Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Тараканов, Об одном применении леммы Гаусса при изучении псевдослучайных последовательностей, основанных на квадратичных вычетах, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 603–612

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm208>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 18:05:27

УДК 511.37

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ЛЕММЫ ГАУССА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, ОСНОВАННЫХ НА КВАДРАТИЧНЫХ ВЫЧЕТАХ

В. Е. Тараканов

В связи с изучением псевдослучайных последовательностей, использующих квадратичные вычеты по модулю простого числа p , рассматривается задача о конструктивном описании множества простых модулей, для которых заданные целые числа являются квадратичными вычетами. На основе леммы Гаусса устанавливается критерий комбинаторного характера для того, чтобы данное целое число a являлось квадратичным вычетом по модулю простого числа p . Показано, как этот критерий может быть применен к задаче об эффективном описании простых модулей p со свойством $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ для каждого p из заданного конечного множества M .

Библиография: 6 названий.

Квадратичные вычеты по модулю простого числа p или, вообще, числа с равным 1 значением символа Якоби по модулю нечетного числа m применяются в ряде современных способов построения псевдослучайных последовательностей (см. [1]–[4]). При изучении таких последовательностей возникает задача описания в явном виде множества всех нечетных чисел m , принадлежащих заданному множеству M , для которых каждое из целых чисел некоторой совокупности $\{a_1, \dots, a_l\}$ имеет значение символа Якоби, равное 1:

$$\left(\frac{a_i}{m}\right) = 1 \quad \text{для каждого } m \in M, i = 1, \dots, l.$$

Мы рассматриваем в работе один подход к решению этой задачи. Для этого получим вначале некоторый комбинаторный критерий того, что данное целое число $a > 0$ является квадратичным вычетом по модулю простого числа $p > a$, основанный на известной лемме Гаусса. Затем, основываясь на нем, мы укажем возможный способ конструктивного описания тех модулей m из M , которые являются простыми числами и удовлетворяют условию $\left(\frac{a}{m}\right) = 1, m \in M$, для данного целого $a, 0 < a < m$.

Используемые факты и понятия из теории чисел можно найти в книгах [5], [6]. Для нечетного целого m и целого числа a , взаимно простого с m , через $\left(\frac{a}{m}\right)$ обозначаем символ Якоби a по модулю m . Отправной точкой для последующего служит следующий классический результат.

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-15-96-136.

ЛЕММА ГАУССА. Пусть p – простое, a – целое число, $p \nmid a$. Тогда

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^n, \quad (1)$$

где n есть количество отрицательных вычетов среди абсолютно наименьших вычетов $(\bmod p)$ для кратных $1 \cdot p, 2 \cdot p, \dots, (p-1)/2 \cdot p$.

Выведем из условия, выражаемого формулой (1), критерий для квадратичных вычетов $(\bmod p)$, зависящий не от p , а от класса вычетов $(\bmod a)$, которому принадлежит p . Согласно теореме Дирихле о простых числах этот класс содержит бесконечно много простых чисел.

Введем предварительно несколько определений и сделаем несколько очевидных замечаний.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть m, a – два положительных целых числа, $t = \max\{k : k - \text{целое, } ka < m\}$. Соотношение

$$m = ta + n_1, \quad n_1 \leq a, \quad (2)$$

назовем *стандартным представлением m через a* .

Ясно, что

$$t = \begin{cases} \left\lfloor \frac{m}{a} \right\rfloor, & a \nmid m, \\ \frac{m}{a} - 1, & a \mid m. \end{cases}$$

Для нечетного целого m и целого a , $0 < a < m$, взаимно простого с m , часто будем рассматривать вместе с (1) также стандартное представление

$$\frac{m+1}{2} = sa + n_2, \quad n_2 \leq a, \quad (3)$$

$(m+1)/2$ через a .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть m – нечетное, a – целое число, $0 < a < m$, $\text{НОД}(m, a) = 1$, (2) и (3) – стандартные представления m и $(m+1)/2$ через a . Тогда

$$n_2 = \begin{cases} \frac{n_1 + 1}{2}, & \text{если } t \text{ четно,} \\ \frac{n_1 + 1 + a}{2}, & \text{если } t \text{ нечетно,} \end{cases} \quad (4)$$

$$s = \begin{cases} \frac{t}{2}, & \text{если } t \text{ четно,} \\ \frac{t-1}{2}, & \text{если } t \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (5)$$

