема доказана.

3. Случай конечного разбиения. Пусть теперь ξ – конечное измеримое разбиение пространства X с q элементами.

Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_N, 0 \leq \gamma_i < q, 1 \leq i \leq N$, – некоторая система целых чисел, $0 \leq a < q$, $T_{N,a}$ – количество чисел, равных a , в этой системе. В работе [3] было доказано следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Существует некоторое положительное $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta), \varepsilon_1(\delta) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$, такое, что количество систем с $|T_{N,a} - N/q| \geq \delta N$ есть $O(q^{N(1-\varepsilon_1)})$.*

Пусть монотонно возрастающая функция φ представляется в виде $\varphi(t) = t\psi(t)$, где $\psi(t)$ – невозрастающая функция, которая удовлетворяет следующему условию: для произвольных $\delta > 0, n \in \mathbb{N}$ и для всех характеристических функций χ элементов разбиения ξ_{-n}^T выполнено

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \max \left\{ \mu(A_l(T^n, \chi, \delta)), \frac{1}{q^{ln\varepsilon_1(\delta)}} \right\} \psi\left(\frac{1}{q^{ln}}\right) = 0. \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из условия, что для любых $\delta > 0, n \in \mathbb{N}$ имеет место

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\psi(1/q^{ln})}{q^{ln\varepsilon_1(\delta)}} = 0$$

вытекает, что для φ выполнено (2).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть точка $x_0 \in X$ и ψ удовлетворяет (10). Если для любого n и характеристической функции χ произвольного элемента $I \in \xi_{-n}^T$ выполнено*

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} \leq \mu(I)\psi(\mu(I)), \quad (11)$$

то для характеристической функции χ произвольного множества $E \in \Gamma$ выполнено

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} = \mu(E). \quad (12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как для динамической системы с $X = [0, 1]$ и $Tx = \{qx\}$

$$\mu(A_l(T^n, \chi, \delta)) = O\left(\frac{1}{q^{ln\varepsilon_1(\delta)}}\right),$$

то из теоремы 2 следует теорема Б. Пятацкого.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любое $\delta > 0$ и характеристическую функцию χ элемента K разбиения ξ . Заметим, что множество $A_l(\chi, \delta)$ *разбивается* на объединение некоторых элементов разбиения ξ_{-l}^T . Проводим выкладку, аналогичную выкладке (5) из теоремы 1. Для оценки слагаемого R_ν/ν в правой части (5) нам нужен следующий аналог оценки (6):

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{R_\nu}{\nu} \leq \sum_{\lambda}^* \mu(\lambda)\psi(\mu(\lambda)), \quad (13)$$

где знаком $\sum^*_{\lambda}$ обозначено суммирование по всем элементам λ разбиения ξ^T_l , на которые разбивается $A_l(\chi, \delta)$.

Разобьем (13) на сумму $\sum_1$ по $\xi^T_l(x)$ с мерами $< 1/q^l$ и на сумму $\sum_2$ по $\xi^T_l(x)$ с мерами $\geq 1/q^l$. По утверждению 1 количество слагаемых в (13) есть $O(q^{l(1-\varepsilon_1)})$; следовательно, $\sum_1 \ll \varphi(1/q^l)q^{l(1-\varepsilon_1)} = \psi(1/q^l)/q^{l\varepsilon_1(\delta)}$ (используем монотонность функции φ). Из того, что ψ не возрастает, получаем $\sum_2 \leq \mu(A_l(\chi, \delta))\psi(1/q^l)$. По условию (10) теоремы оба этих выражения $< \delta$ при достаточно большом l . Значит,

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{S_{\nu}(x_0, \chi)}{\nu} - \mu(K) \right| = 0,$$

т.е.

