Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Воскресенская, Мультипликативные произведения
эта-функций Дедекинда и представления групп, *Матем.
заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 511–526

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm211>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 05:27:20

УДК 511.334

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЭТА-ФУНКЦИЙ ДЕДЕКИНДА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

Г. В. Воскресенская

В статье находятся все метациклические группы вида $\langle a, b: a^m = e, b^s = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$, где $m = 10, 14, 15, 20, 21, 22$, такие, что модулярные формы, ассоциированные со всеми элементами этих групп с помощью некоторого точного представления, являются мультипликативными η -произведениями. Также изучается соответствие между мультипликативными η -произведениями и элементами конечного порядка в $SL(5, C)$, задаваемое с помощью присоединенного представления.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Интересным актуальным аспектом теории модулярных форм является изучение их связей с представлениями конечных групп. В настоящей статье исследуется проблема нахождения таких конечных групп, что модулярные формы, ассоциированные со всеми элементами этих групп с помощью некоторого точного представления, принадлежат специальному классу модулярных форм, которые называются мультипликативными η -произведениями. Это открытая проблема: все такие группы до сих пор не найдены. В этой статье продолжается исследование метациклических групп, начатое в статьях [1], [2]. Кроме того, рассматривается связь между мультипликативными η -произведениями и элементами конечного порядка в $SL(5, C)$ с помощью присоединенного представления.

Эта-функция Дедекинда $\eta(z)$ определяется формулой

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi iz};$$

z лежит в верхней комплексной полуплоскости.

В этой статье рассматриваются модулярные формы, которые полностью описываются следующими условиями: это параболические формы целого веса с характеристиками, собственными относительно всех операторов Гекке и не имеющие нулей вне параболических вершин. Заранее мы не предполагаем, что эти функции являются модифицированными произведениями η -функций Дедекинда. Однако фактически это так, таких функций ровно 28; приведем их полный список:

- формы веса 1:

$$\eta(23z)\eta(z), \quad \eta(22z)\eta(2z), \quad \eta(21z)\eta(3z), \quad \eta(20z)\eta(4z), \\ \eta(18z)\eta(6z), \quad \eta(16z)\eta(8z), \quad \eta^2(12z);$$

- формы веса 2:

$$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z), \quad \eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z), \quad \eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z), \\ \eta^2(11z)\eta^2(z), \quad \eta^2(10z)\eta^2(2z), \quad \eta^2(9z)\eta^2(3z), \quad \eta^2(8z)\eta^2(4z), \quad \eta^4(6z);$$

- формы веса 3:

$$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z), \quad \eta^3(7z)\eta^3(z), \quad \eta^3(6z)\eta^3(2z), \quad \eta^6(4z);$$

- формы веса 4:

$$\eta^4(5z)\eta^4(z), \quad \eta^4(4z)\eta^4(2z), \quad \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z), \quad \eta^8(3z);$$

- форма веса 5: $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$;
- формы веса 6: $\eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{12}(2z)$;
- форма веса 8: $\eta^8(2z)\eta^8(z)$;
- форма веса 12: $\eta^{24}(z)$.

К этому списку добавим еще 2 параболические формы полуцелого веса: $\eta(24z), \eta^3(8z)$.

Эти функции мы назовем *мультипликативными η -произведениями*, так как они имеют мультипликативные коэффициенты Фурье.

С различных точек зрения эти функции изучались в ряде недавних работ американских и японских математиков [3]–[9].

Сопоставление элементам конечных групп модулярных форм осуществляется по следующему правилу. Пусть Φ – представление конечной группы G унитарными матрицами в пространстве V , размерность которого делится на 24. Тогда для любого элемента $g \in G$ характеристический многочлен оператора $\Phi(g)$ имеет вид

$$P_g(x) = \prod_{k=1}^s (x^{a_k} - 1)^{t_k}, \quad a_k \in \mathbb{N}, \quad t_k \in \mathbb{Z}.$$

С каждым элементом $g \in G$ можно связать функцию

$$\eta_g(z) = \prod_{k=1}^s \eta^{t_k}(a_k z).$$

Функция $\eta_g(z)$ является параболической формой определенного уровня $N(g)$ и веса

$$k(g) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s t_k$$

с характером, равным характеру квадратичного поля

$$\mathbb{Q} \sqrt{\prod_{k=1}^s (ia_k)^{t_k}}.$$

Метациклической группой называется конечная группа, имеющая циклический нормальный делитель, факторгруппа по которому также циклическая.

Генетический код метациклической группы $\langle a, b: a^m = e, b^s = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$.

Будем называть представление группы *искомым* или *представлением допустимого типа*, если с помощью этого представления с элементами группы ассоциируются мультипликативные η -произведения. Целью работы является нахождение метациклических групп, имеющих такие точные представления. При разборе каждого случая будут подробно указаны искомые представления.

Допустимые группы указываются с точностью до изоморфизма.

Искомые группы могут содержать элементы порядков, не превосходящих 24 и не равных 13, 17, 19. Непосредственно проверяется, что если некоторому элементу группы соответствует мультипликативное η -произведение, то всем его степеням также соответствуют параболические формы из указанного выше списка. Используя этот факт, при исследовании групп достаточно рассматривать представления только для элементов, не лежащих в одной циклической группе. Единичному элементу группы соответствует параболическая форма $\eta^{24}(z)$.

Так как искомое представление является точным, по виду параболической формы можно понять порядок соответствующего ей элемента группы. Поэтому мы будем приводить только списки параболических форм, указывая элементы только в том случае, когда элементам группы равных порядков соответствуют различные формы.

Если некоторая допустимая группа является подгруппой другой допустимой метациклической группы, то можно привести подробное рассмотрение только для большей группы. Результат для подгруппы следует из него очевидным образом.

В этой статье полностью разобраны случаи, когда $m = 10, 14, 15, 20, 21, 22$, и циклические подгруппы $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ не имеют нетривиального пересечения. Случаи $m = 3, 4, 5, 7, 11, 23$ были разобраны в статье [1], случаи $m = 9, 18$ – в статье [2].

Основной результат статьи может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – метациклическая группа с генетическим кодом

$$\langle a, b: a^m = e, \quad b^s = e, \quad b^{-1}ab = a^r \rangle, \quad m = 10, 14, 15, 20, 21, 22,$$

такая, что с каждым элементом этой группы с помощью некоторого точного представления ассоциируется мультипликативное η -произведение. Тогда для m, s, r возможны (с точностью до изоморфизма) лишь указанные в таблице 1 значения.

ТАБЛИЦА 1

m	10	10	10	10	14	14	14	15	15	15	20	20	20	21	21	21	21	22	22	22
s	4	8	2	4	6	3	2	4	2	2	2	4	2	6	3	2	2	5	10	2
r	3	3	9	9	3	9	13	2	4	14	9	17	19	2	4	8	20	3	7	21

Диэдральные группы допустимых типов подробно рассматривались автором в предыдущей статье [10].

