Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Волков, И. А. Гольдберг, Тождества полугрупп треугольных матриц над конечными полями, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 502–510

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm210>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:17:59

УДК 512.532.2

ТОЖДЕСТВА ПОЛУГРУПП ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

М. В. Волков, И. А. Гольдберг

Доказывается, что полугруппа всех треугольных $(n \times n)$ -матриц над конечным полем K существенно бесконечно базироваема тогда и только тогда, когда $n > 3$ и $|K| > 2$.

Библиография: 10 названий.

В то время как тождества любой конечной группы обладают конечным базисом [1], среди конечных полугрупп имеются и не конечно базироваемые – первым примером такого рода была 6-элементная полугруппа B_2^1 , образованная (2×2) -матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

относительно обычного матричного умножения [2]. Естественно возникает задача классификации конечных полугрупп с точки зрения конечной базироваемости их тождеств. За последние 30 лет в этом направлении проделана большая работа, результаты которой за первую и вторую половину указанного периода систематизированы соответственно в [3] и [4]. Представляется, однако, что эта работа еще далека от полного завершения. В частности, для ряда конкретных конечных полугрупп, важных для теории и приложений, все еще неизвестно, конечен ли их базис тождеств. Среди “неподдающихся” были до настоящего времени и полугруппы треугольных матриц над конечными полями, вопрос о конечной базироваемости которых был в явном виде поставлен еще в [3] и недавно повторен в [4]. В данной заметке мы показываем, что тождества всякой полугруппы треугольных матриц размера не менее чем 4×4 над конечным полем порядка не менее чем 3 не обладают конечным базисом.

В действительности, получен гораздо более сильный результат, для формулировки которого понадобится одно понятие из теории локально конечных многообразий. (Напомним, что многообразие $\mathbf{V}$ *локально конечно*, если каждая конечно порожденная полугруппа из $\mathbf{V}$ конечна.) Локально конечное многообразие $\mathbf{V}$ называется *существенно бесконечно базироваемым*, если любое локально конечное многообразие, содержащее $\mathbf{V}$, не имеет конечного базиса тождеств. Разумеется, при этом и само многообразие $\mathbf{V}$ не конечно базироваемо.

Наименьшее многообразие, содержащее данную полугруппу S , назовем *многообразием, порожденным S* , и обозначим через $\text{var } S$. Хорошо известно, что для конечной

полугруппы S многообразие $\text{var } S$ локально конечно [5, теорема 14.4]. Благодаря этому, можно распространить интересующее нас понятие на полугруппы: конечная полугруппа S *существенно бесконечно базироваема*, если таково многообразие $\text{var } S$. Целью настоящей заметки является доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА. *Полугруппа $T_n(K)$ всех верхнетреугольных $(n \times n)$ -матриц над конечным полем K существенно бесконечно базироваема тогда и только тогда, когда $|K| > 2$ и $n > 3$.*

Самым известным (и исторически первым) примером существенно бесконечно базироваемой полугруппы является упомянутая в начале введения 6-элементная полугруппа B_2^1 , см. [6, следствие 6.1]. Понятно, что и всякая конечная полугруппа S такая, что $B_2^1 \in \text{var } S$, будет существенно бесконечно базироваемой. Именно так – с помощью отыскания полугруппы B_2^1 в соответствующем многообразии – доказывалась до сих пор существенная бесконечная базироваемость важных конкретных полугрупп, например, полугруппы всех преобразований n -элементного множества (при $n > 2$) и полугруппы всех $(n \times n)$ -матриц над конечным полем (при $n > 1$) [6, следствие 6.2]. Отметим в этой связи, что полугруппа B_2^1 не принадлежит многообразию $\text{var } T_n(K)$ ни при каких n и K (см. лемму 3 и следствие 2 ниже), и потому наша теорема не может быть получена указанным методом. Можно сказать, что полугруппы верхнетреугольных матриц над конечными полями составляют первый класс примеров существенно бесконечно базироваемых полугрупп “естественного происхождения”, не сводящихся к B_2^1 .

