Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Дашевич, Характеристические свойства почти эрмитовых структур на однородных редуктивных пространствах, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 676–683

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm214>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 11:16:53

УДК 514.765

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ СТРУКТУР НА ОДНОРОДНЫХ РЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

О. В. Дашевич

Рассматриваются однородные редуктивные почти эрмитовы пространства. При выполнении на них одного простого алгебраического условия получены критерии, позволяющие в простой форме описать келеровы, приближенно келеровы, почти келеровы, квазикелеровы структуры, а также G_1 -структуры. При этом обнаружено, что в таком случае келеровы структуры возможны только на локально симметрических пространствах, а приближенно келеровы структуры – на естественно редуктивных пространствах. Почти келеровы, квазикелеровы и G_1 -структуры описаны с помощью простых условий, налагаемых на функцию Номидзу α римановой связности однородного редуктивного почти эрмитова пространства.

Библиография: 14 названий.

Классификация Грея и Хервеллы [1] почти эрмитовых структур позволила выделить 16 классов таких структур. Интенсивно изучаемыми классами являлись и являются келеровы структуры, приближенно келеровы и квазикелеровы структуры, а также почти келеровы и G_1 -структуры. Напомним, что почти эрмитова структура J на римановом многообразии M с римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ называется *келеровой* (K -), если $\nabla J = 0$, где ∇ обозначает риманову связность метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Если же для всех X из модуля гладких векторных полей $\mathcal{X}(M)$ на многообразии M выполняется $(\nabla_X J)X = 0$, структура называется *приближенно келеровой* (NK -). Структура J называется *квазикелеровой* (QK -), если $(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY = 0$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, и G_1 -структурой, если $\langle N(X, Y), X \rangle = 0$, где $N(X, Y)$ – тензор Нейенхейса структуры J . Структура J будет называться *почти келеровой* (AK -), если замкнута фундаментальная 2-форма $F(X, Y) = \langle X, JY \rangle$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Исследования регулярного Φ -пространства порядка 3, проведенные в [2] и [3], показали, что на таком пространстве выполняется равенство

$$J_0[X, Y]_m = -[X, J_0Y]_m, \quad (1)$$

где J_0 – оператор канонической почти комплексной структуры регулярного Φ -пространства порядка 3 [3]. К регулярным Φ -пространствам и структурам на них мы еще вернемся в нашей статье, а теперь отметим, что выполнение этого равенства для почти эрмитовой структуры J на однородном редуктивном пространстве G/H позволяет сразу указать на принадлежность J к классу QK -структур [2]. Более того, в случае, когда почти

эрмитово пространство G/H естественно редуцитивно, указанное равенство выполняется в том и только том случае, если J является NK -структурой [2]. При этом структура J на G/H будет NK -структурой тогда и только тогда, когда она QK -структура.

Отсюда видно, что при выполнении определенных условий на однородных редуцированных пространствах задача выделения тех или иных классов почти эрмитовых структур должна существенно упроститься.

Пусть однородное многообразие M является однородным редуцитивным почти эрмитовым пространством G/H с инвариантной почти эрмитовой структурой J , инвариантной римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и ее римановой связностью ∇ . Редуцитивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G имеет вид $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли группы H . Через $X_{\mathfrak{h}}$ и $X_{\mathfrak{m}}$ обозначим проекции вектора $X \in \mathfrak{g}$ на подпространства $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно относительно редуцитивного разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, а через J_0 – оператор почти эрмитовой структуры J на $\mathfrak{m}$. Напомним, что тензор кручения структуры J на G/H записывается в следующем виде (см. [4, с. 204]):

$$N(X, Y) = [J_0 X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}} - J_0[X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}} - J_0[J_0 X, Y]_{\mathfrak{m}} - [X, Y]_{\mathfrak{m}}, \quad X, Y \in \mathfrak{m}. \quad (2)$$

