Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Уланский, Тождества для обобщенных полилогарифмов, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 613–624

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm209>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:58:35

УДК 517.5

ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИЛОГАРИФМОВ

Е. А. Уланский

Изучается поведение обобщенного полилогарифма под действием группы дробно-линейных преобразований аргумента, образованной преобразованиями $z \mapsto 1 - z$ и $z \mapsto -z/(1 - z)$, что позволяет получать тождества вида

$$\text{Li}_k\left(\frac{-z}{1-z}\right) = - \sum_{|\bar{s}|=k} \text{Li}_{\bar{s}}(z).$$

Как следствие этих тождеств доказывается линейная независимость обобщенных полилогарифмов и алгебраическая независимость классических полилогарифмов над полем $\mathbb{C}(z)$.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Пусть $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ – набор с $s_j \in \mathbb{N}$. Будем называть величины $|\bar{s}| = s_1 + s_2 + \dots + s_k$ и $l(\bar{s}) = k$ *весом* и *длиной* набора $\bar{s}$ соответственно.

Рассмотрим ряд

$$\text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_k)}(z) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_k^{s_k}}, \quad (1)$$

который сходится в области $|z| < 1$ и называется *обобщенным полилогарифмом*. Функции, определяемые такими рядами, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{Li}_{(s_1, s_2, \dots, s_n)}(z) &= \frac{1}{z} \text{Li}_{(s_1-1, s_2, \dots, s_n)}(z), \quad \text{если } s_1 > 1, \\ \frac{d}{dz} \text{Li}_{(1, s_2, \dots, s_n)}(z) &= \frac{1}{1-z} \text{Li}_{(s_2, \dots, s_n)}(z) \quad \text{иначе.} \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_k) \in \mathbb{C}^k$ и $\text{Re } s_j > 0$. Ряд

$$\zeta(\bar{s}) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_k^{s_k}}$$

называется *кратной дзета-функцией*. Он сходится при $\text{Re } s_1 > 1$. В случае, когда $k = 1$, мы получаем классическую дзета-функцию Римана. Если же $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathbb{N}$, $s_1 \geq 2$, то имеет место равенство $\zeta(\bar{s}) = \text{Li}_{\bar{s}}(1)$.

Иногда удобнее использовать в качестве индексов полилогарифмов не наборы натуральных чисел, а слова алфавита, состоящего из двух букв $\{x_0, x_1\}$. Пусть X^* есть множество всех слов, состоящих из букв x_0 и x_1 , содержащее в том числе и пустое слово. Для любого слова w множества X^* определен вес $|w|$, который равен количеству всех букв в этом слове, и длина $l(w)$, равная количеству букв x_1 , встречающихся в этом слове. В частности, если $|w| = l(w) = k$, то $w = x_1^k$. Для пустого слова полагается $|\emptyset| = l(\emptyset) = 0$.

Любому натуральному набору $\bar{s} = (s_1, \dots, s_k)$ сопоставим слово

$$w = x_0^{s_1-1} x_1 x_0^{s_2-1} x_1 \dots x_0^{s_k-1} x_1. \quad (3)$$

Таким образом, каждому полилогарифму вида (1) поставлено в соответствие некоторое слово из $X^* x_1$, причем понятия длины и веса согласованы. При этом каждому слову из $X^* x_1$ соответствует некоторый полилогарифм, так как оно единственным образом представляется в виде (3). Аналогично, для любого слова $w \in x_0 X^* x_1$ определяется кратная дзета-функция $\zeta(w)$.

Обобщенный полилогарифм можно определить для произвольного слова w из X^* следующим образом. Положим $\text{Li}_\emptyset(z) = 1$ и

$$\text{Li}_w(z) = \begin{cases} \frac{\ln^j z}{j!}, & \text{если } w = x_0^j, \quad j \geq 1, \\ \int_0^z \omega_i(t) \text{Li}_u(t) dt, & \text{если } w = x_i u \text{ содержит букву } x_1, \\ \omega_0(z) = \frac{1}{z}, \quad \omega_1(z) = \frac{1}{1-z}. \end{cases}$$

Из этого определения легко вывести следующую формулу для обобщенного полилогарифма.