2. Метациклические группы вида $\langle a, b: a^{10} = e, b^8 = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$. Группа D_{10} является допустимой, она была рассмотрена ранее.

2.1. Группа $\langle a, b: a^{10} = e, b^4 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. Это группа порядка 40, она имеет 16 классов сопряженных элементов. Элементы e, a^5, b^2, a^5b^2 являются центральными.

Искомым представлением является прямая сумма всех неприводимых представлений, взятых с кратностью 1. Элементам a^5, b^2 соответствует параболическая форма $\eta^{12}(2z)$, элементу a^5b^2 соответствует $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальным элементам группы соответствуют параболические формы

$$\eta^2(10z)\eta^2(2z), \quad \eta^4(5z)\eta^4(z), \quad \eta^6(4z), \quad \eta^{24}(z).$$

Другое искомое представление будет рассмотрено в следующем пункте как ограничение представления большей группы.

2.2. Группа $\langle a, b: a^{10} = e, b^8 = e, b^{-1}ab = a^3 \rangle$. Это группа порядка 80, она имеет 20 классов сопряженных элементов. Элементы e, a^5, b^4, a^5b^4 являются центральными.

Искомым представлением является прямая сумма всех неприводимых представлений, взятых с кратностью 1, кроме тех одномерных, в которых элемент b переходит в первообразные корни степени 8 из 1. Элементам a^5, a^5b^4 соответствует параболическая форма $\eta^{12}(2z)$, элементу b^4 соответствует $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальным элементам группы соответствуют параболические формы

$$\eta^2(10z)\eta^2(2z), \quad \eta^4(5z)\eta^4(z), \quad \eta^2(8z)\eta^2(4z), \quad \eta^4(4z)\eta^4(2z), \quad \eta^{24}(z).$$

Она содержит в качестве подгруппы группу $\langle a, b: a^{10} = e, b^4 = e, b^{-1}ab = a^9 \rangle$, ограничение этого представления на нее отличается от представления, рассмотренного в 2.1.

2.3. Группа $\langle a, b: a^{10} = e, b^4 = e, b^{-1}ab = a^3 \rangle$. Это группа порядка 40, она имеет 10 классов сопряженных элементов. Элементы e, a^5 являются центральными.

Искомым представлением является прямая сумма всех неприводимых представлений, взятых с кратностью 1, кроме тех одномерных, в которых элемент b переходит в первообразные корни степени 4 из 1. Элементам a^5, a^5b^2 соответствует параболическая форма $\eta^{12}(2z)$, элементу b^2 соответствует $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальным элементам группы соответствуют параболические формы

$$\eta^2(10z)\eta^2(2z), \quad \eta^4(5z)\eta^4(z), \quad \eta^4(4z)\eta^4(2z), \quad \eta^{24}(z).$$

Эта группа изоморфна группе $\langle a, b: a^{10} = e, b^4 = e, b^{-1}ab = a^7 \rangle$.

3. Метациклические группы вида $\langle a, b: a^{14} = e, b^8 = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$. Группа D_{14} является допустимой, она была рассмотрена ранее.

Группа $\langle a, b: a^{14} = e, b^6 = e, b^{-1}ab = a^3 \rangle$. Это группа порядка 84, она имеет 14 классов сопряженных элементов. Элемент a^7 является центральным.

Искомым представлением является прямая сумма

$$T_1 \oplus 2T_2 \oplus 2T_3 \oplus 2T_4 \oplus T_5 \oplus T_6,$$

где

$$T_1(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{14}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{14}^9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_{14}^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{14}^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{14}^5 \end{pmatrix}, \quad T_1(b) = T_2(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_2(a) = \begin{pmatrix} \zeta_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_7^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_7^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_7^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_7^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_7^5 \end{pmatrix},$$

$$T_3(a) = 1, \quad T_3(b) = 1, \quad T_4(a) = 1, \quad T_4(b) = -1,$$

$$T_5(a) = -1, \quad T_5(b) = 1, \quad T_6(a) = -1, \quad T_6(b) = -1.$$

Элементам b^3 , a^7b^3 соответствует параболическая форма $\eta^{12}(2z)$, элементу a^7 соответствует $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальным элементам группы соответствуют параболические формы

$$\eta^3(7z)\eta^3(z), \quad \eta(21z)\eta(3z), \quad \eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z), \quad \eta^3(6z)\eta^3(2z), \\ \eta^6(3z)\eta^6(z), \quad \eta^{24}(z).$$

Эта группа изоморфна группе $\langle a, b: a^{14} = e, b^6 = e, b^{-1}ab = a^5 \rangle$. Подгруппой в этой группе является группа $\langle a, b: a^{14} = e, b^3 = e, b^{-1}ab = a^9 \rangle$, которая изоморфна группе $\langle a, b: a^{14} = e, b^3 = e, b^{-1}ab = a^{11} \rangle$.

4. Метациклические группы вида $\langle a, b: a^{15} = e, b^s = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$. Группа D_{15} является допустимой, она была рассмотрена ранее.

Группа $H \cong \langle a, b: a^{15} = e, b^4 = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Это группа порядка 60, у нее 9 классов сопряженных элементов.

Пусть T_1, T_2 – неприводимые 4-мерные представления, переводящие элемент a в элементы порядка 15,

T_3 – неприводимое 4-мерное представление, переводящее элемент a в элемент порядка 5,

$$T_4(a) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix}, \quad T_4(b) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_6(a) = T_7(a) = T_8(a) = T_9(a) = 1, \quad T_6(b) = -1,$$

$$T_7(b) = 1, \quad T_8(a) = i, \quad T_9(b) = -i.$$

Искомым представлением является прямая сумма

$$T_1 \oplus T_2 \oplus 2T_3 \oplus T_4 \oplus T_5 \oplus T_6 \oplus T_7 \oplus T_8 \oplus T_9$$

или

$$T_1 \oplus T_2 \oplus 2T_3 \oplus 2T_5 \oplus 2T_8 \oplus 2T_9.$$

Эта группа изоморфна группе $\langle a, b: a^{15} = e, b^4 = e, b^{-1}ab = a^8 \rangle$. В ней содержится подгруппа $\langle a, b: a^{15} = e, b^2 = e, b^{-1}ab = a^4 \rangle$.

5. Метациклические группы вида $\langle a, b: a^{20} = e, b^8 = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$. Группа D_{20} является допустимой, она была рассмотрена ранее.

Группа $\langle a, b: a^{20} = e, b^4 = e, b^{-1}ab = a^{17} \rangle$. Это группа порядка 80, у нее 20 классов сопряженных элементов.

Искомое представление является прямой суммой, в которую с кратностью 1 входят все неприводимые 4-мерные представления и все те неприводимые одномерные, в которых b не переходит в первообразные корни степени 4 из 1.