Совокупность всех верхнетреугольных $(n \times n)$ -матриц над полем является не только полугруппой, но и кольцом. В [6, следствие 6.3] доказано, что если мультипликативная полугруппа конечного кольца R имеет конечный базис тождеств, то факторкольцо кольца R по его радикалу – прямая сумма конечных полей. Мы видим теперь, что это утверждение нельзя обратить: факторкольцо кольца $T_n(K)$ по его радикалу – прямая сумма n копий поля K , а полугруппа $T_n(K)$ при $|K| > 2$ и $n > 3$ не конечно базироваема. Насколько нам известно, в литературе такие примеры ранее не отмечались.

Достаточность условия теоремы будет доказана в п. 2, необходимость – в п. 3. В подготовительном п. 1 собраны необходимые сведения о полугруппах $T_n(K)$ и о существенно бесконечно базироваемых конечных полугруппах.

Используемые в работе понятия теории полугрупп (в частности, определения эквивалентностей Грина $\mathcal{D}$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$) можно найти в книге [7].

1. Предварительные сведения. Пусть a и b – элементы полугруппы S с единицей. Скажем, что a *делит* b , если $b = xay$ для некоторых $x, y \in S$. Для матрицы $a = (\alpha_{ij})$ из $T_n(K)$ положим $\Delta(a) = \{i \mid \alpha_{ii} \neq 0\}$. Следующее свойство идемпотентных верхнетреугольных матриц (над произвольным полем) по всей вероятности известно, но для полноты мы приводим его с доказательством.

ЛЕММА 1. *Если e – идемпотентная матрица из $T_n(K)$, то $a \in T_n(K)$ делит e тогда и только тогда, когда $\Delta(e) \subseteq \Delta(a)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $e = xay$, где $e = (\varepsilon_{ij})$, $a = (\alpha_{ij})$, $x, y \in T_n(K)$, следует, что если $\alpha_{ii} = 0$ для некоторого i , то и $\varepsilon_{ii} = 0$. Поэтому если a делит e , то $\Delta(e) \subseteq \Delta(a)$. Обратно, пусть $\Delta(e) \subseteq \Delta(a)$. Возьмем произвольную матрицу $b = (\beta_{ij}) \in$

$T_n(K)$, диагональные элементы которой подчинены равенствам

$$\beta_{ii} = \begin{cases} \alpha_{ii}^{-1}, & \text{если } i \in \Delta(e), \\ 0, & \text{если } i \notin \Delta(e). \end{cases}$$

Тогда $\alpha_{ii}\beta_{ii} = \varepsilon_{ii}$ для всех $i = 1, \dots, n$, т.е. главные диагонали матриц e и ab одинаковы. Следовательно, матрица $e - ab$ имеет нулевую главную диагональ, откуда $(e - ab)^n = 0$. Раскрыв скобки и приведя подобные, можно переписать это равенство в виде $e - xay = 0$ для некоторых матриц $x, y \in T_n(K)$. Таким образом, a делит e .

В дальнейшем всегда будем считать поле K конечным; тогда, разумеется, и полугруппа $T_n(K)$ конечна. В конечной полугруппе с единицей два элемента делят друг друга тогда и только тогда, когда они находятся в одном классе эквивалентности Грина $\mathcal{D}$, см. [7, § 6.6]. Поэтому из леммы 1 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Две идемпотентные матрицы из $T_n(K)$ принадлежат одному $\mathcal{D}$ -классу этой полугруппы тогда и только тогда, когда их главные диагонали одинаковы.*

Если e – идемпотент некоторой полугруппы S , то через H_e обозначают максимальную подгруппу в S , единицей которой служит e . Нам понадобится информация о порядках максимальных подгрупп полугруппы $T_n(K)$.

ЛЕММА 2. *Пусть e – идемпотент из $T_n(K)$, δ – число элементов в множестве $\Delta(e)$. Тогда порядок подгруппы H_e равен $(|K| - 1)^\delta |K|^{\delta(\delta-1)/2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Максимальные подгруппы, единицы которых $\mathcal{D}$ -эквивалентны, изоморфны [7, теорема 2.20]. Поэтому согласно следствию 1 можно заменить матрицу e ее главной диагональю; иначе говоря, можно считать, что e – диагональная матрица. Покажем, что тогда подгруппа H_e состоит из всех таких верхнетреугольных матриц $a = (\alpha_{ij})$, что

- 1) $\alpha_{jk} = 0$, если либо $j \notin \Delta(e)$, либо $k \notin \Delta(e)$;
- 2) $\alpha_{ii} \neq 0$, если $i \in \Delta(e)$.