Для любого целого неотрицательного числа k определим множество слов X_k , полагая $X_0 = \{\emptyset\}$ и $X_k = \{w \in X^* x_1 : l(w) = k\}$ при $k \geq 1$. Далее, произвольное слово w из X^* запишем в виде

$$w = x_1^{s_1} x_0^{i_1} x_1^{s_2+1} x_0^{i_2} \dots x_1^{s_{q-1}+1} x_0^{i_{q-1}} x_1^{s_q+1} x_0^{i_q}, \quad (4)$$

где $q \geq 1$, $s_1 \geq 0, \dots, s_q \geq 0$, $i_1 \geq 1, \dots, i_{q-1} \geq 1$, $i_q \geq 0$. Обозначим через C_m^n биномиальные коэффициенты:

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! n!}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. В приведенных обозначениях имеет место разложение

$$\begin{aligned} \text{Li}_w(z) = & \sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_q \leq i_q} C_{i_1+j_1}^{j_1} \dots C_{i_{q-1}+j_{q-1}}^{j_{q-1}} \\ & \times \sum_{\substack{|p_1| + \dots + |p_q| = s_1 + \dots + s_q + i_q - j_1 - \dots - j_q \\ p_1 \in X_{s_1}, \dots, p_q \in X_{s_q}}} (-1)^{i_q - j_q} \frac{\ln^{j_q}(z)}{j_q!} \\ & \times \text{Li}_{p_1 x_0^{i_1+j_1} x_1 \dots p_{q-1} x_0^{i_{q-1}+j_{q-1}} x_1 p_q}(z). \end{aligned} \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно заметить, что в этой формуле использованы только обобщенные полилогарифмы, отвечающие либо пустому слову, либо словам из X^*x_1 , которые были определены выше. Более того, имеют место следующие свойства:

- 1) если в правой части (5) присутствует слагаемое вида $\ln^j z \operatorname{Li}_v(z)$, то $|v| = |w| - j$;
- 2) если $w = vx_1x_0^k$, то в правую часть (5) функция $\ln z$ входит в степени не выше k ;
- 3) если w начинается с x_0 , то существует число $\operatorname{Li}_w(1)$, а в случае, когда w содержит букву x_1 , имеет место равенство $\operatorname{Li}_w(0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверяется формула (5) с помощью следующих равенств:

$$\int \frac{\ln^m(z)}{m!} \frac{1}{1-z} \operatorname{Li}_w(z) dz = \sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{\ln^{m-i}(z)}{(m-i)!} \operatorname{Li}_{x_0^i x_1 w}(z) + C, \quad w \in X^*x_1 \cup \emptyset,$$

$$\int \frac{\ln^m(z)}{m!} \frac{1}{z} \operatorname{Li}_w(z) dz = \sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{\ln^{m-i}(z)}{(m-i)!} \operatorname{Li}_{x_0^{i+1} w}(z) + C, \quad w \in X^*x_1;$$

здесь m – целое неотрицательное число. Кроме того,

$$\sum_{i=0}^k C_{s+i}^i = C_{s+1+k}^k, \quad s \geq 0, \quad k \geq 0,$$

и

$$\{w : |w| = s+1+k, w \in X_{s+1}\} = \bigcup_{i=0}^k \{x_0^i x_1 v : |v| = s+k-i, v \in X_s\}, \quad s \geq 0, \quad k \geq 0,$$

где объединяемые множества попарно не пересекаются. Это завершает проверку разложения (5).

Из определения следует, что обобщенные полилогарифмы удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Li}_{x_0 w}(z) = \frac{1}{z} \operatorname{Li}_w(z), \quad \frac{d}{dz} \operatorname{Li}_{x_1 w}(z) = \frac{1}{1-z} \operatorname{Li}_w(z) \quad (6)$$

для любого слова $w \in X^*$. При этом для слов из X^*x_1 система (6) согласована с системой (2).

В статье [1] изучается поведение функций $\operatorname{Li}_{(s_1, \dots, s_k)}(z)$ под действием группы дробно-линейных преобразований

$$z, \quad 1-z, \quad \frac{-z}{1-z}, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{1-z}, \quad \frac{z-1}{z}.$$

Метод, предложенный в [1], эффективен и позволил при помощи ЭВМ и системы формальных вычислений АХИОМ выразить в некоторых случаях при $k \leq 3$ и $s_1 + \dots + s_k \leq 4$ значения обобщенных полилогарифмов в точках $1-z$, $1/z$, $(z-1)/z$ через значения таких же функций в точке z , а также в терминах $\ln z$ и чисел π , $\zeta(m)$.

В настоящей работе, выбирая в качестве образующих группы преобразования $-z/(1-z)$ и $1-z$, мы предлагаем явные формулы в общем случае.