Элементы, сопряженные с $a^{10}, a^{10}b^2$, соответствуют параболической форме $\eta^{12}(2z)$; элементы, сопряженные с b^2 , соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$; элементы, сопряженные с $b, b^3, a^{10}b, a^5b^2, a^{15}b^2, a^{10}b^3$ соответствуют $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$; остальным элементам порядка 4 соответствует форма $\eta^6(4z)$, остальным элементам группы соответствуют модулярные формы

$$\eta(20z)\eta(4z), \quad \eta^2(10z)\eta^2(2z), \quad \eta^4(5z)\eta^4(z), \quad \eta^{24}(z).$$

В этой группе содержится подгруппа $\langle a, b: a^{20} = e, b^2 = e, b^{-1}ab = a^9 \rangle$.

6. Метациклические группы вида $\langle a, b: a^{21} = e, b^8 = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$. Группа D_{21} является допустимой, она была рассмотрена ранее.

Группа $\langle a, b: a^{21} = e, b^6 = e, b^{-1}ab = a^5 \rangle$. Это группа порядка 126, у нее 12 классов сопряженных элементов.

Искомое представлением является прямая сумма

$$2T_1 \oplus T_4 \oplus T_5 \oplus T_6 \oplus T_7 \oplus T_8$$

или

$$T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5 \oplus T_6 \oplus T_7 \oplus T_8,$$

где

$$T_1(a) = T_2(a) = T_3(a) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix}, \quad T_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2(b) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_3 \\ \zeta_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3(b) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_3^2 \\ \zeta_3^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_4(a) = T_5(a) = 1, \quad T_4(b) = 1, \quad T_5(b) = -1,$$

T_6, T_7, T_8 – неприводимые 6-мерные представления.

В первом случае элементам, сопряженным с b, ab^2, ab^4 , соответствует модулярная форма $\eta^3(6z)\eta^3(2z)$, элементам, сопряженным с $a^7, -\eta^8(3z)$, остальным элементам порядка $3 - \eta^6(3z)\eta^6(z)$; во втором случае элементам, сопряженным с ab^2, ab^4 соответствует $\eta^3(6z)\eta^3(2z)$, элементам, сопряженным с b , соответствует $\eta^4(6z)$, элементам, сопряженным с $a^7, b^2 - \eta^8(3z)$, остальным элементам порядка $3 - \eta^6(3z)\eta^6(z)$, элементам порядка 21 в обоих случаях соответствует $\eta(21z)\eta(3z)$, элементам порядка 7 – модулярная форма $\eta^3(7z)\eta^3(z)$, элементам порядка 2 – модулярная форма $\eta^{12}(2z)$, элементу e соответствует $\eta^{24}(z)$.

Эта группа изоморфна группам $\langle a, b: a^{21} = e, b^6 = e, b^{-1}ab = a^r \rangle, r = 2, 11, 17$. Она содержит в качестве подгруппы группу $\langle a, b: a^{21} = e, b^3 = e, b^{-1}ab = a^4 \rangle$, которая, в свою очередь, изоморфна группе $\langle a, b: a^{21} = e, b^3 = e, b^{-1}ab = a^{16} \rangle$, и подгруппу $\langle a, b: a^{21} = e, b^2 = e, b^{-1}ab = a^8 \rangle$.

7. Метациклические группы вида $\langle a, b: a^{22} = e, b^s = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$. Группа D_{22} является допустимой, она была рассмотрена ранее.

7.1. Группа $\langle a, b: a^{22} = e, b^{10} = e, b^{-1}ab = a^7 \rangle$. Это группа порядка 220, она имеет 22 класса сопряженных элементов. Элемент a^{11} является центральным.

Искомым представлением является прямая сумма

$$T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5 \oplus T_6,$$

где

$$T_1(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{22}^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{22}^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{22}^{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_{22}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{22}^{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{22}^{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{22}^{17} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{22}^9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{22}^{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{22} \end{pmatrix},$$

$$T_1(b) = T_2(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_2(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{11}^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{11}^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{11}^{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_{11}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{11}^{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{11}^{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{11}^{17} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{11}^9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{11}^{19} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_{11} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} T_3(a) &= 1, & T_3(b) &= 1, & T_4(a) &= 1, & T_4(b) &= -1, \\ T_5(a) &= -1, & T_5(b) &= 1, & T_6(a) &= -1, & T_6(b) &= -1. \end{aligned}$$

Элементом группы соответствуют параболические формы

$$\eta^2(10z)\eta^2(2z), \quad \eta(22z)\eta(2z), \quad \eta^4(5z)\eta^4(z), \quad \eta^2(11z)\eta^2(z), \quad \eta^{12}(2z), \quad \eta^{24}(z).$$

Эта группа изоморфна группам $\langle a, b: a^{22} = e, b^{10} = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$, где $r = 13, 17, 19$; она содержит подгруппу, изоморфную группе $\langle a, b: a^{22} = e, b^5 = e, b^{-1}ab = a^5 \rangle$, которая, в свою очередь, изоморфна группам $\langle a, b: a^{22} = e, b^5 = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$, где $r = 3, 9, 15$.

8. Метациклические группы, не имеющие представлений допустимого типа. В этом пункте мы рассмотрим группы, элементы которых имеют допустимые порядки, но для самих групп не существует представлений искомого типа. Отсутствие искомого представления доказывается на основе анализа таблицы неприводимых представлений группы, причем не обязательно рассматривать представления для всех элементов группы. Если данная группа не имеет представлений допустимого типа, то это же верно и для любой группы, ее содержащей.

Все эти значения указаны в таблице 2.

ТАБЛИЦА 2

m	10	10	14	14	14	14	14	15	15	15	15	15	15	15	15	15	20	20	20	20	20
s	20	10	12	6	21	4	14	12	20	6	10	4	2	6	10	4	4	10	2	8	
r	3	9	3	9	9	13	13	2	2	4	4	7	11	14	14	3	9	9	11	3	

m	20	20	20	21	21	21	21	21	21	21	21	22	22	22	22
s	20	4	10	9	21	18	6	6	2	6	14	10	20	4	22
r	9	9	11	17	17	19	19	4	4	5	8	10	13	20	20

Приведем доказательства для некоторых групп.

Группа $\langle a, b: a^{15} = e, b^{20} = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Эта группа $G \cong Z_5 \times H$, где H – группа порядка 60, описанная в начале п. 4. В искомом представлении должны содержаться 4 4-мерных представления, так как если T – двумерное или одномерное представление, то среди собственных значений оператора $T(a)$ нет первообразных корней степени 15 из 1.