Из этого с очевидностью будет следовать утверждение леммы. В самом деле, число матриц, удовлетворяющих 1) и 2), как раз равно $(|K| - 1)^\delta |K|^{\delta(\delta-1)/2}$: каждый из δ элементов α_{ii} , где $i \in \Delta(e)$, может принимать любое значение из множества $K \setminus \{0\}$, а каждый из $\delta(\delta - 1)/2$ элементов α_{jk} , где $j, k \in \Delta(e)$ и $j < k$, может принимать любое значение из K .

Матрицы a , принадлежащие подгруппе H_e , характеризуются тем, что $ae = ea = a$ и $a^\ell = e$ для некоторого натурального ℓ . Легко понять, что указанные равенства влекут выполнение условий 1) и 2) соответственно. Обратно, если матрица $a \in T_n(K)$ удовлетворяет 1), то $ae = ea = a$. Остается проверить, что при выполнении 1) и 2) $a^\ell = e$ для подходящего ℓ . Будем доказывать это индукцией по размеру матрицы.

Ясно, что проверяемое утверждение справедливо для (1×1) -матриц. Далее, если e – единичная матрица, то в силу 2) a – обратимая матрица, откуда $a^\ell = e$, где $\ell = (|K| - 1)^n |K|^{n(n-1)/2}$ – порядок группы обратимых верхнетреугольных $(n \times n)$ -матриц. Поэтому будем считать, что $n > 1$ и что ноль встречается на главной диагонали

матрицы e . Тогда эту матрицу можно представить в виде

$$e = \begin{pmatrix} e_1 & & \\ & 0 & \\ & & e_2 \end{pmatrix},$$

где e_1 и e_2 – диагональные матрицы меньших размеров (одна из которых может отсутствовать). Согласно 1) соответствующим образом должна быть устроена и матрица a , а именно,

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & o_1 & b \\ & 0 & o_2 \\ & & a_2 \end{pmatrix},$$

где a_1 и a_2 – такие верхнетреугольные матрицы, что $a_i e_i = e_i a_i = a_i$ ($i = 1, 2$), o_1 [o_2] – нулевая колонка [строка], а b – прямоугольная матрица со свойством $e_1 b = b = b e_2$. По предположению индукции найдутся такие показатели ℓ_1 и ℓ_2 , что $a_i^{\ell_i} = e_i$ ($i = 1, 2$). Если m – наименьшее общее кратное этих показателей, то

$$a^m = \begin{pmatrix} e_1 & o_1 & c \\ & 0 & o_2 \\ & & e_2 \end{pmatrix},$$

где $e_1 c = c = c e_2$, и для любого натурального k

$$a^{mk} = \begin{pmatrix} e_1 & o_1 & kc \\ & 0 & o_2 \\ & & e_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, выбирая в качестве k характеристику p поля K , получаем $a^{mp} = e$, что и требовалось.

Через **DS** обозначается класс конечных полугрупп, в которых каждый $\mathcal{D}$ -класс, содержащий идемпотент, является подполугруппой. Наша очередная цель – показать, что полугруппы $T_n(K)$ принадлежат этому классу. Воспользуемся следующей леммой, в которой для случая полугрупп с единицей специализированы некоторые из характеристик класса **DS**, найденных в [8, теорема 3] и [9, лемма 1].

ЛЕММА 3. *Для конечной полугруппы S с единицей следующие условия эквивалентны:*

- (а) $S \in \mathbf{DS}$;
- (б) полугруппа B_2^1 не принадлежит многообразию $\text{var } S$;
- (в) если каждый из элементов $a, b \in S$ делит идемпотент $e \in S$, то и произведение ab делит e ;
- (г) если элемент $a \in S$ делит идемпотент $e \in S$, то произведение $eaе$ принадлежит максимальной подгруппе H_e .

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для любых n и K полугруппа $T_n(K)$ принадлежит **DS**.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что полугруппа $T_n(K)$ удовлетворяет условию (в) леммы 3. Пусть e – идемпотентная матрица из $T_n(K)$ и $a, b \in T_n(K)$ делят e . Тогда по лемме 1 $\Delta(e) \subseteq \Delta(a)$ и $\Delta(e) \subseteq \Delta(b)$, откуда $\Delta(e) \subseteq \Delta(a) \cap \Delta(b) = \Delta(ab)$. Снова применяя лемму 1, заключаем, что произведение ab делит e .