Известно также (см. [4, с. 187]), что функция Номидзу α римановой связности ∇ имеет вид

$$\alpha(X, Y) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + U(X, Y), \quad (3)$$

где $X, Y \in \mathfrak{m}$, а $U: \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ – билинейное симметрическое отображение, определяемое формулой

$$2\langle U(X, Y), Z \rangle = \langle [Z, Y]_{\mathfrak{m}}, X \rangle + \langle [Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{m}. \quad (4)$$

В первой части этой статьи получены критерии, позволяющие в простой форме описать K -, NK -, AK -, QK - и G_1 -структуры на G/H при выполнении для всех $X \in \mathfrak{m}$ следующего равенства:

$$[X, J_0 X]_{\mathfrak{m}} = 0. \quad (5)$$

Во второй части статьи приводятся некоторые условия и примеры, показывающие, в каких случаях равенство (5) имеет место.

1. Основная теорема. Легко убедиться, что равенство (5) следует непосредственно из равенства (1). Также нетрудно видеть, что для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$ (5) равносильно равенствам

$$[X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}} = [J_0 X, Y]_{\mathfrak{m}} \quad (6)$$

и

$$[X, Y]_{\mathfrak{m}} = -[J_0 X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}}. \quad (7)$$

Воспользовавшись специальными векторными полями на G/H , аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 7 в [3], можно показать, что почти эрмитова структура J на G/H будет являться последовательно K -структурой, NK -структурой

и QK -структурой тогда и только тогда, когда для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ выполняются соответственно следующие равенства:

$$J_0\alpha(X, Y) = \alpha(X, J_0Y), \quad (8)$$

$$J_0\alpha(X, X) = \alpha(X, J_0X), \quad (9)$$

$$\alpha(X, Y) + \alpha(J_0X, J_0Y) + J_0\alpha(X, J_0Y) - J_0\alpha(J_0X, Y) = 0, \quad (10)$$

где α – функция Номидзу римановой связности ∇ на G/H . Точно так, J будет являться G_1 -структурой тогда и только тогда, когда для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$

$$\langle N(X, Y), X \rangle = 0. \quad (11)$$

Основной результат статьи содержит следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть G/H – однородное редуктивное пространство с инвариантной почти эрмитовой структурой J и инвариантной римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть для всех $X \in \mathfrak{m}$ выполняется равенство (5). Тогда структура J на G/H является

- а) K -структурой тогда и только тогда, когда G/H – локально симметрическое пространство (т.е. $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$);
- б) QK -структурой тогда и только тогда, когда для всех $X \in \mathfrak{m}$

$$U(X, X) = -U(J_0X, J_0X);$$

- в) G_1 -структурой тогда и только тогда, когда для всех $X \in \mathfrak{m}$

$$U(X, X) = U(J_0X, J_0X);$$

- г) NK -структурой тогда и только тогда, когда G/H – естественно редуктивное пространство;
- е) AK -структурой тогда и только тогда, когда для всех X, Y и $Z \in \mathfrak{m}$

$$\langle \alpha(X, Y), Z \rangle = \langle [Z, Y]_{\mathfrak{m}}, X \rangle.$$

Здесь α – функция Номидзу римановой связности ∇ на G/H , а U – билинейное симметрическое отображение из равенства (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть структура J на G/H – келерова. Тогда она интегрируема, т.е. для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ $N(X, Y) = 0$, где $N(X, Y)$ – тензор кручения структуры J . Используя (6) и (7) нетрудно убедиться, что для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ имеет место равенство

$$J_0[X, Y]_{\mathfrak{m}} = [X, J_0Y]_{\mathfrak{m}}. \quad (12)$$

Далее, так как J – келерова структура, то $\nabla J = 0$ и для функции Номидзу α римановой связности ∇ справедливо (8). Приняв во внимание (12), легко видеть, что $J_0 U(X, Y) = U(X, J_0 Y)$. Из (4) и (12) теперь для всех X, Y и $Z \in \mathfrak{m}$ получаем

$$\begin{aligned} 2\langle J_0 U(X, Y), Z \rangle &= -2\langle U(X, Y), J_0 Z \rangle = -\langle [J_0 Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle - \langle [J_0 Z, Y]_{\mathfrak{m}}, X \rangle \\ &= -\langle [X, Z]_{\mathfrak{m}}, J_0 Y \rangle + \langle [Z, Y]_{\mathfrak{m}}, J_0 X \rangle \end{aligned}$$