ТЕОРЕМА 1. Для любых целых неотрицательных чисел $s_1, \dots, s_n$ и комплексного числа z с условиями $|z| < 1$, $|z/(1-z)| < 1$ выполняется равенство

$$\text{Li}_{x_0^{s_1} x_1 \dots x_0^{s_n} x_1} \left(\frac{-z}{1-z} \right) = (-1)^n \sum_{|p_1|=s_1, \dots, |p_n|=s_n} \text{Li}_{p_1 x_1 \dots p_n x_1}(z).$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $n = 1$ и $s_1 = k - 1$. Тогда

$$\text{Li}_{x_0^{k-1} x_1} \left(\frac{-z}{1-z} \right) = - \sum_{|p|=k-1} \text{Li}_{p x_1}(z).$$

Полученное равенство эквивалентно тождеству, помещенному в аннотации.

Зададим на множестве слов X^* отображение σ , которое меняет буквы x_0 и x_1 между собой. Например, $\sigma(\emptyset) = \emptyset$, а $\sigma(x_0^3 x_1) = x_1^3 x_0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть имеется слово w из X^* и комплексное число z с условиями $|z| < 1$, $|1-z| < 1$. Тогда

$$\text{Li}_w(1-z) = \sum_{uv=w} (-1)^{|u|} D_v \text{Li}_{\sigma(u)}(z),$$

где действительные постоянные D_v определяются следующими правилами:
 $D_\emptyset = 1$; $D_v = \text{Li}_v(1)$, если v начинается с x_0 , и

$$D_v = - \sum_{\substack{pt=v \\ |p|>0}} (-1)^{|p|} D_t \text{Li}_{\sigma(p)}(1),$$

если v начинается с x_1 .

В п. 4 и п. 5 данной статьи с помощью теоремы 2 доказывается линейная независимость обобщенных полилогарифмов вида (1) и алгебраическая независимость классических полилогарифмов над полем $\mathbb{C}(z)$.

2. Доказательства теорем 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Согласно (6) для всех $w \in X^* x_1$ имеет место система

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_{x_0 w} \left(\frac{-z}{1-z} \right) = \frac{1}{z(1-z)} \text{Li}_w \left(\frac{-z}{1-z} \right), \quad \frac{d}{dz} \text{Li}_{x_1 w} \left(\frac{-z}{1-z} \right) = \frac{-1}{1-z} \text{Li}_w \left(\frac{-z}{1-z} \right). \quad (7)$$

Теперь заметим, что для любого слова $w \in X^* x_1$ выполнено $\text{Li}_w(0) = 0$ и

$$\frac{d}{dz} (\text{Li}_{x_0 w}(z) + \text{Li}_{x_1 w}(z)) = \frac{1}{z(1-z)} \text{Li}_w(z).$$

Поэтому если $f(0) = 0$ и $f'(z) = \text{Li}_w(z)/(z(1-z))$, то

$$f(z) = \text{Li}_{x_0 w}(z) + \text{Li}_{x_1 w}(z). \quad (8)$$

Если же $f(0) = 0$ и $f'(z) = \text{Li}_w(z)/(1-z)$, то

$$f(z) = \text{Li}_{x_1 w}(z). \quad (9)$$

Положим $w = x_0^{s_1} x_1 \dots x_0^{s_n} x_1$ и докажем утверждение теоремы индукцией по $|w|$. При $|w| = 1$ имеется единственное слово $w = x_1$, поэтому необходимо проверить равенство

$$\text{Li}_{x_1} \left(\frac{-z}{1-z} \right) = -\text{Li}_{x_1}(z).$$

Но из определения следует, что

$$\text{Li}_{x_1}(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z);$$

отсюда

$$\text{Li}_{x_1} \left(\frac{-z}{1-z} \right) = -\ln \left(1 + \frac{z}{1-z} \right) = -\ln \frac{1}{1-z} = \ln(1-z) = -\text{Li}_{x_1}(z).$$

Пусть, далее, $|w| \geq 1$ и для w теорема уже доказана. Требуется установить, что теорема верна для слов $x_0 w$ и $x_1 w$. Для слова $x_0 w$ согласно (7) получаем

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_{x_0 w} \left(\frac{-z}{1-z} \right) = \frac{1}{z(1-z)} \text{Li}_w \left(\frac{-z}{1-z} \right) = \frac{(-1)^n}{z(1-z)} \sum_{|p_1|=s_1, \dots, |p_n|=s_n} \text{Li}_{p_1 x_1 \dots p_n x_1}(z).$$