Из леммы 3 и следствия 2 вытекает, в частности, упомянутый во введении факт, что полугруппа B_2^1 не принадлежит многообразию $\text{var } T_n(K)$ ни при каких n и K .

Нам понадобится критерий существенной бесконечной базлируемости из [9]. Перед тем, как сформулировать его, напомним, что *период* $d(S)$ конечной полугруппы S – это наименьшее общее кратное периодов ее подгрупп, а *верхним гиперцентром* $\Gamma(G)$ конечной группы G называется подгруппа, на которой стабилизируется верхний центральный ряд G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Конечная полугруппа S с единицей существенно бесконечно базлируема тогда и только тогда, когда найдутся элемент $a \in S$ и идемпотент $e \in S$ такие, что a делит e и элементы $eaе$ и $ea^{d(S)+1}e$ не принадлежат одному смежному классу подгруппы H_e по ее верхнему гиперцентру.*

Если элементы $a, e \in S$ обладают свойством из формулировки предложения 1, то будем называть пару (a, e) *критической*. Отметим, что бывают ситуации, когда это свойство удовлетворяется, так сказать, тривиальным образом просто в виду того, что элементы $eaе$ и $ea^{d(S)+1}e$ не попадают в подгруппу H_e . Именно так, например, обстоит дело для полугруппы B_2^1 , в которой критической является пара матриц

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Действительно, $d(B_2^1) = 1$ и $eaе = ea^2e = 0 \notin H_e = \{e\}$.) Однако для полугрупп $T_n(K)$ из условий (в) и (г) леммы 3 легко вывести, что если некоторая матрица $a \in T_n(K)$ делит идемпотент $e \in T_n(K)$, то $ea^k e \in H_e$ для всех k , а стало быть, существенная бесконечная базлируемость, если она имеется, должна проявляться нетривиальным образом.

В п. 3 будет полезен следующий факт, полученный в [10].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть S – такая существенно бесконечно базлируемая полугруппа, что $B_2^1 \notin \text{var } S$, и (a, e) – произвольная критическая пара в S . Тогда $\mathcal{D}$ -класс идемпотента e содержит по крайней мере три $\mathcal{L}$ -класса и по крайней мере три $\mathcal{R}$ -класса.*

2. Достаточность. Покажем, что полугруппы $T_n(K)$ при $n \geq 4$ и $|K| > 2$ являются существенно бесконечно базлируемыми. Положим

$$e = e_{11} + e_{12} + e_{34} + e_{44}, \quad a = e_{11} + e_{23} + e_{44},$$

где e_{ij} , как обычно, обозначает *матричную единицу*, т.е. матрицу, у которой на месте (i, j) стоит 1, а все остальные элементы равны нулю. Существенная бесконечная базлируемость полугруппы $T_n(K)$ вытекает из предложения 1 и из следующего факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Матрицы a и e образуют критическую пару в $T_n(K)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом известного правила умножения матричных единиц:

$$e_{ij}e_{kl} = \begin{cases} e_{il}, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k, \end{cases}$$

легко подсчитать, что e – идемпотент. Отсюда в силу леммы 1 вытекает, что a делит e . Так же непосредственно можно убедиться, что $a^2 = a^3 = e_{11} + e_{44}$. Отсюда $a^k = e_{11} + e_{44}$ и $ea^ke = e$ для любого $k > 1$. В частности, если d – период полугруппы $T_n(K)$, то матрица $ea^{d+1}e = e$ принадлежит верхнему гиперцентру $\Gamma(H_e)$ подгруппы H_e . Итак, для того, чтобы доказать, что элементы $eaе$ и $ea^{d+1}e$ не принадлежат одному смежному классу по $\Gamma(H_e)$, остается проверить, что

$$eae = e_{11} + e_{12} + e_{14} + e_{34} + e_{44} \notin \Gamma(H_e).$$

Пусть $\{e\} = Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_m = \Gamma(H_e)$ – верхний центральный ряд группы H_e . Если $g \in \Gamma(H_e)$, $h \in H_e$, то коммутатор $[g, h]$ принадлежит уже Z_{m-1} , повторный коммутатор $[[g, h], h]$ попадает в Z_{m-2} , и т.д.; наконец, m -кратное коммутирование с h дает e . Поэтому для того, чтобы показать, что $eaе \notin \Gamma(H_e)$, достаточно найти такую матрицу $h \in H_e$, что