Пусть T_1 – представление степени 4, содержащееся в искомом. Если $T_1(b^4)$ не является тождественным оператором, то среди собственных значений оператора $T_1(a^5b^4)$ либо встречаются повторяющиеся первообразные корни степени 15 из 1, либо все 4 собственных значения совпадают с одним и тем же значением первообразного корня степени 5 из 1. Получим противоречие, так как элемент a^5b^4 должен соответствовать форме $\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$. Следовательно, во всех четырех 4-мерных представлениях, входящих в искомое, матрица оператора $T_1(b^4)$ является единичной, и среди собственных значений оператора $T_1(b)$ два первообразных корня степени 4 из 1 встречаются не менее четырех раз каждый, что противоречит тому, что b должна соответствовать параболическая форма $\eta(20z)\eta(4z)$. Таким образом, нельзя построить представление для этой группы, которое удовлетворяло бы условию теоремы.

Группа $\langle a, b: a^{21} = e, b^{21} = e, b^{-1}ab = a^4 \rangle$. Если T – трехмерное неприводимое представление этой группы, то среди собственных значений оператора $T(g)$ не содержатся

корни степени 3 из 1. Так как элементу 21-го порядка должна соответствовать модулярная форма $\eta(21z)\eta(3z)$, в искомом представлении содержатся ровно 6 одномерных, в двух из которых элемент a переходит в 1. Следовательно, элемент a^7b^3 может перейти в первообразный корень степени 21 не более чем в четырех из 6 рассматриваемых одномерных представлений. Значит, в искомое представление должно входить такое трехмерное представление T_1 , что собственными значениями оператора $T_1(a^7b^3)$ являются первообразные корни степени 21 из 1. Но так как a^7b^3 – элемент центральный, эти собственные значения совпадают. Следовательно, элементу 21-го порядка a^7b^3 не может соответствовать модулярная форма $\eta(21z)\eta(3z)$, и допустимого представления рассматриваемой группы не существует.

Группа $\langle a, b: a^{22} = e, b^4 = e, b^{-1}ab = a^{21} \rangle$. Элементом порядка 22 в искомом представлении соответствует параболическая форма $\eta(22z)\eta(2z)$. Среди неприводимых представлений, являющихся прямыми слагаемыми искомого представления T , обязательно встречается такое представление T_1 , что $T_1(a)$ имеет порядок 22, $T_1(b^2) = -E$. В противном случае, если $T_k(b^2) = -E$, то $T_k(a)$ – элемент 11-го порядка, и если $T_k(a)$ – элемент порядка 22, то $T_k(b^2) = E$. Тогда среди собственных значений оператора $T(ab^2)$ встретятся повторяющиеся первообразные корни степени 22 из 1, что недопустимо. Без ограничения общности можно считать, что

$$T_1(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{22} & 0 \\ 0 & \zeta_{22}^{21} \end{pmatrix}, \quad T_1(b^2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$T_2(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{22}^{12} & 0 \\ 0 & \zeta_{22}^{10} \end{pmatrix}.$$

Если $T_2(b^2) = -E$, то $T_1(a^2b^2) = T_2(a^2b^2)$; если $T_2(b^2) = E$, то $T_1(ab^2) = T_2(ab^2)$. В первом случае среди собственных значений оператора $T(a^2b^2)$, а во втором случае среди собственных значений оператора $T(ab^2)$, встретятся повторяющиеся первообразные корни степени 22 из 1, что недопустимо.

Для других групп доказательство проводится аналогичными рассуждениями.

9. Мультипликативные η -произведения и присоединенное представление $SL(5, C)$. В этом пункте мы рассмотрим связи между изучаемыми модулярными формами и представлениями групп с иной точки зрения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Ad – присоединенное представление группы $SL(5, C)$, и $g \in SL(5, C)$, $\text{ord}(g) \neq 3, 6, 9, 21$, таков, что характеристический многочлен оператора $\text{Ad}(g)$ имеет вид

$$P_g(x) = \prod_{k=1}^s (x^{a_k} - 1)^{t_k}, \quad a_k \in \mathbb{N}, \quad t_k \in \mathbb{N}.$$

Тогда соответствующая параболическая форма $\eta_g(z) = \prod_{k=1}^s \eta^{t_k}(a_k z)$ является мультипликативным η -произведением веса $k(g) > 1$, и все мультипликативные η -произведения веса $k(g) > 1$ можно получить этим путем.

Если $\text{ord}(g) = 3, 6, 9, 21$, то этим путем можно получить все мультипликативные η -произведения веса $k(g) > 1$. Кроме этого, в этом соответствии

возникают пять модулярных форм, которые не являются мультипликативными η -произведениями:

$$\eta^4(3z)\eta^{12}(z), \quad \eta^7(3z)\eta^3(z), \quad \eta^2(6z)\eta^6(2z), \quad \eta^2(9z)\eta(3z)\eta^3(z), \quad \eta(21z)\eta^3(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T: SL(5, \mathbb{C}) \rightarrow GL(V)$ – естественное представление $SL(5, \mathbb{C})$ в 5-мерном векторном пространстве V ; $T^*: SL(5, \mathbb{C}) \rightarrow GL(V^*)$ – сопряженное представление.

Рассмотрим представление $T \otimes T^*: SL(5, \mathbb{C}) \rightarrow GL(V \otimes V^*)$. Это представление раскладывается в прямую сумму $T_1 \oplus T_2$, где T_1 – присоединенное представление Ad группы $SL(5, \mathbb{C})$ в 24-мерном пространстве, T_2 – одномерное тождественное представление.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ – собственные значения оператора $T(g)$. Элементы λ_k / λ_m , $1 \leq l, m \leq 5$, являются собственными значениями оператора $T \otimes T^*(g)$. Исключая одно собственное значение, равное 1, получим множество собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$.

Среди собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$ имеется не менее четырех единиц; следовательно, вес ассоциированной с g модулярной формы $\eta_g(z)$ больше 1.

Количество собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$, равных 1, определяется тем, сколько равных собственных значений было у оператора $T(g)$. Это соответствие описывается приведенной ниже таблицей 3. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые значения, разными буквами – разные.

ТАБЛИЦА 3

Собственные значения $T(g)$	Количество единиц среди собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$
(a, b, c, d, e)	4
(a, a, b, c, d)	6
(a, a, b, b, c)	8
(a, a, a, b, c)	10
(a, a, a, b, b)	12
(a, a, a, a, b)	16
(a, a, a, a, a)	24

Исследуем теперь задачу отдельно для каждого порядка от 1 до 24. Единичному элементу соответствует $\eta^{24}(z)$. Через $P_g(x)$ обозначим характеристический многочлен оператора $\text{Ad}(g)$; через ζ_m – первообразный корень степени m из 1; через Φ_m – m -й круговой многочлен. Везде далее через s будем обозначать количество единиц среди собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$. В ходе доказательства будут явно указаны наборы собственных значений для оператора $T(g)$.