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{S_{\nu}(x_0, \chi)}{\nu} - \mu(K) \right| = 0.$$

Пусть теперь χ – характеристическая функция $E_1 \cap T^{-1}E_2 \cap \dots \cap T^{-k+1}E_k$, $E_i \in \xi$, элемента ξ^T_k для некоторого k . Рассмотрим преобразование T^k и будем считать разбиение $\eta = \xi^T_k$ с q^k элементами начальным для этой новой динамической системы. Условие (10) для этой динамической системы выполнено. Также выполнено (7). Следовательно, применяя теорему 1', получаем (12) для характеристической функции χ произвольного множества E из Γ . Теорема доказана.

4. О больших уклонениях. Для оценки мер множеств $A_l(\chi, \delta)$ бывают полезны центральная предельная теорема и оценки больших уклонений.

Пусть $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1,2,\dots}$ – убывающая к нулю последовательность положительных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Динамическая система (X, Φ, μ, T) с начальным разбиением ξ обладает свойством α -перемешивания, если

$$\sup_{M_1 \in \xi^T_k, M_2 \in T^{-(n+k)}(\xi^T_{\infty})} \{ |\mu(M_1 \cap M_2) - \mu(M_1)\mu(M_2)| \} \leq \alpha(n)\mu(M_1) = \alpha_n\mu(M_1).$$

Пусть рассматриваемая динамическая система обладает свойством α -перемешивания. Рассмотрим функцию $f(x) = \chi(x) - \int \chi d\mu$, где $\chi(x)$ – характеристическая функция произвольного элемента ξ^T_n . Для таких систем выполнена

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА [11, гл. 4, § 20]. Пусть $\sum \alpha_n^{1/2} < \infty$ и $\sigma^2 = E f^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} E(f \cdot f(T^k)) > 0$. Тогда случайные величины $S_n(f, T)/(\sigma\sqrt{n})$ сходятся по распределению к нормальной случайной величине $N(0, \sigma^2)$. (Символом E обозначено математическое ожидание.)

Нам понадобятся теоремы больших уклонений из [13] для вероятностей $P(x : |S_l(f, \delta)|/l > \delta)$. Теоремы о больших уклонениях при наличии перемешивания устанавливают оценки следующего вида:

$$\mu(A_l(\chi, \delta)) = P\left(x : \left| \frac{S_l(f, \delta)}{l} \right| > \delta\right) \ll e^{-\rho(l)} \quad (14)$$

с некоторой функцией $\rho(l) = \rho_\delta(l) \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty$. Формулировки этих результатов в общем виде достаточно громоздки, поэтому в следующих двух пунктах мы сформулируем лишь необходимые нам следствия.

Отметим, что использованное нами утверждение 1 из п. 3 (принадлежащее Пятецкому-Шапиро) как раз является простейшим примером теоремы о больших отклонениях (см. [10, гл. 1, § 6; гл. 4, § 5]).

5. Теорема Пятецкого для марковских цепей. Пусть матрица

$$P = \{p_{ij}\}_{i,j=0,\dots,n-1}$$

стохастическая, т.е. такая, что $p_{ij} \geq 0$ и $\sum_j p_{ij} = 1$. Матрица P называется *транзитивной*, если для некоторого m все элементы матрицы P^m положительны. Тогда [1], [10] существует вектор $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ с положительными компонентами такой, что $P^* \pi = \pi$ (P^* – транспонированная матрица).

Рассмотрим пространство бесконечных вправо последовательностей Ω , составленных из знаков $0, \dots, n-1$. Мере μ элементарного цилиндра, т.е. множества, у которого фиксировано какое-то количество первых знаков, положим равной π_{δ_1} , если фиксирован первый знак δ_1 , и равной $\pi_{\delta_1} p_{\delta_1 \delta_2} \cdots p_{\delta_{s-1} \delta_s}$, если фиксированы знаки $\delta_1, \dots, \delta_s$. Мера пустого множества равна 0, всего пространства – 1. Эту меру можно продолжить на минимальную σ -алгебру, содержащую алгебру цилиндрических множеств. Легко проверить, что полученная таким образом мера μ , будет инвариантна относительно сдвига влево T . Это преобразование эргодично (см. [1], [12]). Конечная транзитивная цепь Маркова обладает свойством α -перемешивания с $\alpha_n = a e^{-bn}$, $a, b > 0$ (см. [11, гл. 4, § 20]). Более того, для мер множеств $A_l(T^k, \chi, \delta)$, где $\chi(x)$ – характеристическая функция элементарного цилиндра с k фиксированными знаками, выполнена оценка (см. [13, лемма 2.4 и теорема 4.26])