Применяя (8), находим

$$\begin{aligned} \text{Li}_{x_0 w} \left(\frac{-z}{1-z} \right) &= (-1)^n \sum_{|p_1|=s_1, \dots, |p_n|=s_n} (\text{Li}_{x_0 p_1 x_1 \dots p_n x_1}(z) + \text{Li}_{x_1 p_1 x_1 \dots p_n x_1}(z)) \\ &= (-1)^n \sum_{|p_1|=s_1+1, \dots, |p_n|=s_n} \text{Li}_{p_1 x_1 \dots p_n x_1}(z). \end{aligned}$$

Для слова $x_1 w$ согласно (7)

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_{x_1 w} \left(\frac{-z}{1-z} \right) = \frac{-1}{1-z} \text{Li}_w \left(\frac{-z}{1-z} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{1-z} \sum_{|p_1|=s_1, \dots, |p_n|=s_n} \text{Li}_{p_1 x_1 \dots p_n x_1}(z),$$

а использование правила (9) дает

$$\text{Li}_{x_1 w} \left(\frac{-z}{1-z} \right) = (-1)^{n+1} \sum_{|p_1|=s_1, \dots, |p_n|=s_n} \text{Li}_{p_1 p_1 x_1 \dots p_n x_1}(z),$$

что в точности совпадает с утверждением теоремы.

Теорема 1 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из (6) получаем, что для любого слова $w \in X^*$ верно

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_{x_0 w}(1-z) = \frac{-1}{1-z} \text{Li}_w(1-z), \quad \frac{d}{dz} \text{Li}_{x_1 w}(1-z) = \frac{-1}{z} \text{Li}_w(1-z). \quad (10)$$

Проведем доказательство теоремы индукцией по $|w|$. При $|w| = 0$ имеется только пустое слово и требуется проверить очевидное тождество $\text{Li}_\emptyset(1-z) = \text{Li}_\emptyset(z)$.

Пусть $|w| \geq 0$ и для слова w теорема верна. Докажем, что теорема также справедлива для слов $x_0 w$ и $x_1 w$. Мы рассмотрим только второй из этих случаев; первый рассматривается аналогично. Пользуясь (10) и индукционным предположением, получаем

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_{x_1 w}(1-z) = \frac{-1}{z} \text{Li}_w(1-z) = \frac{1}{z} \sum_{uv=w} (-1)^{|u|+1} D_v \text{Li}_{\sigma(u)}(z).$$

Благодаря (6), находим

$$\text{Li}_{x_1 w}(1-z) = \sum_{uv=w} (-1)^{|u|+1} D_v \text{Li}_{x_0 \sigma(u)}(z) + C.$$

Обозначим полученную константу интегрирования через $D_{x_1 w}$; тогда

$$\text{Li}_{x_1 w}(1-z) = \sum_{uv=x_1 w} (-1)^{|u|} D_v \text{Li}_{\sigma(u)}(z).$$

Найдем константу $D_{x_1 w}$, положив $z = 1$. Получим

$$D_{x_1 w} = - \sum_{\substack{uv=x_1 w \\ |u|>0}} (-1)^{|u|} D_v \text{Li}_{\sigma(u)}(1),$$

что и требовалось.

При доказательстве теоремы для слова $x_0 w$ константа интегрирования находится подстановкой $z = 0$.

Теорема 2 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть v – пустое слово или произвольное из $X^* x_1$. Тогда в разложении (5) функции $\text{Li}_{v x_0^j}(z)$ при $\ln^j(z)$ имеется единственное слагаемое

$$\frac{1}{j!} \text{Li}_v(z).$$

В соответствии с этим из теоремы 2 заключаем, что в выражении для $\text{Li}_{\sigma(v)x_1^j}(1-z)$ при $\ln^j(z)$ присутствуют следующие слагаемые:

$$\frac{(-1)^{|v|+j}}{j!} \text{Li}_v(z) + \sum_{|u|<|v|} C_u \text{Li}_u(z),$$

где C_u – некоторые действительные константы.