Случай $\text{ord}(g) = 2$. Имеем

$$P_g(x) = (x^2 - 1)^k (x - 1)^m, \quad 2k + m = 24, \quad s = k + m, \quad 0 < k, \quad 0 \leq m.$$

Из приведенных в таблице значений этим условиям удовлетворяют лишь $k = 12, m = 0$; $k = 8, m = 8$. Модулярной форме $\eta^{12}(2z)$ соответствует набор собственных значений оператора $T(g)$ $(1, 1, 1, -1, -1)$, а форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$ соответствует $(1, -1, -1, -1, -1)$.

Случай $\text{ord}(g) = 3$. Имеем

$$P_g(x) = (x^3 - 1)^k(x - 1)^m, \quad 3k + m = 24, \quad s = k + m, \quad 0 < k, \quad 0 \leq m.$$

Из приведенных в таблице значений этим условиям удовлетворяют $k = 8, m = 0$; $k = 7, m = 3$; $k = 6, m = 6$; $k = 4, m = 12$. Модулярной форме $f_1 = \eta^8(3z)$ соответствует набор собственных значений $(\zeta_3, \zeta_3, \zeta_3^2, \zeta_3^2, 1)$ оператора $T(g)$, а форме $f_2 = \eta^6(3z)\eta^6(z)$ соответствует $(\zeta_3, \zeta_3, \zeta_3, 1, 1)$. Эти две функции являются мультипликативными η -произведениями. Функции $f_3 = \eta^7(3z)\eta^3(z)$ и $f_4 = \eta^4(3z)\eta^{12}(z)$ не являются мультипликативными η -произведениями. Функции f_3 соответствует набор собственных значений $(\zeta_3, \zeta_3^2, 1, 1, 1)$, f_4 соответствует набор $(\zeta_3, \zeta_3, \zeta_3, \zeta_3, \zeta_3^2)$. Отметим любопытные соотношения

$$f_3^2 = f_1 f_2, \quad f_2^2 = f_1 f_4.$$

Случай $\text{ord}(g) = 4$. Имеем

$$P_g(x) = (x^4 - 1)^k(x^2 - 1)^m(x - 1)^l, \quad 4k + 2m + l = 24, \quad s = k + m + l, \quad 2 \mid (k + m).$$

Характеристический многочлен можно представить в виде произведения круговых многочленов; $P_g = \Phi_4^k \Phi_2^{k+m} \Phi_1^{k+m+l}$.

Рассмотрим характеристический многочлен оператора $\text{Ad}(g^2)$ $P_{g^2} = \Phi_2^{2k} \Phi_1^{2k+2m+l}$. Имеются возможности: $P_{g^2}(x) = (x^2 - 1)^{12}$ или $P_{g^2}(x) = (x^2 - 1)^8(x - 1)^8$.

В первом случае $2k = 12, 2k + 2m + l = 12$, во втором случае $2k = 8, 2k + 2m + l = 16$.

Этим условиям удовлетворяют $k = 6, m = 0, l = 0$; $k = 4, m = 4, l = 0$; $k = 4, m = 2, l = 4$; $k = 4, m = 0, l = 8$.

В последнем случае набор собственных значений должен иметь вид (a, a, a, b, b) . Но в этом случае среди отношений λ_k / λ_m имеется не более двух различных значений, не равных 1, а среди собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$ должны содержаться числа $i, -i, -1$. Получили противоречие. Три других варианта соответствуют мультипликативным η -произведениям. Модулярной форме $\eta^6(4z)$ соответствует набор собственных значений оператора $T(g)$ $(i, -i, -1, -1, 1)$, форме $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$ соответствует $(i, -i, 1, 1, 1)$, а форме $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$ соответствует $(i, -i, i, -i, 1)$.

Случай $\text{ord}(g) = 5$. Имеем

$$P_g(x) = (x^5 - 1)^k(x - 1)^m, \quad 5k + m = 24, \quad s = k + m, \quad 0 < k \leq 4, \quad 0 \leq m.$$

Получим $s = 24 - 4k$; следовательно, $4 \mid s$. Так как среди отношений λ_k / λ_m должно быть не менее 4 различных неединичных значений, то $s \leq 10$. С учетом этих условий возможен единственный вариант $k = 4, m = 4$. Модулярной форме $\eta^4(5z)\eta^4(z)$ соответствует набор собственных значений оператора $T(g)$ $(\zeta_5, \zeta_5, \zeta_5^2, \zeta_5^2, \zeta_5^4)$.

Случай $\text{ord}(g) = 6$. Имеем

$$P_g(x) = (x^6 - 1)^k(x^3 - 1)^m(x^2 - 1)^l(x - 1)^n, \\ 6k + 3m + 2l + n = 24, \quad s = k + m + l + n, \quad k + l - \text{четное}.$$

Так как среди отношений λ_k/λ_m должно быть не менее 5 различных неединичных значений, то $s \leq 10$. С другой стороны, $P_g = \Phi_6^k \Phi_3^{k+m} \Phi_2^{k+l} \Phi_1^{k+m+l+n}$. Рассмотрим характеристический многочлен $P_{g^3} = \Phi_2^{3k+l} \Phi_1^{3k+3m+l+n}$ оператора $\text{Ad}(g^3)$.

Имеются 2 возможности: $P_{g^2}(x) = (x^2 - 1)^{12}$ или $P_{g^2}(x) = (x^2 - 1)^8(x - 1)^8$.

В первом случае $3k + l = 12$, $3k + 3m + l + n = 12$, во втором случае $3k + l = 8$, $3k + 3m + l + n = 16$. Далее рассмотрим характеристический многочлен оператора $\text{Ad}(g^2)$ $P_{g^2} = \Phi_3^{2k+m} \Phi_1^{2k+m+2l+n}$. Имеются 4 возможности: $2k + m = 8$, $2k + m + 2l + n = 8$; $2k + m = 6$, $2k + m + 2l + n = 12$; $2k + m = 4$, $2k + m + 2l + n = 16$; $2k + m = 7$, $2k + m + 2l + n = 10$. Так как при $k = 0$ $l = 8$ или $l = 12$, а $4 \leq m$, то, очевидно, этот случай исключается. Следовательно, и при $\text{ord}(g) = 12, 18, 24$ в разложение $P_g(x)$ должен входить множитель $(x^{\text{ord}(g)} - 1)$. Учитывая все условия, при $0 < k$ получим 4 варианта. Модулярной форме $\eta^4(6z)$ соответствует набор собственных значений оператора $T(g)$ $(\zeta_6, \zeta_6^2, \zeta_6^4, \zeta_6^5, 1)$, форме $\eta^3(6z)\eta^3(2z)$ соответствует $(\zeta_6, \zeta_6^3, \zeta_6^4, \zeta_6^5, 1)$, а форме $\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$ соответствует $(\zeta_6, \zeta_6, \zeta_6^3, \zeta_6^3, \zeta_6^4)$. Эти три модулярные формы являются мультипликативными η -произведениями. Здесь возникает еще одна функция, которая уже не является мультипликативным η -произведением. Это модулярная форма $\eta^2(6z)\eta^6(2z)$. Ей соответствует набор собственных значений $(\zeta_6^2, \zeta_6^2, \zeta_6^4, \zeta_6^5, \zeta_6^5)$.