$$[\dots, \underbrace{[eae, h], h], \dots, h}]_{m \text{ раз}} \neq e$$

ни при каком натуральном m . Пусть β – элемент поля K , отличный от 0 и 1 (такой элемент существует, так как $|K| > 2$). Убедимся, что в качестве h можно взять матрицу $\beta^{-1}(e_{11} + e_{12}) + e_{34} + e_{44}$. Прежде всего, нетрудно проверить, что $h \in H_e$ и что обратный к h элемент из H_e есть $\beta(e_{11} + e_{12}) + e_{34} + e_{44}$. Далее, для произвольного $\gamma \in K$ рассмотрим матрицу

$$g_\gamma = e_{11} + e_{12} + \gamma e_{14} + e_{34} + e_{44}.$$

Она также принадлежит подгруппе H_e , причем обратный к g_γ элемент этой подгруппы равен $e_{11} + e_{12} - \gamma e_{14} + e_{34} + e_{44}$. Вычислим коммутатор $[g_\gamma, h]$:

$$\begin{aligned} [g_\gamma, h] &= (e_{11} + e_{12} - \gamma e_{14} + e_{34} + e_{44}) \cdot (\beta(e_{11} + e_{12}) + e_{34} + e_{44}) \\ &\quad \times (e_{11} + e_{12} + \gamma e_{14} + e_{34} + e_{44}) \cdot (\beta^{-1}(e_{11} + e_{12}) + e_{34} + e_{44}) \\ &= (\beta(e_{11} + e_{12}) - \gamma e_{14} + e_{34} + e_{44}) \times (\beta^{-1}(e_{11} + e_{12}) + \gamma e_{14} + e_{34} + e_{44}) \\ &= e_{11} + e_{12} + \gamma(\beta - 1)e_{14} + e_{34} + e_{44} = g_{\gamma(\beta-1)}. \end{aligned}$$

Отсюда, замечая, что $eaе = g_1$, получаем, что при любом натуральном m

$$[\dots, \underbrace{[eae, h], h], \dots, h}]_{m \text{ раз}} = g_{(\beta-1)^m} \neq g_0 = e,$$

что и требовалось.

3. Необходимость. Будем называть конечную полугруппу *слабо конечно базлируемой*, если она не является существенно бесконечно базлируемой, т.е. если она содержится в некотором конечно базлируемом локально конечном многообразии. Нам нужно доказать, что полугруппа $T_n(K)$ слабо конечно базлируема, если $|K| = 2$ или $n \leq 3$.

Если $|K| = 2$, то по лемме 2 порядок любой подгруппы в $T_n(K)$ есть степень двойки. Хорошо известно, что любая группа такого порядка нильпотентна. Как отмечено в [9, теорема 2], если все подгруппы конечной полугруппы S нильпотентны и $B_2^1 \notin \text{var } S$, то S слабо конечно базлируема. Поскольку $B_2^1 \notin \text{var } T_n(K)$ при любых n и K (см. следствие 2 и лемму 3), указанный признак слабой конечной базлируемости приложим к полугруппам верхнетреугольных матриц над двухэлементным полем.

Пусть теперь поле K произвольно, но $n \leq 3$. Ясно, что свойство “быть слабо конечно базлируемой” наследуется подполугруппами, поэтому если мы покажем, что данным свойством обладает полугруппа $T_3(K)$, то отсюда будет следовать и слабая конечная базлируемость полугрупп $T_1(K)$ и $T_2(K)$, которые очевидным образом вкладываются в $T_3(K)$. (В действительности, полугруппа $T_1(K)$ – т.е. мультипликативная полугруппа поля K – даже конечно базлируема, поскольку она коммутативна [2, теорема 9].)

Итак, пусть $e = (\varepsilon_{ij})$ – произвольный идемпотент полугруппы $T_3(K)$. В силу предложения 1 достаточно проверить, что e не образует критическую пару ни с одной матрицей из $T_3(K)$. В зависимости от распределения нулей и единиц на главной диагонали матрицы e возможны 4 случая, которые мы последовательно рассмотрим.