и

$$2\langle U(X, J_0 Y), Z \rangle = \langle [Z, X]_{\mathfrak{m}}, J_0 Y \rangle + \langle [Z, J_0 Y]_{\mathfrak{m}}, X \rangle = -\langle [X, Z]_{\mathfrak{m}}, J_0 Y \rangle - \langle [Z, Y]_{\mathfrak{m}}, J_0 X \rangle.$$

Сравнивая оба выражения, видим, что $\langle [Z, Y]_{\mathfrak{m}}, J_0 X \rangle = 0$. В силу произвольности выбора X, Y и Z и невырожденности метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ получаем, что $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{m}} = \{0\}$, т.е. G/H – локально симметрическое пространство. Обратно, если G/H – локально симметрическое пространство, то из (3) и (4) получаем, что функция Номидзу α римановой связности ∇ на G/H равна нулю. Тем самым, для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ выполняется равенство (8), т.е. структура J является келеровой. Таким образом, утверждение а) теоремы доказано.

б) Пусть J на G/H – QK -структура. Тогда из (10) и (3) для любых $X \in \mathfrak{m}$ нетрудно получить, что $U(X, X) + U(J_0 X, J_0 X) = -J_0[X, J_0 X]_{\mathfrak{m}}$. Так как выполнено (5), получаем, что $U(X, X) = -U(J_0 X, J_0 X)$. Обратно, из этого равенства, представив вектор X в виде $X = X + Y$ и учитывая, что отображение U симметрическое, получим для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ $U(X, Y) = -U(J_0 X, J_0 Y)$. Приняв во внимание (5), находим, что $\alpha(X, Y) = -\alpha(J_0 X, J_0 Y)$. Из последнего равенства легко теперь вывести равенство (10), которое равносильно тому, что J является QK -структурой.

с) Из (4) находим, что $\langle U(X, X), Y \rangle = -\langle [X, Y]_{\mathfrak{m}}, X \rangle$ и

$$\langle U(J_0 X, J_0 X), Y \rangle = \langle [Y, J_0 X]_{\mathfrak{m}}, J_0 X \rangle = \langle J_0[X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}}, X \rangle$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$. Следовательно, $U(X, X) = U(J_0 X, J_0 X)$ тогда и только тогда, когда $\langle -[X, Y]_{\mathfrak{m}} - J_0[X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}}, X \rangle = 0$. Учитывая (6) и (7), имеем

$$N(X, Y) = -2[X, Y]_{\mathfrak{m}} - 2J_0[X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}}.$$

В этом случае равенство $\langle N(X, Y), X \rangle = 0$ равносильно выполнению равенства $U(X, X) = U(J_0 X, J_0 X)$. Тем самым, доказательство утверждения с) теоремы завершено.

д) Пусть структура J на G/H приближенно келерова. Тогда она одновременно является QK - и G_1 -структурой [1]. Из доказанных выше утверждений б) и с) теоремы теперь следует, что для всех $Z \in \mathfrak{m}$ $U(Z, Z) = 0$. Положим $Z = X + Y$. Тогда $U(X, Y) + U(Y, X) = 0$, откуда в силу симметричности отображения U получаем, что $U(X, Y) = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$. Следовательно, G/H является естественно редуктивным пространством.