Случай $\text{ord}(g) = 7$. Имеем

$$P_g(x) = (x^7 - 1)^k(x - 1)^m, \quad 7k + m = 24, \quad s = k + m, \quad 0 < k \leq 3, \quad 0 \leq m.$$

Получим $s = 24 - 6k$; следовательно, $6 \mid s$. Так как среди отношений λ_k/λ_m должно быть не менее 6 различных неединичных значений, то $s \leq 10$. С учетом этих условий возможен единственный вариант $k = 3$, $m = 3$. Модулярной форме $\eta^3(7z)\eta^3(z)$ соответствует набор собственных значений оператора $T(g)$ $(\zeta_7, \zeta_7^2, \zeta_7^4, 1, 1)$.

Случай $\text{ord}(g) = 8$. Имеем

$$P_g(x) = (x^8 - 1)^k(x^4 - 1)^m(x^2 - 1)^l(x - 1)^n, \\ 8k + 4m + 2l + n = 24, \quad s = k + m + l + n, \quad k + m + l - \text{четное};$$

$P_g = \Phi_8^k \Phi_4^{k+m} \Phi_2^{k+m+l} \Phi_1^{k+m+l+n}$. Рассмотрим характеристический многочлен оператора $\text{Ad}(g^4)$ $P_{g^4} = \Phi_2^{4k} \Phi_1^{4k+4m+2l+n}$.

Имеются 2 возможности: $P_{g^4}(x) = (x^2 - 1)^{12}$ или $P_{g^4}(x) = (x^2 - 1)^8(x - 1)^8$.

В первом случае $4k = 12$, $4k + 4m + 2l + n = 12$, во втором случае $4k = 8$, $4k + 4m + 2l + n = 16$.

Этим условиям удовлетворяют $k = 3, m = 0, l = 0, n = 0$; $k = 2, m = 2, l = 0, n = 0$; $k = 2, m = 1, l = 1, n = 2$.

Так как среди собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$ должно быть не менее 4 единиц, то вариант $P_g(x) = (x^8 - 1)^3$ невозможен. Два других варианта соответствуют мультипликативным η -произведениям. Модулярной форме $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$ соответствует набор собственных значений оператора $T(g)$ $(\zeta_8, \zeta_8^3, \zeta_8^5, \zeta_8^7, 1)$, а форме $\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$ соответствует $(\zeta_8^3, \zeta_8^3, \zeta_8^5, \zeta_8^6, \zeta_8^7)$.

Случай $\text{ord}(g) = 9$. Имеем

$$P_g(x) = (x^9 - 1)^k(x^3 - 1)^m(x - 1)^l, \quad 9k + 3m + l = 24, \quad s = k + m + l, \quad 1 \leq k \leq 2.$$

С другой стороны, $P_g = \Phi_9^k \Phi_3^{k+m} \Phi_1^{k+m+l}$. Рассмотрим характеристический многочлен оператора $\text{Ad}(g^3)$ $P_{g^3} = \Phi_3^{3k} \Phi_1^{3k+3m+l}$. Единственный возможный вариант $3k = 6$, $3k+3m+l = 12$. Так как среди отношений λ_k/λ_m должно быть не менее 8 различных неединичных значений, то $s = 4$ или $s = 6$. Пусть $s = 6$. Тогда $k = 2$, $3m+l = 6$, $m+l = 4$. Получим $k = 2$, $m = 1$, $l = 3$. То есть $P_g(x) = (x^9 - 1)^2(x^3 - 1)(x - 1)^3$. Искомый набор собственных значений имеет вид $(\zeta_9, \zeta_9^3, \zeta_9^3, \zeta_9^4, \zeta_9^7)$. Модулярная форма $\eta^2(9z)\eta^3(z)$ не является мультипликативным η -произведением. Пусть $s = 4$. Тогда $k = 2$, $3m+l = 6$, $m+l = 2$. Получим $k = 2$, $m = 2$, $l = 0$. То есть $P_g(x) = (x^9 - 1)^2(x^3 - 1)^2$. Искомый набор собственных значений имеет вид $(\zeta_9^2, \zeta_9^3, \zeta_9^5, \zeta_9^8, 1)$. Модулярная форма $\eta^2(9z)\eta^2(3z)$ является мультипликативным η -произведением.

Случай $\text{ord}(g) = 10$. Имеем

$$P_g(x) = (x^{10} - 1)^k (x^5 - 1)^m (x^2 - 1)^l (x - 1)^n,$$

$$10k + 5m + 2l + n = 24, \quad s = k + m + l + n, \quad 4 \leq s \leq 6, \quad 0 \leq k \leq 2, \quad k + l - \text{четное}.$$

С другой стороны, $P_g = \Phi_{10}^k \Phi_5^{k+m} \Phi_2^{k+l} \Phi_1^{k+m+l+n}$. Рассмотрим характеристический многочлен оператора $\text{Ad}(g^5)$ $P_{g^5} = \Phi_2^{5k+l} \Phi_1^{5k+5m+l+n}$.

Так как при $k = 0$ $m = 4$, а $l = 8$ или $l = 12$, то, очевидно, этот случай исключается. Следовательно, и при $\text{ord}(g) = 20$ в разложение $P_g(x)$ должен входить множитель $(x^{20} - 1)$. При $0 < k$ имеются 2 возможности: $P_{g^5}(x) = (x^2 - 1)^{12}$ или $P_{g^5}(x) = (x^2 - 1)^8(x - 1)^8$.

В первом случае $5k + l = 12$, $5k + 5m + l + n = 12$, во втором случае $5k + l = 8$, $5k + 5m + l + n = 16$. Этим условиям удовлетворяет единственный набор $k = 2$, $m = 0$, $l = 2$, $n = 0$. Модулярной форме $\eta^2(10z)\eta^2(2z)$ соответствует набор собственных значений $(\zeta_{10}^3, \zeta_{10}^4, \zeta_{10}^6, \zeta_{10}^8, \zeta_{10}^9)$ оператора $T(g)$.

Случай $\text{ord}(g) = 11$. Имеем

$$P_g(x) = (x^{11} - 1)^k (x - 1)^m, \quad 11k + m = 24, \quad s = k + m, \quad 0 < k \leq 2, \quad 0 \leq m.$$

Получим $s = 24 - 10k$; следовательно, $2 \mid s$. Так как среди отношений λ_k/λ_m должно быть не менее 10 различных неединичных значений, то $s \leq 6$. С учетом этих условий возможен единственный вариант $k = 2$, $m = 2$. Модулярной форме $\eta^2(11z)\eta^2(z)$ соответствует набор собственных значений $(\zeta_{11}, \zeta_{11}^3, \zeta_{11}^4, \zeta_{11}^5, \zeta_{11}^9)$ оператора $T(g)$.