Действительно, пусть t нечетно. Тогда $t = 2t_1 + 1$, $t_1 = (t-1)/2$ и $m+1 = 2at_1 + a + n_1 + 1$. Тем самым, $a + n_1 + 1$ четно и, очевидно,

$$\frac{m+1}{2} = at_1 + \frac{a + n_1 + 1}{2}$$

– стандартное представление. Аналогично рассуждаем при четном t .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть m, a – целые числа, m нечетно, $0 < a < m$, $\text{НОД}(m, a) = 1$. Тогда в (2), (3) имеем

$$\begin{aligned} n_2 &\leq n_1, & \text{если } t \text{ четно,} \\ n_1 &< n_2, & \text{если } t \text{ нечетно,} \end{aligned} \quad (6)$$

при этом $n_1 = n_2$ равносильно $n_1 = 1$, а $n_2 = a$ равносильно $n_1 = a - 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть m, a, b, k – целые числа, $0 < |b| < a \leq m$, $k \geq 1$. Назовем *арифметической прогрессией длины k по модулю m с начальным членом a и разностью b* последовательность

$$P_m^{(k)}(a, b) = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_k^*), \quad (7)$$

где $a_i^* \equiv a + (i - 1)b \pmod{m}$, $0 < a_i^* \leq m$, $i = 1, 2, \dots, k$. При этом монотонную последовательность $(c_{i_0}, c_{i_0+1}, \dots, c_{i_0+l-1})$ прогрессии (7) будем называть ее *полным отрезком*, если

$$\begin{aligned} c_{i_0} - b &\leq 0, & c_{i_0+l-1} < m \leq c_{i_0+l-1} + b & \quad \text{при } b > 0, \\ c_{i_0} - b &> m, & c_{i_0+l-1} > 0 \geq c_{i_0+l-1} + b & \quad \text{при } b < 0, \\ 1 &\leq i_0, l \leq k. \end{aligned}$$

Принимая это определение, можно следующим образом сформулировать лемму Гаусса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть p – простое, a – целое число, $p \nmid a$. Тогда

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^n,$$

где $n = |P_p^{((p-1)/2)}(a^*, |a|) \cap [(p+1)/2, p]|$, $|X|$ обозначает мощность множества X .

Если рассматриваем прогрессию (7), не фиксируя ее длины, то пишем просто $P_m(a, b)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть m – нечетное, a – целое число, $0 < a < m$, $\text{НОД}(m, a) = 1$, b – целое число, $0 < b \leq a$. Пусть, далее,

$$m = ta + n_1, \quad \frac{m+1}{2} = sa + n_2$$

– стандартные представления (1) и (2). Тогда

- 1) полный отрезок прогрессии $P_m(b, a)$ имеет длину t , если $b \geq n_1$, и длину $t + 1$, если $0 < b < n_1$;
- 2) полный отрезок прогрессии $P_{(m+1)/2}(b, a)$ имеет при четном t длину $t/2$, если $b \geq n_2$, и длину $t/2 + 1$, если $0 < b < n_2$; при нечетном t длину $(t - 1)/2$, если $b \geq n_2$, и длину $(t + 1)/2$, если $0 < b < n_2$.

Утверждения следуют из замечаний 1, 2.

Зафиксируем теперь нечетное простое число p . Для целого k обозначим $a^{(k)}$ наименьший неотрицательный вычет $(\text{mod } p)$ числа ka :

$$a^{(k)} \equiv ka \pmod{p}, \quad 0 \leq a^{(k)} < p.$$

Для целого числа a , $0 < a \leq p - 1$, рассмотрим последовательность $\Pi_a = P_p^{(p-1)}(a, a)$:

$$\Pi_a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(p-1)}). \quad (8)$$

Отметим ряд очевидных свойств прогрессии Π_a по модулю p .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Элементы Π_a образуют некоторую перестановку чисел $1, 2, \dots, p-1$.