Обратно, если G/H – естественно редуктивное пространство и выполнено (5), то, как показано в [2], структура J приближенно келерова.

Утверждение d) теоремы доказано.

е) Известно (см., например, [5]), что фундаментальная 2-форма F замкнута, если и только если циклическая сумма по X, Y и $Z \in \mathcal{X}(M)$ $\sum_{XYZ} \langle (\nabla_X J)Y, Z \rangle$ равна нулю. В нашем случае это равносильно выполнению для всех X, Y и $Z \in \mathfrak{m}$ следующего равенства:

$$\begin{aligned} & \langle J_0 \alpha(X, Y) - \alpha(X, J_0 Y), Z \rangle + \langle J_0 \alpha(Y, Z) - \alpha(Y, J_0 Z), X \rangle \\ & + \langle J_0 \alpha(Z, X) - \alpha(Z, J_0 X), Y \rangle = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (3) и (4) получаем следующее выражение для функции Номидзу α связности ∇ :

$$2\langle \alpha(X, Y), Z \rangle = \langle [X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z \rangle - \langle [Y, Z]_{\mathfrak{m}}, X \rangle - \langle [X, Z]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle. \quad (14)$$

Учитывая (5), легко убедиться, что

$$\begin{aligned} & \langle J_0 \alpha(X, Y) - \alpha(X, J_0 Y), Z \rangle \\ & = \langle [Y, J_0 Z]_{\mathfrak{m}}, X \rangle + \frac{1}{2} (\langle [X, J_0 Z]_{\mathfrak{m}} - J_0 [X, Z]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle + \langle J_0 [X, Y]_{\mathfrak{m}} - [X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}}, Z \rangle). \end{aligned}$$

Расписав подобным образом два остальных слагаемых из равенства (13), находим, что (13) равносильно равенству

$$\langle [X, Y]_{\mathfrak{m}}, J_0 Z \rangle + \langle [Y, Z]_{\mathfrak{m}}, J_0 X \rangle + \langle [Z, X]_{\mathfrak{m}}, J_0 Y \rangle = 0. \quad (15)$$

Заменив в (15) векторы X, Y и Z на $J_0 X, J_0 Y$ и $J_0 Z$ соответственно и применив (6) и (7), получим, что (15) равносильно равенству

$$\langle [X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z \rangle + \langle [Y, Z]_{\mathfrak{m}}, X \rangle + \langle [Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle = 0.$$

Приняв во внимание (14), окончательно получаем, что (13) равносильно равенству

$$\langle \alpha(X, Y), Z \rangle = \langle [Z, Y]_{\mathfrak{m}}, X \rangle.$$

Утверждение е) теоремы доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение d) теоремы 1 можно рассматривать как обобщение известного результата А. Грея, доказанного в [6] для однородных Φ -пространств порядка 3.

Как уже упоминалось выше, равенство (5) на однородном редуктивном пространстве G/H выполняется, если на нем выполнено равенство (1). В связи с этим естественно возникает вопрос о совпадении классов однородных редуктивных пространств, удовлетворяющих равенствам (1) и (5) соответственно. В случае почти эрмитовых однородных редуктивных пространств этот вопрос проясняет

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть G/H – однородное редуктивное пространство с инвариантной почти эрмитовой структурой J и инвариантной римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть для всех $X \in \mathfrak{m}$ выполняется равенство (5). Тогда равенство (1) на G/H выполняется в том и только том случае, когда структура J является QK -структурой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть на G/H для всех $X \in \mathfrak{m}$ выполняется равенство (1). Тогда, как показано в [2], структура J является QK -структурой. Обратно, если структура J является QK -структурой на G/H , то из (10) для всех X, Y и $Z \in \mathfrak{m}$ получаем

$$\langle \alpha(X, Y), Z \rangle + \langle \alpha(J_0 X, J_0 Y), Z \rangle - \langle \alpha(X, J_0 Y), J_0 Z \rangle + \langle \alpha(J_0 X, Y), J_0 Z \rangle = 0,$$