$$\mu(A_l(\chi, \delta)) \ll e^{-cl} \quad (15)$$

с некоторым $c = c(\delta) > 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $x_0 \in \Omega$. Пусть также для всякого положительного η выполнено $\psi(t) = O(t^{-\eta})$, $t \rightarrow 0$. Если для любого элементарного цилиндра I выполнено

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(x_0, I)}{\nu} \leq \mu(I) \psi(\mu(I)),$$

то для произвольного множества V из Γ выполняется

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(x_0, V)}{\nu} = \mu(V).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разбиение пространства Ω на элементарные цилиндры с первым фиксированным знаком. Возьмем любой элементарный цилиндр I_k , у которого k первых знаков фиксировано. Обозначим через χ его характеристическую функцию, и пусть $f(x) = \chi(x) - \int \chi d\mu$. Из оценки (15) имеем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \max \left\{ \mu(A_l(T^k, \chi, \delta)), \frac{1}{n^{lk\varepsilon_1(\delta)}} \right\} \psi\left(\frac{1}{n^{lk}}\right) = 0.$$

Применяя теорему 2, получаем теорему 3.

6. Примеры со счетным разбиением. В следующих двух примерах динамических систем со счетным начальным разбиением ξ можно явно указать функцию φ .

а) Первый пример относится к теории цепных дробей.

Цепной дробью, соответствующей числу α , называется выражение

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} = [a_0; a_1, a_2, \dots].$$

Число a_n называется n -м *неполным частным числа* α , а рациональное число $p_k/q_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ – *подходящей дробью порядка* k . Если $\alpha \in [0, 1)$, то будем писать $\alpha = [a_1, a_2, \dots]$. *Интервалом k -го ранга* $I_k = I_k(a_1, \dots, a_k)$ называется множество всех чисел α , у которых цепные дроби начинаются с $a_1, \dots, a_k$. Обозначим через $S_\nu(\alpha, I_k)$ число повторений комбинации $(a_1, \dots, a_k)$ в разложении α до ν -го места.

Как известно, преобразование Гаусса $Tx = \{1/x\}$, $x \neq 0$, $T0 = 0$, является левым сдвигом при разложении в цепную дробь и сохраняет меру

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln 2} \int_A \frac{1}{1+x} dx,$$

которая эквивалентна мере Лебега dx . Соответствующая динамическая система обладает свойством α -перемешивания (теорема Леви, см. [11, гл. 4, § 20], а также [9, примечание, с. 83]) с $\alpha_n = Ke^{-\gamma n}$, $K, \gamma > 0$. В рассматриваемом случае теорема больших уклонений для слабо зависимых случайных величин (см. [13, лемма 2.4 и теорема 4.23]) обеспечивает оценки для мер

$$\mu(A_l(\chi, \delta)) \ll e^{-c\sqrt{l}} \quad (16)$$

с некоторым $c = c(\delta) > 0$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $x_0 \in [0, 1)$. Пусть также для всякого положительного η выполнено $\psi(t) = O(e^{\eta\sqrt{\log 1/t}})$, $t \rightarrow 0$. Если для любого интервала k -го ранга I_k имеет место неравенство

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(x_0, I_k)}{\nu} \leq \mu(I_k)\psi(\mu(I_k)),$$

то для любого интервала $I = (a, b)$ выполнено

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(x_0, I)}{\nu} = \mu(I).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любое $\delta > 0$, и пусть I_k – произвольный интервал k -го ранга. Обозначим через $E_l(g)$ ($g \geq 1$) множество чисел отрезка $[0, 1]$, для которых $a_1 a_2 \dots a_l \geq g$. Это множество представляет собой систему интервалов ранга l . Длина $|I_l|$ какого-либо из этих интервалов равна $1/(q_l(q_l + q_{l-1}))$ и $1/(2q_l^2) \leq |I_l| \leq 1/q_l^2$. Далее, по индукции получаем, что $a_1 a_2 \dots a_l \leq q_l \leq 2^l a_1 a_2 \dots a_l$.