Если в условии теоремы 2 взять слово вида (4) с $s_1 = 0$ или 1, $s_2 = \dots = s_q = 0$ и $i_1 = \dots = i_{q-1} = 1, i_q = 0$, то получим

СЛЕДСТВИЕ. Для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \text{Li}_{\{2\}_n}(1-z) &= \sum_{k=1}^n \gamma_{n-k} \cdot \left(\ln z \text{Li}_{(1, \{2\}_{k-1})}(z) - \text{Li}_{\{2\}_k}(z) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{\substack{|\bar{s}|=k \\ l(\bar{s})=k-1}} \text{Li}_{(1, s_1+1, \dots, s_{k-1}+1)}(z) \right) \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \cdot \text{Li}_{(1, \{2\}_{n-1-k})}(z) + \gamma_n, \\ \text{Li}_{(1, \{2\}_n)}(1-z) &= \sum_{k=0}^n \gamma_{n-k} \cdot \left(-\ln z \text{Li}_{\{2\}_k}(z) + 2 \sum_{\substack{|\bar{s}|=k+1 \\ l(\bar{s})=k}} \text{Li}_{(s_1+1, \dots, s_k+1)}(z) \right) \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot \text{Li}_{\{2\}_{n-k}}(z), \end{aligned}$$

где $\gamma_k = \zeta(\{2\}_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и

$$\beta_k = \sum_{\substack{|\bar{s}|=k+1 \\ l(\bar{s})=k}} \zeta(s_1+1, \dots, s_k+1), \quad k = 1, 2, \dots$$

(Здесь было использовано определение обобщенного полилогарифма (1) и обозначение

$$\{t\}_k = (\underbrace{t, \dots, t}_{k \text{ раз}})$$

при $k = 1, 2, \dots$ и $\{t\}_0 = \emptyset$.)

Этот результат уточняет лемму 13 из статьи [2].

3. Некоторые замечания. Иногда вместо $\text{Li}_{(s_1, \dots, s_k)}(z)$ удобнее рассматривать функции, которые мы обозначим

$$\text{Le}_{(s_1, \dots, s_k)}(z) = \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_k^{s_k}}.$$

Будем называть такой ряд *нестрогим обобщенным полилогарифмом*.

Нет необходимости отдельно для таких рядов доказывать теоремы 1 и 2, поскольку справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеет место равенство*

$$\text{Le}_{(s_1, \dots, s_k)}(z) = \sum_{\bar{p}} \text{Li}_{\bar{p}}(z),$$

где $\bar{p}$ пробегает все наборы вида $(s_1 * s_2 * \dots * s_k)$. Здесь ‘*’ может быть либо знаком ‘+’, либо знаком ‘,’; всего таких наборов 2^{k-1} .

В несколько других терминах для случая $z = 1$ это утверждение было сформулировано в статье [3]. Для доказательства достаточно установить, что верна

ЛЕММА 1. В обозначениях предложения 2 выполняется следующее равенство:

$$\sum_{n_1 > \dots > n_l \geq n_{l+1} \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k}} = \sum_{\bar{p}=(s_1, \dots, s_l * s_{l+1} * \dots * s_k)} \text{Li}_{\bar{p}}(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $k = l(\bar{s})$. При $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть $k > 1$ и для $k - 1$ лемма верна.

Проведем нисходящую индукцию по l . При $l = k$ утверждение выполняется тривиально. Допустим, что $1 \leq l < k$ и для $l + 1$ лемма верна. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1 > \dots > n_l \geq n_{l+1} \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k}} \\ &= \sum_{n_1 > \dots > n_{l+1} \geq n_{l+2} \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k}} \\ &+ \sum_{n_1 > \dots > n_l \geq n_{l+2} \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_{l-1}^{s_{l-1}} \cdot n_l^{s_l + s_{l+1}} \cdot n_{l+2}^{s_{l+2}} \dots n_k^{s_k}} \\ &= \sum_{\bar{p}=(s_1, \dots, s_l, s_{l+1} * s_{l+2} * \dots * s_k)} \text{Li}_{\bar{p}}(z) + \sum_{\bar{p}=(s_1, \dots, s_l + s_{l+1} * s_{l+2} * \dots * s_k)} \text{Li}_{\bar{p}}(z) \\ &= \sum_{\bar{p}=(s_1, \dots, s_l * s_{l+1} * \dots * s_k)} \text{Li}_{\bar{p}}(z). \end{aligned}$$

Здесь мы дважды воспользовались предположением индукции и определением операции ‘*’. Шаг индукции по l и k совершен. Лемма доказана.