Рассмотрим полные отрезки в последовательности Π_a . Пусть t, n_1 — числа из стандартного представления (1) для $m = p$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Прогрессия Π_a разбивается на подряд идущие полные отрезки $\pi_1, \pi_2, \dots$:

$$\Pi_a = ((\pi_1), (\pi_2), \dots) \quad (9)$$

длины t или $t+1$ каждый.

Утверждение следует из замечания 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Количество полных отрезков в (9) равно a . Начальные члены этих отрезков образуют арифметическую прогрессию $P_a^{(a)}(a, -n_1)$ по модулю a .

Утверждение справедливо ввиду $\text{НОД}(a, n_1) = 1$ и замечания 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В (9) имеется $n_1 - 1$ полных отрезков длины $t+1$ и $a - n_1 + 1$ полных отрезков длины t .

Утверждение следует из замечаний 3, 5 и 6.

Таким образом, прогрессии Π_a из (8) соответствует последовательность

$$\tilde{\Pi}_a = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_a), \quad (10)$$

где π_l есть полный отрезок в (9) длины t или $t+1$ с начальным членом a при $l = 1$ и

$$a_l \equiv a_{l-1} - i_l n_1 \pmod{a}, \quad 0 < a_l < a, \quad l = 2, 3, \dots, a,$$

где i_l — минимальное целое число со свойством

$$a_{l-1} - (i_l - 1)n_1 > 0 > a_{l-1} - i_l n_1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Длина полных отрезков π_1 и π_a в (10) равна t .

Действительно, $ta < p < (t+1)a$, поэтому длина π_1 равна t . Кроме того,

$$(p-f)a \equiv p-fa \pmod{p}, \quad f = 1, 2, \dots,$$

и из $0 < a < \dots < ta < p$ следует, что $0 < p-ta < \dots < p-a < p$, т.е. длина π_a равна также t .

Рассмотрим теперь первую половину последовательности Π_a из (8):

$$\Pi'_a = (a, a^{(2)}, \dots, a^{((p-1)/2)}). \quad (11)$$

ЛЕММА. При a четном Π'_a из (11) представляется как последовательность идущих подряд $a/2$ полных отрезков:

$$\Pi'_a = ((\pi_1), (\pi_2), \dots, (\pi_{a/2})). \quad (12)$$

При a нечетном Π'_a представляется в виде

$$\Pi'_a = ((\pi_1), (\pi_2), \dots, (\pi_{(a-1)/2}), (\tilde{\pi})), \quad (13)$$

где $\pi_1, \dots, \pi_{(a-1)/2}$ — полные отрезки, а $\tilde{\pi}$ — подпоследовательность Π'_a длины $t/2$ при четном t и $(t+1)/2$ при t нечетном; если $c \in \tilde{\pi}$, то $c \leq (p-1)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность (10). Пусть для некоторого целого b , $0 < b \leq a$, и некоторого l , $1 \leq l \leq a$, имеем

$$\pi_l = (b, b + a, \dots, b + (t' - 1)a),$$

где π_l — полный отрезок, т.е. $t' = t$ или $t + 1$ (см. замечание 5). Обозначим

$$-\pi_l = (p - (b + (t' - 1)a), p - (b + (t' - 2)a), \dots, (p - b)). \quad (14)$$

Тогда ввиду полноты π_l имеем

$$0 < p - (b + (t' - 1)a) \leq a,$$

и ввиду $b \leq a$

$$(p - b) + a \geq p.$$

Поэтому последовательность $-\pi_l$ из (14) есть полный отрезок, один из членов последовательности (10). Из определения Π_a (см (8)) ясно, что $a^{(p-1)} = p - a$. Поэтому, учитывая замечание 8, видим, что $\pi_a = -\pi_1$. Отсюда по индукции получаем, что

$$-\pi_l = \pi_{a-l+1}, \quad l = 1, 2, \dots, a. \quad (15)$$

Тем самым, при четном a (10) можно записать в виде

$$\tilde{\Pi}_a = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{a/2}, -\pi_{a/2}, -\pi_{a/2-1}, \dots, -\pi_1),$$

и мы приходим к представлению (12).