Оценим хаусдорфову меру $E_l(g)$ относительно функции φ , т.е. сумму

$$H_\varphi(E_l(g)) = \sum_{a_1 a_2 \dots a_l \geq g} |I_l| \psi(|I_l|).$$

Обозначая $t^{-\eta}$ через $\rho(t)$, имеем

$$H_{\varphi}(E_l(g)) \leq \sum_{a_1 a_2 \dots a_l \geq g} \frac{\rho((2^{l+1} a_1 a_2 \dots a_l)^2)}{(a_1 a_2 \dots a_l)^2} = \rho(4^{l+1}) \sum_{a_1 a_2 \dots a_l \geq g} \prod_{i=1}^l \frac{\rho(a_i^2)}{a_i^2}. \quad (17)$$

По аналогии с рассуждениями из [9] получим оценку для (17). Заметим, что

$$\prod_{i=1}^l \frac{\rho(a_i^2)}{a_i^2} = \prod_{i=1}^l \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \frac{\rho(a_i^2)}{a_i(a_i + 1)} \leq 2^l \prod_{i=1}^l \int_{a_i}^{a_i+1} \frac{\rho(x_i^2)}{x_i^2} dx_i.$$

Следовательно,

$$H_{\varphi}(E_l(g)) \leq 2^l \rho(4^{l+1}) J_l(g) = 2^l \rho(4^{l+1}) \int \dots \int \frac{\rho(x_1^2 \dots x_l^2) dx_1 \dots dx_l}{x_1^2 \dots x_l^2},$$

где интегрирование распространяется на область $x_i \geq 1$, $x_1 x_2 \dots x_l \geq g$. По индукции доказывается, что

$$J_n(g) = \frac{\rho(g^2)}{g} \left(\sum_{k=0}^{n-2} C^{n-k-1} \frac{\log^k g}{k!} + C \frac{\log^{n-1} g}{(n-1)!} \right),$$

где $C = 1/(1 - 2\eta)$. Дальнейший подсчет показывает, что, полагая $g = e^{A^l}$, где A достаточно большое, имеем

$$H_{\varphi}(E_l(e^{A^l})) \ll e^{-B^l}, \quad B > 0. \quad (18)$$

Далее,

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{R_{\nu}}{\nu} \leq \sum_I^{**} \mu(I) \psi(\mu(I)), \quad (19)$$

где, в отличие от теоремы 2 (ср. с формулой (13)), суммирование $\sum_I^{**}$ распространяется на *счетное* количество интервалов k -го ранга I . Разобьем (19) на сумму по $I_l \subseteq E_l(g)$ и на сумму по $I_l \subseteq A_l(I_k, \delta) \setminus E_l(g)$. Так как для I_l , не принадлежащих $E_l(g)$, имеет место неравенство $|I_l| \geq \frac{1}{2}(2^l g)^2 = 1/e^{Kl}$, где $K > 0$ – некоторая новая константа, используя (18), мы получаем, что

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{R_{\nu}}{\nu} \ll e^{-B^l} + \psi\left(\frac{1}{e^{Kl}}\right) \mu(A_l(I_k, \delta)). \quad (20)$$

Из оценки (16) следует, что при достаточно малом η правая часть (20) стремится к 0 при $\nu \rightarrow \infty$. Значит, для характеристической функции χ интервала I_k выполнено

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{S_{\nu}(x_0, \chi)}{\nu} - \mu(I_k) \right| = 0,$$

т.е.

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{S_{\nu}(x_0, \chi)}{\nu} - \mu(I_k) \right| = 0.$$

Возьмем теперь произвольный интервал (a, b) . Так как длины интервалов I_n убывают, то (a, b) может быть аппроксимирован с любой точностью такими интервалами. Теорема 4 доказана.