Обратную связь между строгими и нестрогими полилогарифмами устанавливает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Имеет место равенство

$$\text{Li}_{(s_1, \dots, s_k)}(z) = \sum_{\bar{p}} (-1)^{\alpha(\bar{p})} \text{Le}_{\bar{p}}(z),$$

где $\bar{p}$ пробегает все наборы вида $(s_1 * s_2 * \dots * s_k)$. Здесь, как и ранее, ‘*’ может быть либо знаком ‘+’, либо знаком ‘,’; степень $\alpha(\bar{p})$ равна количеству знаков ‘+’ в наборе $\bar{p}$.

Доказывается предложение 3 аналогично предложению 2.

4. Линейная независимость. Линейная независимость обобщенных полилогарифмов над полем комплексных чисел была доказана в [4], [5]. Мы покажем, что это есть простое следствие теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Обобщенные полилогарифмы, отвечающие различным словам из X^*x_1 и пустому слову, линейно независимы над полем $\mathbb{C}(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить, что для любого целого неотрицательного числа m функции $\text{Li}_w(z)$, $w \in X^*x_1 \cup \{\emptyset\}$, $|w| \leq m$, линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Проведем индукцию по m . При $m = 0$ имеем $\text{Li}_\emptyset(z) = 1$ и утверждение очевидно.

Пусть $m > 0$ и для $m - 1$ утверждение верно. Допустим в области $|z| < 1$

$$\sum_{w \in X^*x_1 \cup \{\emptyset\}, |w| \leq m} \lambda_w(z) \text{Li}_w(z) \equiv 0, \quad \lambda_w(z) \in \mathbb{C}(z),$$

причем существует слово $u \in X^*x_1$, $|u| = m$, такое, что $\lambda_u(z) \neq 0$. Тогда в области $|1 - z| < 1$

$$\sum_{w \in X^*x_1 \cup \{\emptyset\}, |w| \leq m} \lambda_w(1 - z) \text{Li}_w(1 - z) \equiv 0.$$

Согласно теореме 2 в области $M = \{z : |z| < 1, |1 - z| < 1\}$ выполнено

$$0 \equiv \sum_{w \in X^*x_1 \cup \{\emptyset\}, |w| \leq m} \lambda_w(1 - z) \sum_{uv=w} (-1)^{|u|} D_v \text{Li}_{\sigma(u)}(z) = \sum_{l=0}^m B_l(z) \ln^l z,$$

где (см. замечание к предложению 1)

$$B_l(z) = \sum_{v \in X^*x_1 \cup \{\emptyset\}, |v| \leq m-l} \mu_v(z) \text{Li}_v(z), \quad \mu_v(z) \in \mathbb{C}(z).$$

Отметим, что множители $B_l(z)$ представляют собой однозначные в области $|z| < 1$ функции.

Пусть $z_0 \in M$. Функцию $F(z) = \sum_{l=0}^m B_l(z) \cdot \ln^l(z)$ можно аналитически продолжить вдоль замкнутого пути γ с началом в точке z_0 , представляющего собой окружность $|z| = |z_0|$, и ориентированного в отрицательном направлении. Полученная функция $G(z)$, с одной стороны, тождественно равна нулю, а с другой стороны,

$$G(z) = \sum_{l=0}^m B_l(z) \cdot (\ln z + 2\pi i)^l.$$

Таким образом, многочлен

$$H(x, z) = \sum_{l=0}^m B_l(z) \cdot x^l$$

степени m по переменной x для любого $z \in M$ имеет бесконечное множество корней $x_k = \ln z + 2\pi i k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Это означает, что все его коэффициенты $B_l(z)$ тождественно равны нулю.

Пусть j – наибольшее натуральное число такое, что найдется $u = vx_1^j$ с условиями $|u| = m$ и $\lambda_u(z) \neq 0$. По нашему предположению оно существует. Запишем

$$B_j(z) = \sum_{v \in X^*x_1 \cup \{\emptyset\}, |v| \leq m-j} \mu_v(z) \text{Li}_v(z).$$

В сумме справа полилогарифмы $\text{Li}_v(z)$ с $|v| = m - j$ согласно замечанию к предложению 1 могут присутствовать только в выражениях для $\text{Li}_p(1 - z)$, где $|p| = m$, $p = tx_1^k$,