При a нечетном пусть $\pi_{(a+1)/2} = (c_1, c_2, \dots, c_{t'})$, $c_1 < c_2 < \dots < c_{t'}$. Из (15) получаем $-\pi_{(a+1)/2} = \pi_{(a+1)/2}$. Следовательно,

$$p - c_i = c_{t'-i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, t'.$$

Так как $2c \neq p$ ни для какого $c \in \pi_{(a+1)/2}$, t' должно быть четным, т.е. $t' = t$ при четном t , $t' = t + 1$ при t нечетном. Ясно также, что $c_i < (p - 1)/2$, если $i \leq t'/2$, так как в противном случае $c_{t'-i+1} = p - c_i < c_i$, что противоречит монотонности $\pi_{(a+1)/2}$. Таким образом,

$$\tilde{\Pi}_a = (\pi_1, \dots, \pi_{(a-1)/2}, \tilde{\pi}, -\tilde{\pi}, -\pi_{(a-1)/2}, \dots, -\pi_1),$$

где $\tilde{\pi} = (c_1, c_2, \dots, c_{t'/2})$, $t' = t$ при четном t и $t + 1$ при t нечетном и $c < (p - 1)/2$ для любого $c \in \tilde{\pi}$, т.е. приходим к (13). Лемма доказана.

Таким образом, прогрессии Π'_a из (11) соответствует последовательность

$$\tilde{\Pi}'_a = \begin{cases} (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{a/2}), & a \text{ четно,} \\ (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{(a-1)/2}, \tilde{\pi}), & a \text{ нечетно,} \end{cases} \quad (16)$$

составленная из полных отрезков, а также из половины $\tilde{\pi}$ полного отрезка $\pi_{(a+1)/2}$ (при нечетном a). Рассматривая для p, a , $0 < a < p$, стандартные представления p и $(p + 1)/2$ через a , определим отрезок натурального ряда I :

$$I = \begin{cases} [n_2, n_1 - 1], & \text{если } t \text{ четно, } n_1 > 1, \\ \emptyset, & \text{если } t \text{ четно, } n_1 = 1, \\ [n_1, n_2 - 1], & \text{если } t \text{ нечетно} \end{cases} \quad (17)$$

(см. замечание 2). Определим теперь число d как количество полных отрезков в (16) с начальными членами из I .

ТЕОРЕМА 1. Пусть p – нечетное простое, a – целое число, $0 < a < p$,

$$\begin{aligned} p &= ta + n_1, & n_1 < a, \\ \frac{p+1}{2} &= sa + n_2, & n_2 \leq a, \end{aligned}$$

– стандартные представления p и $(p+1)/2$ через a . Тогда

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} (-1)^{d+1}, & \text{если одновременно } a \equiv 2, 3 \pmod{4}, t \equiv 1, 2 \pmod{4}, \\ (-1)^d & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения

$$Z_p^{(1)} = \left\{0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}, \quad Z_p^{(2)} = \left\{\frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2}, \dots, p-1\right\}.$$

Согласно предложению 1 имеем

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^n,$$

где $n = |\Pi'_a \cap Z_p^{(2)}|$ (ясно, что при этом достаточно знать лишь четность n). Согласно лемме n членов Π'_a , определяющие значение символа Лежандра, распределяются только по $[a/2]$ полным отрезкам из (16), так как $\tilde{\pi} \subset Z_p^{(1)}$. Обозначаем

$$c = \left[\frac{a}{2}\right].$$

Через d_i обозначим число членов в полных отрезках π_i из (16), принадлежащих $Z_p^{(2)}$. Тогда

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum d_i} = \prod_{i=0}^c (-1)^{d_i}. \quad (18)$$

Ясно, однако, что к неединичному вкладу в (18) могут приводить лишь отрезки с нечетными значениями d_i . Найдем количество таких отрезков. Рассмотрим по отдельности два случая.

1) Пусть t четно. Тогда $n_2 = (n_1 + 1)/2$, $n_2 \leq n_1$ (замечания 1, 2), $I = [n_2, n_1 - 1]$ ($I = \emptyset \iff n_2 = n_1 = 1$). Разобьем отрезок $[1, a]$ на три части:

$$I_1 = [1, n_2 - 1], \quad I_2 = I = [n_2, n_1 - 1], \quad I_3 = [n_1, a]$$

(среди них могут быть пустые). Пусть π – полный отрезок из (16) с начальным членом b , $1 \leq b \leq a$. Имеются три возможности.