Случай 1: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = 1$. Покажем, что в этом случае любая матрица $a = (\alpha_{ij})$, делящая e , принадлежит некоторой подгруппе полугруппы $T_3(K)$. Так как период любой такой подгруппы делит число $d = d(T_3(K))$, отсюда будет следовать, что $a^{d+1} = a$. Поэтому $ea^{d+1}e = eae$ и, поскольку по следствию 2 и лемме 3 матрицы $ea^{d+1}e$ и eae принадлежат подгруппе H_e , они заведомо лежат в одном смежном классе этой подгруппы по ее верхнему гиперцентру. Следовательно, никакая пара (a, e) не будет критической, что и требуется.

Итак, пусть a – произвольный делитель идемпотента e . Тогда по лемме 1 $\alpha_{11} \neq 0$ и $\alpha_{33} \neq 0$. Если к тому же и $\alpha_{22} \neq 0$, то матрица a принадлежит подгруппе обратимых верхнетреугольных матриц. Поэтому будем считать, что $\alpha_{22} = 0$. Вычисляя последовательные степени матрицы a , несложно убедиться, что

$$a^n = \alpha_{11}^n e_{11} + \alpha_{11}^{n-1} \alpha_{12} e_{12} + \beta_n e_{13} + \alpha_{23} \alpha_{33}^{n-1} e_{23} + \alpha_{33}^n e_{33}, \quad (1)$$

где β_n есть некий многочлен от $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{33}$. В конечной полугруппе некоторая степень любого элемента является идемпотентом. Если n таково, что a^n – идемпотент, то из (1) заключаем, что $\alpha_{11}^n = \alpha_{33}^n = 1$, откуда $\alpha_{11}^{n-1} = \alpha_{11}^{-1}$ и $\alpha_{33}^{n-1} = \alpha_{33}^{-1}$. Поэтому для такого n формулу (1) можно переписать следующим образом:

$$a^n = e_{11} + \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12} e_{12} + \beta_n e_{13} + \alpha_{23} \alpha_{33}^{-1} e_{23} + e_{33}.$$

Возводя последнее равенство в квадрат, из условия $a^n = a^{2n}$ получаем, что $\beta_n = -\alpha_{11}^{-1} \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{33}$. Таким образом,

$$a^n = e_{11} + \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12} e_{12} - \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{33}^{-1} e_{13} + \alpha_{23} \alpha_{33}^{-1} e_{23} + e_{33},$$

откуда

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= \alpha_{11}e_{11} + \alpha_{12}e_{12} + (-\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{33}^{-1} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{33}^{-1} + \alpha_{13})e_{13} + \alpha_{23}e_{23} + \alpha_{33}e_{33} \\ &= \alpha_{11}e_{11} + \alpha_{12}e_{12} + \alpha_{13}e_{13} + \alpha_{23}e_{23} + \alpha_{33}e_{33} = a. \end{aligned}$$

Итак, $a^{n+1} = a$ и циклическая подполугруппа, порожденная матрицей a , является подгруппой.

Случай 2: $\varepsilon_{11} = 1, \varepsilon_{33} = 0$. Легко проверить, что (3×3) -матрица с такой главной диагональю будет идемпотентом тогда и только тогда, когда у нее либо на месте $(2, 2)$ стоит 1, а на месте $(1, 2)$ стоит 0, либо на местах $(2, 2)$ и $(2, 3)$ стоят нули. В частности, идемпотент e можно представить в виде

$$e = e_{11} + (1 - \varkappa)\varepsilon_{12}e_{12} + \varepsilon_{13}e_{13} + \varkappa e_{22} + \varkappa\varepsilon_{23}e_{23},$$

где параметр $\varkappa$ равен либо 1, либо 0. Обозначим $\mathcal{D}$ -класс идемпотента e через D , и пусть b – произвольная матрица из D . Поскольку в D есть идемпотент, то и в каждом $\mathcal{R}$ -классе, содержащемся в D , имеется идемпотент [7, теорема 2.11]. Пусть f – некоторый идемпотент, $\mathcal{R}$ -эквивалентный b . По следствию 1 у f такая же главная диагональ, как у e , в силу чего f можно представить в виде

$$f = e_{11} + (1 - \varkappa)\varphi_{12}e_{12} + \varphi_{13}e_{13} + \varkappa e_{22} + \varkappa\varphi_{23}e_{23}.$$

Перемножая e и f и учитывая, что $\varkappa^2 = \varkappa$, убеждаемся, что $ef = f$, а $fe = e$, откуда эти идемпотенты $\mathcal{R}$ -эквивалентны между собой. Следовательно, матрица b лежит в одном $\mathcal{R}$ -классе с e . Итак, $\mathcal{D}$ -класс идемпотента e содержит лишь один $\mathcal{R}$ -класс, а тогда по предложению 2 e не образует критическую пару ни с одной матрицей из $T_3(K)$.