Случай $\text{ord}(g) = 12$. Имеем

$$P_g(x) = (x^{12} - 1)^k (x^6 - 1)^m (x^4 - 1)^l (x^3 - 1)^n (x^2 - 1)^u (x - 1)^v,$$

$$10k + 5m + 2l + n = 24, \quad s = k + m + l + n, \quad 4 \leq s \leq 6, \quad 0 < k \leq 2, \quad k + l - \text{четное};$$

$$P_g = \Phi_{12}^k \Phi_6^{k+m} \Phi_4^{k+l} \Phi_3^{k+m+n} \Phi_2^{k+m+l+u} \Phi_1^{k+m+l+n+u+v};$$

$$P_{g^6} = \Phi_2^{6k+2l} \Phi_1^{6k+6m+2l+3n+2u+v}.$$

Если $P_{g^6}(x) = (x^2 - 1)^{12}$, то $6k + 2l = 12$. При $k = 2$ $s = 2$. Противоречие. Оставшийся вариант $P_g(x) = (x^{12} - 1)(x^3 - 1)^4$. Тогда $P_{g^2}(x) = (x^6 - 1)^2(x^2 - 1)^6$; $P_{g^3} = (x^4 - 1)^6$. Элементу g^2 соответствует набор собственных значений $(\zeta_6^2, \zeta_6^2, \zeta_6^4, \zeta_6^5, \zeta_6^5)$. Следовательно, среди собственных значений оператора $T(g)$ нет значений 1 и -1 . Элементу g^3

соответствует набор собственных значений $(\zeta_4, \zeta_4^3, -1, -1, 1)$. Следовательно, среди собственных значений оператора $T(g)$ встретятся 2 одинаковых первообразных корня степени 6 из 1. Это противоречит тому, что среди собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$ имеется ровно 4 единицы, и все числа в наборе (a, b, c, d, e) должны быть различны.

Если $P_{g^6}(x) = (x^2 - 1)^8(x - 1)^8$, то $k = 1, l = 1, 6m + 3n + 2u + v = 8$. В этом случае $P_{g^2}(x) = (x^6 - 1)^2(x^3 - 1)^2(x^2 - 1)^2(x - 1)^2$.

С другой стороны, $P_{g^2} = \Phi_6^2 \Phi_3^{4+2m+n} \Phi_2^4 \Phi_1^{4+2m+n+2u+v}$. Получим $2m + n = 2, 2u + v = 2$, а $P_{g^3} = \Phi_4^4 \Phi_2^{4+3m+u} \Phi_1^{4+3m+3n+u+v}$.

Если $P_{g^3}(x) = (x^4 - 1)^4(x^2 - 1)^4$, то $3m + u = 4, 3n + v = 0$. Следовательно, $m = 1, n = 0, u = 1, v = 0$. Модулярной форме $\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$ соответствует набор собственных значений $(\zeta_{12}, \zeta_{12}^3, \zeta_{12}^4, \zeta_{12}^7, \zeta_{12}^9)$. Если $P_{g^3}(x) = (x^4 - 1)^4(x^2 - 1)^2(x - 1)^4$, то $3m + u = 2, 3n + v = 4$. Система уравнений $3m + u = 2, 3n + v = 4, 2m + n = 2, 2u + v = 2$ не имеет решений в неотрицательных целых числах.

Случай $\text{ord}(g) = 14$. Имеем

$$P_g(x) = (x^{14} - 1)^k(x^7 - 1)^m(x^2 - 1)^l(x - 1)^n, \quad 14k + 7m + 2l + n = 24,$$

$s = k + m + l + n$ – количество единиц среди собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$, $k + l$ – число четное. Так как при $k = 0, m = 3, a, l = 8$ или $l = 12$, то, очевидно, этот случай исключается. Пусть $k = 1$. Так как среди отношений λ_k/λ_m должно быть не менее 13 различных неединичных значений, то $s = 4$. С учетом этих условий возможен единственный вариант $k = 1, m = 1, l = 1, n = 1$. Модулярной форме $\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$ соответствует набор собственных значений оператора $T(g)$ $(\zeta_{14}^3, \zeta_{14}^5, \zeta_{14}^7, \zeta_{14}^{13}, 1)$.

Случай $\text{ord}(g) = 15$. Имеем

$$P_g(x) = (x^{15} - 1)^k(x^5 - 1)^m(x^3 - 1)^l(x - 1)^n, \quad 15k + 5m + 3l + n = 24, \quad s = k + m + l + n.$$

Так как при $k = 0, m = 4, a, 6 \leq l$, то, очевидно, этот случай исключается. Пусть $k = 1$. Так как среди отношений λ_k/λ_m должно быть в этом случае не менее 14 различных неединичных значений, то $s = 4$. С учетом этих условий возможен единственный вариант $k = 1, m = 1, l = 1, n = 1$. Модулярной форме $\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$ соответствует набор собственных значений оператора $T(g)$ $(\zeta_{15}, \zeta_{15}^3, \zeta_{15}^4, \zeta_{15}^9, \zeta_{15}^{13})$.

Случай $\text{ord}(g) = 21$. Пусть $k = 0$. Тогда $P_g(x) = (x^7 - 1)^n(x^3 - 1)^m(x - 1)^l, n = 3, 4 \leq m$. Очевидно, этот случай исключается.

Пусть $k = 1$. Тогда $P_g(x) = (x^{21} - 1)^k(x^3 - 1)^m(x - 1)^l, 21k + 3m + l = 24, s = k + m + l$. Так как среди отношений λ_k/λ_m должно быть не менее 20 различных неединичных значений, то $s = 4$. Возможен единственный вариант $k = 1, m = 0, l = 3$. Модулярной форме $\eta(21z)\eta^3(z)$ соответствует набор собственных значений оператора $T(g)$ $(\zeta_{21}^3, \zeta_{21}^6, \zeta_{21}^7, \zeta_{21}^{12}, \zeta_{21}^{14})$. Эта модулярная форма не является мультипликативным η -произведением.

Случаи $\text{ord}(g) = 13, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24$. В этих случаях в разложение $P_g(x)$ должен входить множитель $(x^{\text{ord}(g)} - 1)$. В случае $\text{ord}(g) = 22$, если это не так, то в разложение $P_g(x)$ должен входить множитель $(x^2 - 1)$ в степени 8 или 12, что невозможно. Для остальных порядков это либо очевидно, либо обсуждалось ранее. Так как среди собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$ должно быть не менее 4 единиц, то исключается вариант $\text{ord}(g) = 22, 23, 24$.