б) Второй пример является обобщением теоремы Пятецкого-Шапира на случай системы с бесконечным алфавитом.

Пусть p_a , $a = 1, 2, 3, \dots$, — положительные числа, $\sum_{a=1}^{\infty} p_a = 1$. Рассматривается пространство Ω бесконечных вправо последовательностей

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_\nu, \dots)$$

с мерой μ , определенной на элементарных цилиндрических множествах

$$\Delta(a_1, \dots, a_n) = \{\xi : \xi_j = a_j, j = 1, \dots, n\}$$

по правилу $\mu\Delta(a_1, \dots, a_n) = p(a_1, \dots, a_n) = p_{a_1} \cdots p_{a_n}$ и продолженной на всю σ -алгебру, порожденную цилиндрическими множествами. Для набора $a = (a_1, \dots, a_n)$ будем использовать обозначение $p(a) = p(a_1, \dots, a_n)$. Преобразование сдвига влево мы будем снова обозначать T (хорошо известно, что оно эргодично).

ТЕОРЕМА 5. Пусть при некотором положительном η_0 ряд

$$\sum_{a=1}^{\infty} p_a^{1-\eta_0}$$

сходится. Пусть $\varphi(t)$ — произвольная положительнозначная функция, стремящаяся к 0 при $t \rightarrow 0$ и такая, что для всякого положительного η выполнено $\varphi(t) = O(t^{1-\eta})$, $t \rightarrow 0$. Если для любого элементарного цилиндра I выполнено

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi_I)}{\nu} \leq \varphi(\mu(I)), \quad (21)$$

то для характеристической функции χ произвольного множества $E \in \Gamma$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} = \mu(E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим

$$\sigma_{n,\delta}(p, q; x, y) = \sum_{k: k/n \notin [p-\delta, p+\delta]} C_n^k p^{(1-x)k} q^{(1-y)(n-k)}$$

и для набора $a = (a_1, \dots, a_t)$ величину

$$\sigma_{n,\delta}(a, \eta) = \sum_{k: k/n \notin [p(a)-\delta, p(a)+\delta]} C_n^k (p(a)^{(1-\eta)})^k \cdot \left(\sum_{b=(b_1, \dots, b_t) \neq a} p(b)^{1-\eta} \right)^{n-k}.$$

ЛЕММА. Для любых вещественных чисел $p, q > 0$, $p + q = 1$, существует постоянная $\delta_0(p, q)$ такая, что для каждого положительного $\delta < \delta_0(p, q)$ найдутся величины

$$w_\delta(p, q), \quad \varepsilon_\delta(p, q), \quad n_\delta(p, q)$$

такие, что при всех $n > n_\delta(p, q)$ выполнено

$$\sup_{x, y \in [0, w_\delta(p, q)]} \sigma_{n, \delta}(p, q; x, y) < \exp(-\varepsilon_\delta(p, q)n).$$

Доказательство леммы полностью аналогично соответствующему утверждению из [3]: надо заметить, что максимум функции $g(k) = C_n^k p_1^k q_1^{n-k}$ достигается при

$$\frac{k}{n} \sim \frac{p_1}{p_1 + q_1}$$

(и при переходе через этот максимум возрастание сменяется убыванием) и что

$$\sigma_{n, \delta}(p, q; x, y) \leq \left(\kappa_\delta^{(+)}(p, q; x, y) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right)^n + \left(\kappa_\delta^{(-)}(p, q; x, y) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right)^n,$$

где

$$\kappa_\delta^{(\pm)}(p, q; x, y) = \frac{p^{(1-x)(p \pm \delta)} q^{(1-y)(q \mp \delta)}}{(p \pm \delta)^{p \pm \delta} (q \mp \delta)^{q \mp \delta}}$$

— непрерывная в нуле функция переменных x, y и

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} \kappa_\delta^{(\pm)}(p, q; x, y) = 1 - \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) + O(\delta^3), \quad \delta \rightarrow 0.$$