$k \geq j$. Но при $k > j$ по определению числа j имеем $\lambda_p \equiv 0$. Если же $k = j$, то в соответствии с замечанием после доказательства теоремы 2 полилогарифм $\text{Li}_v(z)$ с $|v| = m - j$ присутствует только в выражении для $\text{Li}_{\sigma(v)x_1^j}(1 - z)$. Поэтому соответствующий коэффициент равен

$$\mu_v(z) = \frac{(-1)^m}{j!} \lambda_{\sigma(v)x_1^j}(1 - z)$$

и можно записать

$$\begin{aligned} B_j(z) &= \frac{(-1)^m}{j!} \sum_{v \in X^* x_1 \cup \{\emptyset\}, |v|=m-j} \lambda_{\sigma(v)x_1^j}(1 - z) \text{Li}_v(z) \\ &+ \sum_{v \in X^* x_1 \cup \{\emptyset\}, |v| < m-j} \mu_v(z) \text{Li}_v(z). \end{aligned}$$

Так как $j \geq 1$, то $B_j(z)$ представляет собой тождественно равную нулю линейную комбинацию полилогарифмов, отвечающих словам w из $X^* x_1 \cup \{\emptyset\}$, $|w| \leq m - 1$, с коэффициентами из множества рациональных функций. По предположению индукции все коэффициенты, стоящие при обобщенных полилогарифмах в $B_j(z)$, тождественно равны нулю. Следовательно, для всех $u = vx_1^j$, $|u| = m$, выполнено $\lambda_u \equiv 0$. Это приводит нас к противоречию с определением числа j , которое и завершает индукционный шаг. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение теоремы 3 остается в силе, если считать, что λ_w — мероморфные функции.

5. Алгебраическая независимость. Этот пункт посвящен доказательству алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ классических полилогарифмов

$$\text{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Этот факт тривиально следует из одной общей леммы, доказанной в 1961 г. А. Б. Шидловским [6] (см. также [7, § 3]); другое доказательство опубликовано в работе [5].

ЛЕММА 2. Для любого натурального числа k и целых неотрицательных чисел $j_1, \dots, j_k$ справедливо равенство

$$\text{Li}_1^{j_1}(z) \text{Li}_2^{j_2}(z) \cdots \text{Li}_k^{j_k}(z) = \sum_{\substack{|\bar{r}|=j_1+2j_2+\dots+kj_k \\ l(\bar{r})=j_1+j_2+\dots+j_k}} C_{\bar{r}} \text{Li}_{\bar{r}}(z),$$

где $C_{\bar{r}}$ — некоторые целые неотрицательные числа. При этом младший в лексикографическом упорядочении индексов обобщенных полилогарифмов, присутствующих с ненулевыми коэффициентами в сумме справа, имеет вид $(\{1\}_{j_1}, \{2\}_{j_2}, \dots, \{k\}_{j_k})$ и соответствующий ему коэффициент $C_{\bar{r}}$ ненулевой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $m = j_1 + 2j_2 + \dots + kj_k$. При $m = 1$ утверждение очевидно.

Пусть $m > 1$ и для $m-1$ лемма уже доказана. Положим $n = j_1 + \dots + j_k$. Согласно (2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (\text{Li}_1^{j_1}(z) \cdots \text{Li}_k^{j_k}(z)) &= \frac{j_1}{1-z} \text{Li}_1^{j_1-1}(z) \text{Li}_2^{j_2}(z) \cdots \text{Li}_k^{j_k}(z) \\ &\quad + j_2 \frac{1}{z} \cdot \text{Li}_1^{j_1+1}(z) \text{Li}_2^{j_2-1}(z) \text{Li}_3^{j_3}(z) \cdots \text{Li}_k^{j_k}(z) + \dots \\ &\quad + j_k \frac{1}{z} \cdot \text{Li}_1^{j_1}(z) \cdots \text{Li}_{k-2}^{j_{k-2}}(z) \text{Li}_{k-1}^{j_{k-1}+1}(z) \text{Li}_k^{j_k-1}(z) \\ &= \frac{j_1}{1-z} \sum_{\substack{|\bar{r}|=m-1 \\ l(\bar{r})=n-1}} C_{\bar{r}}^{(1)} \text{Li}_{\bar{r}}(z) + \frac{1}{z} \sum_{s=2}^k j_s \sum_{\substack{|\bar{r}|=m-1 \\ l(\bar{r})=n}} C_{\bar{r}}^{(s)} \text{Li}_{\bar{r}}(z). \end{aligned}$$