а) Пусть $b \in I_3$. Так как $b \geq n_1, n_2$, согласно замечанию 3 число членов в π равно t ; из них в точности $t/2$ принадлежат $Z_p^{(1)}$. Тем самым, число членов π , входящих в $Z_p^{(2)}$, равно $t/2$.

б) Пусть $b \in I$. Так как $n_2 \leq b < n_1$, согласно замечанию 3 π состоит из $t + 1$ элементов, из которых в точности $t/2$ принадлежат $Z_p^{(1)}$. Тем самым, число членов π , входящих в $Z_p^{(2)}$, равно $t/2 + 1$.

в) Пусть $b \in I_1$. Так как $b < n_1, n_2$, согласно замечанию 3 π состоит из $t + 1$ элементов, среди которых в точности $t/2 + 1$ принадлежат $Z_p^{(1)}$. Тем самым, число членов π , входящих в $Z_p^{(2)}$, равно $t/2$.

Таким образом, при $t \equiv 0 \pmod{4}$ неединичные вклады в (18) могут дать только отрезки из (16) с начальными членами из I , а при $t \equiv 2 \pmod{4}$ – лишь отрезки с начальными членами из I_1 или I_3 . Итак, если t четно, то

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} (-1)^d, & t \equiv 0 \pmod{4}, \\ (-1)^{c-d}, & t \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases} \quad (19)$$

2) Пусть t нечетно. Тогда $n_2 = (n_1 + 1 + a)/2, n_1 < n_2$ (замечания 1, 2), $I = [n_1, n_2 - 1]$. Вновь рассмотрим разбиение $[1, a] = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, где теперь

$$I_1 = [1, n_1 - 1], \quad I_2 = I = [n_1, n_2 - 1], \quad I_3 = [n_2, a].$$

Пусть π – полный отрезок из (16).

а) Пусть $b \in I_3$. Тогда π состоит из t членов, из которых в точности $(t - 1)/2$ входят в $Z_p^{(1)}$. Следовательно, в $Z_p^{(2)}$ входят $(t + 1)/2$ элементов π .

б) Пусть $b \in I$. Тогда π состоит из t членов, из которых в $Z_p^{(1)}$ входят $(t + 1)/2$. Следовательно, в $Z_p^{(2)}$ входят $(t - 1)/2$ элементов π .

в) Пусть $b \in I_1$. Тогда π состоит из $t + 1$ членов, из которых $(t + 1)/2$ входят в $Z_p^{(1)}$. Следовательно, в $Z_p^{(2)}$ входят $(t + 1)/2$ элементов.

Поэтому при $t \equiv 3 \pmod{4}$ неединичный вклад в (18) могут внести лишь отрезки с $b \in I_2 = I$, а при $t \equiv 1 \pmod{4}$ – лишь отрезки с $b \in I_1 \cup I_3$.

Итак, если t нечетно, то

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} (-1)^d, & t \equiv 3 \pmod{4}, \\ (-1)^{c-d}, & t \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases} \quad (20)$$

Из (19) и (20) получаем

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} (-1)^d, & t \equiv 0, 3 \pmod{4}, \\ (-1)^{c-d}, & t \equiv 1, 2 \pmod{4}. \end{cases} \quad (21)$$

Если c четно, т.е. $a \equiv 0, 1 \pmod{4}$, то $c - d \equiv d \pmod{2}$, а если c нечетно, т.е. $a \equiv 2, 3 \pmod{4}$, то $c - d \equiv d + 1 \pmod{2}$. Поэтому из (21) получаем

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} (-1)^{d+1}, & \text{если одновременно } a \equiv 2, 3 \pmod{4} \text{ и } t \equiv 1, 2 \pmod{4}, \\ (-1)^d & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (22)$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Обозначим*

$$d^{(1)} = |P_a^{([a/2])}(a, -n_1) \cap I|,$$

где I – отрезок из (17). Тогда

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} (-1)^{d^{(1)}+1}, & \text{если одновременно } a \equiv 2, 3 \pmod{4} \text{ и } t \equiv 1, 2 \pmod{4}, \\ (-1)^{d^{(1)}} & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (23)$$

Утверждение получается с использованием леммы.