СЛЕДСТВИЕ ЛЕММЫ. Пусть при некотором положительном η_0 ряд

$$\sum_{a=1}^{\infty} p_a^{1-\eta_0}$$

сходится. Тогда для любого набора $a = (a_1, \dots, a_t)$ найдется положительное $\delta(a)$ такое, что для каждого положительного $\delta < \delta(a)$ найдутся положительные

$$\eta(\delta, a), \quad \varepsilon(\delta, a), \quad n(\delta, a)$$

такие, что при всех $\eta \in [0, \eta(\delta, a)]$ и при всех $n > n_\delta(p, q)$ выполнено

$$\sigma_{n, \delta}(a, \eta) < \exp(-\varepsilon(\delta, a)n). \quad (22)$$

Для того чтобы получить сформулированное следствие, полагаем $p = p(a)$, $q = 1 - p(a)$ и используем, что функции $f(\eta) = p(a)^{1-\eta}$ и $g(\eta) = \sum_{b: b \neq a} (p(b))^{1-\eta}$ при η близких к нулю являются непрерывными; в частности, на некотором интервале $0 \leq \eta \leq \eta(\delta, a)$ имеем $g(0) = 1 - p(a) \leq g(\eta) \leq (1 - p(a))^{w_\delta(p, q)}$. Затем применяем лемму.

Если теперь рассмотреть характеристическую функцию χ_a элементарного цилиндра с фиксированными первыми знаками $a = (a_1, \dots, a_t)$, то при достаточно большом n будет иметь место $H_\varphi(A_n(\chi_a, \delta)) \ll \sigma_{n, \delta}(a, \eta)$. Теперь согласно (22) $H_\varphi(A_n(\chi_a, \delta)) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и теорема 5 вытекает из теоремы 1.

Теорема 5 доказана.

7. Замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теоремы 1, 1' носят общий характер.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теоремы 3–5 имеют дело с конкретными динамическими системами. Легко видеть, что теоремы 3 и 5 неуклучшаемы, т.е. ослабить условие на функцию ψ в этих теоремах нельзя (см. [3]). В теореме 4 вместо условия $\varphi(t) = O(te^{-\eta\sqrt{\log 1/t}})$, $t \rightarrow 0$, наверное, можно потребовать лишь условие $\varphi(t) = O(t^{1-\eta})$, $t \rightarrow 0$, но доказать это мы не можем.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теоремы 3, 4 доказаны нами с использованием сложных теорем о больших отклонениях [13]. Теорема 5 тоже может быть выведена из теоремы о больших отклонениях для сумм независимых случайных величин (см. [10, гл. 4, § 5]), однако по причине ее простоты мы привели элементарное доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Не вызывает сомнения, что подобного рода усиленный критерий Пятецкого-Шапира справедлив и в задаче о распределении дробных долей матричной показательной функции, рассматривавшейся в [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Изд-во “Факториал”, 1999.
- [2] Пятецкий-Шапиرو И. И. О законах распределения дробных долей показательной функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. С. 47–52.
- [3] Пятецкий-Шапиро И. И. О распределении дробных долей показательной функции // Ученые записки МГПИ. 1957. Т. 58. № 2. С. 317–322.
- [4] Постников А. Г. Арифметическое моделирование случайных процессов. Тр. МИАН. Т. 57. М.: Наука, 1960.
- [5] Постников А. Г. Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений. Тр. МИАН. Т. 82. М.: Наука, 1966.
- [6] Schmidt W. M. Badly approximable numbers and certain games // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 123. P. 178–199.
- [7] von Neumann J. Physical applications of the ergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. 1932. V. 18. P. 263–266.
- [8] Качуровский А. Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // УМН. 1996. Т. 51. № 4. С. 73–124.
- [9] Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.: Наука, 1978.
- [10] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
- [11] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
- [12] Романовский В. И. Дискретные цепи Маркова. М.: Гостехиздат, 1949.
- [13] Саулис Л., Статулявичус В. Предельные теоремы о больших отклонениях. Вильнюс: Мокслас, 1989.