Пусть $\text{ord}(g) = 16$. Тогда $P_g(x) = (x^{16} - 1)^k (x^8 - 1)^m (x^4 - 1)^l (x^2 - 1)^n (x - 1)^t$, $k = 1$, $8m + 4l + 2n + t = 8$, $s = m + l + n + t + 1$ – количество единиц среди собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$, $4 \leq s \leq 6$; с другой стороны, $P_g = \Phi_{16} \Phi_8^{1+m} \Phi_4^{1+m+l} \Phi_2^{1+m+l+n} \times \Phi_1^{1+m+l+n+t}$. Условие $8m + 4l + 2n + t = 8$ показывает, что возможны два случая: $m = 1$ или $m = 0$. В первом случае $s = 2$. Рассмотрим $P_{g^2}(x) = \Phi_8^2 \Phi_4^{2+2m} \Phi_2^{2+2m+2l} \times \Phi_1^{2+2m+2l+2n+t}$. Допустимые возможности: $P_{g^2} = (x^8 - 1)^2 (x^4 - 1)^2$ или $P_{g^2}(x) = (x^8 - 1)^2 (x^4 - 1)(x^2 - 1)(x - 1)^2$. При $m = 0$ оба эти варианта невозможны.

Пусть $\text{ord}(g) = 18$. Тогда $P_g(x) = (x^{18} - 1)^k (x^6 - 1)^m (x^3 - 1)^l (x^2 - 1)^n (x - 1)^t$, $k = 1$, $6m + 3l + 2n + t = 6$, $s = m + l + n + t + 1$ – количество единиц среди собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$, $4 \leq s$.

Условие $6m + 3l + 2n + t = 6$ показывает, что возможны два случая: $m = 1$ или $m = 0$. В первом случае $s = 2$. Рассмотрим $P_{g^2} = \Phi_9^2 \Phi_3^{2+2m+l} \Phi_1^{2+2m+l+2n+t}$. Допустимы две возможности: $P_{g^2}(x) = (x^9 - 1)^2 (x^3 - 1)^2$ или $P_{g^2}(x) = (x^9 - 1)^2 (x^3 - 1)(x - 1)^3$. В первом случае получим $2m + l = 2$. При $m = 0$ $s = 3$, а при $m = 1$ $s = 2$. Во втором случае получим $2m + l = 1$. Тогда $k = 1$, $l = 1$, $t = 3$ или $k = 1$, $l = 1$, $n = 1$, $t = 1$. Первый из этих вариантов дает недопустимое значение $s = 5$. Рассмотрим второй вариант. Имеем $P_g(x) = (x^{18} - 1)(x^3 - 1)(x^2 - 1)(x - 1)$, $P_{g^6}(x) = (x^3 - 1)^6 (x - 1)^6$; $P_{g^9}(x) = (x^2 - 1)^8 (x - 1)^8$.

Элементу g^9 соответствует набор собственных значений $(1, -1, -1, -1, -1)$. Элементу g^2 соответствует набор собственных значений $(\zeta_9, \zeta_9^3, \zeta_9^5, \zeta_9^7, \zeta_9^8)$. Так как $s = 4$, все собственные значения оператора $T(g)$ различны. Поэтому среди них встретятся один корень 6-й степени из 1 и один корень 3-й степени из 1. Учитывая эти два соответствия, получаем, что среди собственных значений $T(g)$ имеется еще три первообразных корня 18-й степени из 1. Так как g^6 соответствует набор $(\zeta_3, \zeta_3, \zeta_3, 1, 1)$, эти три первообразных корня степени 18 из 1 при возведении в 6 степень дают одинаковые значения. Но тогда среди собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$ пара (ζ_3, ζ_3^2) встретится 3 раза, что противоречит виду $P_g(x)$.

Пусть $\text{ord}(g) = 20$. Так как количество единиц среди собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$ не менее 4, надо рассмотреть единственный вариант $P_g(x) = (x^{20} - 1)(x^2 - 1) \times (x - 1)^2$. Но в этом случае $P_{g^2} = (x^{10} - 1)^2 (x - 1)^4$, что не допускается.

Остается рассмотреть случаи, когда

- 1) $P_g(x) = (x^{13} - 1)(x - 1)^{11}$;
- 2) $P_g(x) = (x^{17} - 1)(x - 1)^7$;
- 3) $P_g(x) = (x^{19} - 1)(x - 1)^5$.

В первом случае среди собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$ должно быть 12 единиц, и соответствующий набор собственных значений имеет вид (a, a, a, b, b) . Тогда среди неединичных собственных значений оператора будет не более 2 различных, а необходимо получить 12. Во втором случае среди собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$ должно быть 8 единиц, что невозможно. В третьем случае среди собственных значений оператора $\text{Ad}(g)$ должно быть 6 единиц, и соответствующий набор собственных значений имеет вид (a, a, b, c, d) . Тогда среди неединичных собственных значений оператора будет не более 12 различных, а необходимо получить 18.

Таким образом, для элементов, порядок которых равен 13, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, невозможно построить соответствие, удовлетворяющее условию теоремы.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Воскресенская Г. В. Метациклические группы и модулярные формы // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 2. С. 18–25.
- [2] Воскресенская Г. В. Конечные группы и мультипликативные η -произведения // Вестник СамГУ. 2000. Т. 16. С. 18–25.
- [3] Dummit D., Kisilevsky H., McKay J. Multiplicative products of η -functions // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 89–98.
- [4] Mason G. Finite groups and Hecke operators // Math. Ann. 1989. V. 282. P. 381–409.
- [5] Mason G. M_{24} and certain automorphic forms // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 223–244.
- [6] Koike M. On McKay's conjecture // Nagoya Math. J. 1984. V. 95. P. 85–89.
- [7] Kondo T. Examples of multiplicative η -products // Sci. Pap. Coll. Arts and Sci. Univ. Tokyo. 1986. V. 35. P. 133–149.
- [8] Martin Y., Ken O. Eta-quotients and elliptic curves // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125. № 11. P. 3169–3176.
- [9] Gordon B., Sinor S. Multiplicative properties of η -products // Lecture Notes in Math. V. 1395: Springer-Verlag, 1989. P. 173–200.
- [10] Воскресенская Г. В. Модулярные формы и представления групп диэдра // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 1. С. 130–133.
- [11] Коксетер К. С. М., Мозер У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980.
- [12] Воскресенская Г. В. Параболические формы и конечные подгруппы в $SL(5, \mathbb{C})$ // Функцион. анализ и его прил. 1995. Т. 29. № 2. С. 1–73.
- [13] Воскресенская Г. В. Модулярные формы и регулярные представления групп порядка 24 // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 2. С. 292–294.
- [14] Voskresenskaya G. V. One special class of modular forms and group representations // J. Théor. Nombres Bordeaux. 1999. V. 11. P. 247–262.

Самарский государственный университет
E-mail: vosk@info.ssu.samara.ru

Поступило
28.02.2002