Интегрируя полученное равенство в соответствии с (2), мы приходим к требуемой формуле. При этом, очевидно, в случае $j_1 \neq 0$ полилогарифм с самым младшим индексом получится интегрированием ‘самого младшего’ полилогарифма в сумме, стоящей при j_1 , т.е. при интегрировании

$$\text{Li}_{(\{1\}_{j_1-1}, \{2\}_{j_2}, \dots, \{k\}_{j_k})}(z),$$

коэффициент при котором по индуктивному предположению ненулевой. После его интегрирования получим по условию леммы полилогарифм

$$\text{Li}_{(\{1\}_{j_1}, \{2\}_{j_2}, \dots, \{k\}_{j_k})}(z)$$

с ненулевым коэффициентом. Если же $j_1 = 0$, то обозначим через s целое число такое, что $2 \leq s \leq k$, $j_1 = \dots = j_{s-1} = 0$, $j_s \neq 0$. Рассмотрим самые младшие индексы полилогарифмов в суммах, стоящих соответственно при $j_s, j_{s+1}, \dots, j_k$. Из них младше других будет индекс полилогарифма

$$\text{Li}_{(s-1, \{s\}_{j_s-1}, \{s+1\}_{j_{s+1}}, \dots, \{k\}_{j_k})}(z),$$

входящего в сумму при j_s . Как и в случае $j_1 \neq 0$, соответствующий ему коэффициент ненулевой по индуктивному предположению. Интегрируя, получим полилогарифм

$$\text{Li}_{(\{s\}_{j_s}, \{s+1\}_{j_{s+1}}, \dots, \{k\}_{j_k})}(z)$$

также с ненулевым коэффициентом, индекс которого опять-таки удовлетворяет формулировке леммы. Таким образом, лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. Для любого натурального числа k функции $\text{Li}_1(z), \dots, \text{Li}_k(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{C}(z)[x_1, \dots, x_k]$, $A \not\equiv 0$ и $A(\text{Li}_1(z), \dots, \text{Li}_k(z)) = 0$. Рассмотрим мономы, входящие в A . Выберем из них старшие по степени по совокупности переменных, из которых возьмем старший в лексикографическом упорядочении. Полученный моном мы назовем старшим. Пусть он имеет вид $\alpha x_1^{j_1} \dots x_k^{j_k}$, где α – ненулевая рациональная функция.

Согласно лемме 2

$$A(\text{Li}_1(z), \dots, \text{Li}_k(z)) = \sum_{\bar{p}} C_{\bar{p}} \text{Li}_{\bar{p}}(z), \quad (11)$$

где $C_{\bar{p}} \in \mathbb{C}(z)$, причем при подстановке $\text{Li}_1(z), \dots, \text{Li}_k(z)$ в $\alpha x_1^{j_1} \dots x_k^{j_k}$ и представлении произведения с помощью леммы 2 помимо прочих слагаемых появится полилогарифм с индексом $\bar{s} = (\{1\}_{j_1}, \{2\}_{j_2}, \dots, \{k\}_{j_k})$, коэффициент при котором будет равен $C_{\bar{s}} \alpha$, где C – натуральное число. Этот набор будет младше индекса $\bar{p}$ любого другого обобщенного полилогарифма из (11) для которого выполнено $l(\bar{p}) = j_1 + j_2 + \dots + j_k$, что следует из выбора старшего монома и леммы 2. Таким образом, $C_{\bar{s}} = C \alpha \neq 0$, что противоречит теореме 3. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Minh Hoang Ngoc, Petitot M., Van Der Hoeven J. L'algèbre des polylogarithmes par les séries génératrices // *Séries formelles et combinatoire algébrique*. Barcelone, 1999.
- [2] Сорокин В. Н. О мере трансцендентности числа π^2 // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 87–121.
- [3] Hoffman M. E. Multiple harmonic series // *Pacific J. Math*. 1992. V. 152. № 2. P. 275–290.
- [4] Minh Hoang Ngoc, Petitot M. Lyndon words, polylogarithms and Riemann's ζ function // *Discrete Math*. 2000. V. 217. № 1–3. P. 273–292.
- [5] Minh Hoang Ngoc, Petitot M., Van Der Hoeven J. Shuffle algebra and polylogarithms // *Discrete Math*. 2000. V. 225. № 1–3. P. 217–230.
- [6] Шидловский А. Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых E -функций // Вестн. МГУ. Сер. I. Матем., мех. 1961. № 5. С. 44–59.
- [7] Зудилин В. В. О мере иррациональности значений G -функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 1. С. 87–114.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

19.02.2002

Исправленный вариант

24.07.2002