Отметим, что доказанная теорема представляет собой некоторую комбинаторную интерпретацию леммы Гаусса. Следствие из нее позволяет предположить, что формулы (22), (23) могут быть развернуты в рекуррентную процедуру для быстрого вычисления символа Якоби, параллельную известной процедуре вычисления, основанной на квадратичном законе взаимности (см. [6, гл. II]); обе они напоминают известный алгоритм Евклида. Заметим, что доказательство теоремы 1 не использует закона взаимности и носит чисто комбинаторный характер. Фактическое вычисление символа Лежандра с использованием формулы (23), очевидно, не медленнее обычной процедуры.

Применим теперь теорему 1 к описанию в явном виде множества всех простых чисел p , принадлежащих некоторому заданному конечному множеству, при условии $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ для некоторого целого числа a .

Введем дополнительно несколько обозначений. Определим функцию π на целых числах z :

$$\pi(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \text{ четно,} \\ 1, & \text{если } z \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (24)$$

Тогда в стандартном представлении нечетного простого p через целое a , $0 < a < p$, имеем

$$\begin{aligned} \pi(t) + \pi(n_1) &= 1, & \text{если } a \text{ нечетно,} \\ \pi(n_1) &= 1, & \text{если } a \text{ четно.} \end{aligned} \quad (25)$$

Через Z_a^* обозначаем множество всех целых чисел, меньших натурального числа a и взаимно простых с ним, $|Z_a^*| = \varphi(a)$, φ – функция Эйлера.

Так как мы хотим рассматривать условие $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, можно было бы предположить, что a свободно от квадратов. Однако на практике установление этого свойства для достаточно больших a требует немалого времени. Поэтому с целью наибольшей эффективности предлагаемого способа описания простых чисел p с $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ мы предлагаем далее лишь выполнение свойства $4 \nmid a$. Обозначим

$$\tilde{a} = \begin{cases} 2a, & a \equiv 1 \pmod{4}, \\ 4a, & a \equiv 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Через $P_r(a)$ для $r \in Z_a^*$ обозначаем множество (бесконечное) всех простых чисел p , у которых в представлении (2) через $\tilde{a}$ имеем $n_1 = r$, т.е. $p \equiv r \pmod{\tilde{a}}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть p – простое, a – целое число, $4 \nmid a$, $0 < a < p$. Тогда условие

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 1$$

равносильно свойству

$$p \in \bigcup_{r \in R(a)} P_r(a), \quad (26)$$

где $R(a) \subset Z_a^*$ и описывается следующим образом:

1) если $a \equiv 1 \pmod{4}$, то

$$R(a) = \left\{ a(1 - \pi(n_1)) + n_1 : n_1 \in Z_a^*, \left(\frac{n_1}{a}\right) = 1 \right\}, \quad |R(a)| = \frac{1}{2}\varphi(a);$$

2) если $a \equiv 3 \pmod{4}$, то

$$R(a) = \{a\delta(n_1, d) + n_1 : n_1 \in Z_a^*\}, \quad |R(a)| = \varphi(a),$$

$$\delta(n_1, d) = \begin{cases} 0, & \text{если } \pi(n_1) = 1, \pi(d) = 0, \\ 1, & \text{если } \pi(n_1) = 0, \pi(d) = 1, \\ 2, & \text{если } \pi(n_1) = 1, \pi(d) = 1, \\ 3, & \text{если } \pi(n_1) = 0, \pi(d) = 0; \end{cases}$$

3) если $a \equiv 2 \pmod{4}$, то

$$R(a) = R_0(a) \cup R_1(a), \quad |R(a)| = 2\varphi(a),$$

$$R_0(a) = \{a\delta(t, d) + n_1 : n_1 \in Z_a^*, \pi(t) = 0\},$$

$$R_1(a) = \{a\delta(t, d) + n_1 : n_1 \in Z_a^*, \pi(t) = 1\},$$

где

$$\delta(t, d) = \begin{cases} 0, & \text{если } \pi(t) = 0, \pi(d) = 0, \\ 1, & \text{если } \pi(t) = 1, \pi(d) = 1, \\ 2, & \text{если } \pi(t) = 0, \pi(d) = 1, \\ 3, & \text{если } \pi(t) = 1, \pi(d) = 0; \end{cases}$$