Случай 3: $\varepsilon_{11} = 0, \varepsilon_{33} = 1$. В этом – симметричном предыдущему – случае $\mathcal{D}$ -класс идемпотента e содержит лишь один $\mathcal{L}$ -класс и снова срабатывает предложение 2.

Случай 4: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = 0$. Покажем, что в этом случае подгруппа H_e совпадает со своим верхним гиперцентром. Этого достаточно, чтобы утверждать, что ни для какого делителя a идемпотента e пара (a, e) не будет критической. Действительно, как мы уже неоднократно отмечали, обе матрицы $ea^{d+1}e$ и $ea e$ принадлежат подгруппе H_e , а при условии, что $H_e = \Gamma(H_e)$, эта подгруппа образует один смежный класс по $\Gamma(H_e)$.

Если $\varepsilon_{22} = 0$, то e – нулевая матрица и подгруппа H_e одноэлементна. Пусть $\varepsilon_{22} = 1$. Возьмем произвольную матрицу $b = (\beta_{ij}) \in H_e$. Вычисляя произведение $eb = b$, заключаем, что $\beta_{11} = \beta_{33} = 0$,

$$\beta_{12} = \varepsilon_{12}\beta_{22}, \quad (2)$$

$$\beta_{13} = \varepsilon_{12}\beta_{23}. \quad (3)$$

Отметим, что применяя (3) к случаю $b = e$, получаем

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}. \quad (4)$$

Аналогично, вычисляя произведение $be = b$, заключаем, что

$$\beta_{23} = \varepsilon_{23}\beta_{22}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2) и учитывая (4), получаем

$$\beta_{13} = \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\beta_{22} = \varepsilon_{13}\beta_{22}. \quad (6)$$

Используя равенства (2), (5) и (6), мы можем представить матрицу b в виде

$$\begin{aligned} b &= \beta_{12}e_{12} + \beta_{13}e_{13} + \beta_{22}e_{22} + \beta_{23}e_{23} \\ &= \beta_{22}(\varepsilon_{12}e_{12} + \varepsilon_{13}e_{13} + e_{22} + \varepsilon_{23}e_{23}) = \beta_{22}e. \end{aligned}$$

Если $c = (\gamma_{ij})$ – другая матрица из H_e , то

$$bc = \beta_{22}e \cdot \gamma_{22}e = \beta_{22}\gamma_{22}e = \gamma_{22}\beta_{22}e = \gamma_{22}e \cdot \beta_{22}e = cb.$$

Таким образом, группа H_e абелева и потому совпадает со своим верхним гиперцентром.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Oates S., Powell M. B. Identical relations in finite groups // J. Algebra. 1964. V. 1. № 1. P. 11–39.
- [2] Perkins P. Bases for equational theories of semigroups // J. Algebra. 1969. V. 11. № 2. P. 298–314.
- [3] Шеврин Л. Н., Волков М. В. Тожества полугрупп // Изв. вузов. Матем. 1985. № 11. С. 3–47.
- [4] Volkov M. V. The finite basis problem for finite semigroups // Math. Japonica. 2001. V. 53. № 1. P. 171–199.
- [5] Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
- [6] Сапир М. В. Проблемы бернсайдовского типа и конечная базисуемость в многообразиях полугрупп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 2. С. 319–340.
- [7] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1, 2. М.: Мир, 1972.
- [8] Шеврин Л. Н. К теории эпигрупп. I // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 8. С. 129–160.
- [9] Сапир М. В. Существенно бесконечно базисуемые конечные полугруппы // Матем. сб. 1987. Т. 133. № 2. С. 154–166.
- [10] Jackson M. Small inherently nonfinitely based finite semigroups // Semigroup Forum. (to appear).

Уральский государственный университет, г. Екатеринбург
E-mail: Mikhail.Volkov@usu.ru

Поступило
17.10.2001