здесь π – функция четности из (24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предполагаем вначале, что $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, и покажем, что тогда для p выполнено (26). Рассматриваем стандартное представление $p = at + n_1$, $n_1 < a$. Докажем утверждение для a из пункта 2). Итак, пусть $a \equiv 3 \pmod{4}$. Тогда $\tilde{a} = 4a$.

а) Пусть сначала n_1 – какое-либо нечетное число в Z_a^* . Тогда t четно (см. (25)). Находим n_2 , отрезок I и число d . Покажем, что $\pi(d) = 0$ равносильно $t \equiv 0 \pmod{4}$. Действительно, пусть $\pi(d) = 0$, и предположим от противного, что $t \equiv 2 \pmod{4}$.

Тогда согласно теореме 1

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{d+1} = -1,$$

что противоречит предположению. Непосредственно по теореме 1 получаем и обратное утверждение: если $t \equiv 0 \pmod{4}$, то $\pi(d) = 0$. Полагаем $t = 4t_1$. Тогда $p = 4at_1 + n_1$, т.е. в рассматриваемом случае

$$\delta(n_1, d) = 0, \quad r \in R(a) = \{0 \cdot a + n_1, n_1 \in Z_a^* - \text{нечетное число}\}.$$

Аналогично доказывается, что $\pi(d) = 1 \iff t \equiv 2 \pmod{4}$, или $t = 4t_1 + 2$. Отсюда получаем

$$\delta(n_1, d) = 2, \quad r \in R(a) = \{2a + n_1, n_1 \in Z_a^* - \text{нечетное число}\}.$$

б) Пусть теперь n_1 – какое-либо четное число в Z_a^* . Аналогично предыдущему, используя теорему 1, находим, что $\pi(d) = 0 \iff t \equiv 3 \pmod{4}$, а $\pi(d) = 1 \iff t \equiv 1 \pmod{4}$. Отсюда в первом случае получаем, что

$$\delta(n_1, d) = 3, \quad r \in R(a) = \{3a + n_1, n_1 \in Z_a^* - \text{четное число}\},$$

а во втором

$$\delta(n_1, d) = 1, \quad r \in R(a) = \{a + n_1, n_1 \in Z_a^* - \text{четное число}\}.$$

Таким образом, мы показали, что при $a \equiv 3 \pmod{4}$ из $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ следует, что для p выполнено условие (26). Для $a \equiv 1$ и $a \equiv 2 \pmod{4}$ тот же факт устанавливается совершенно аналогично.

Непосредственной проверкой по формуле из теоремы 1 получаем также обратное утверждение: если для простого числа p выполнено условие (26), то $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$. Теорема доказана.

Теорему 2 удобно применять для эффективного нахождения всех простых модулей p , принадлежащих некоторому заданному конечному множеству M , при условии, что данная конечная последовательность целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_l$ имеет свойства

$$\left(\frac{a_i}{p}\right) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

для каждого $p \in M$.

Отметим в заключение, что полученные результаты, по-видимому, обобщаются на случай произвольного нечетного b и символа Якоби $\left(\frac{a}{p}\right)$; a взаимно просто с b .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коблиц Н. Курс теории чисел и криптографии. М.: ТВП, 2001.
- [2] Brands S. A., Gill R. D. Cryptography, statistics, and pseudorandomness. I // Probab. Math. Statist. 1995. V. 15. P. 101–114.
- [3] Brands S. A., Gill R. D. Cryptography, statistics, and pseudorandomness. II // Probab. Math. Statist. 1995. V. 16. P. 1–17.
- [4] Anchel M., Goldfeld D. Zeta functions, one-way functions, and pseudorandom number generators // Duke Math. J. 1997. V. 88. P. 371–390.
- [5] Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1964.
- [6] Хассе Г. Лекции по теории чисел. М.: ИЛ, 1953.