где α – функция Номидзу римановой связности ∇ на G/H . Применив к каждому слагаемому в этом равенстве выражение (14) для функции Номидзу α , находим

$$\begin{aligned} & \langle [X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z \rangle - \langle [Y, Z]_{\mathfrak{m}}, X \rangle - \langle [X, Z]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle \\ & + \langle [J_0 X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}}, Z \rangle - \langle [J_0 Y, Z]_{\mathfrak{m}}, J_0 X \rangle - \langle [J_0 X, Z]_{\mathfrak{m}}, J_0 Y \rangle \\ & - \langle [X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}}, J_0 Z \rangle + \langle [J_0 Y, J_0 Z]_{\mathfrak{m}}, X \rangle + \langle [X, J_0 Z]_{\mathfrak{m}}, J_0 Y \rangle \\ & + \langle [J_0 X, Y]_{\mathfrak{m}}, J_0 Z \rangle - \langle [Y, J_0 Z]_{\mathfrak{m}}, J_0 X \rangle - \langle [J_0 X, J_0 Z]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Учитывая (6) и (7), отсюда легко получаем равенство $\langle J_0[Y, J_0 Z]_{\mathfrak{m}} - [Y, Z]_{\mathfrak{m}}, X \rangle = 0$. В силу произвольности выбора X, Y и Z мы можем записать теперь, что для любых X, Y и $Z \in \mathfrak{m}$ на G/H справедливо равенство

$$\langle J_0[X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}} - [X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z \rangle = 0. \quad (16)$$

Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$

$$J_0[X, J_0 Y]_{\mathfrak{m}} - [X, Y]_{\mathfrak{m}} = 0,$$

что, как нетрудно заметить, равносильно выполнению на G/H условия (1). Предложение доказано.

2. Регулярные почти эрмитовы Φ -пространства. Обратимся к уже упоминавшимся выше регулярным Φ -пространствам и попытаемся отыскать те из них, которые обладают почти комплексной структурой J такой, что для нее выполняется равенство (5). Сначала вспомним некоторые факты. Однородное пространство G/H называют *однородным Φ -пространством* [7], если Φ является аналитическим автоморфизмом связной группы Ли G , а H – ее замкнутая подгруппа, удовлетворяющая условию $G_0^\Phi \subset H \subset G^\Phi$, где G_0^Φ – связная компонента единицы подгруппы G^Φ неподвижных точек автоморфизма Φ . Однородное Φ -пространство G/H называют *периодическим порядка n* , если существует натуральное число $n > 1$ такое, что $\Phi^n = \text{id}$, причем n – наименьшее число, удовлетворяющее этому условию. Обозначим дифференциал автоморфизма Φ в точке e через φ : $\varphi = d\Phi_e$, и рассмотрим в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G линейный оператор $A_\varphi = \varphi - \text{id}$. Разложение Фиттинга алгебры $\mathfrak{g}$, соответствующее A_φ , есть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$, где через $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{g}_1$ обозначены 0-компонента и 1-компонента соответственно. Однородное Φ -пространство G/H будет называться *регулярным Φ -пространством* [7], [8], если $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ является алгеброй Ли группы Ли H . Как показано в [8], всякое периодическое однородное Φ -пространство является регулярным Φ -пространством.

Известно также [8], что регулярное Φ -пространство G/H является однородным редуктивным пространством и каноническое редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} = A_\varphi \mathfrak{g}.$$

Обозначим через θ ограничение φ на подпространство $\mathfrak{m}$, отождествленное с касательным пространством к G/H в точке $p_0 = H$. *Аффинорной структурой* на многообразии называется тензорное поле типа (1.1). Обозначим через F_0 значение аффинорной структуры F на G/H в точке $p_0 = H$. Говорят, что инвариантная относительно G аффинорная структура F на регулярном Φ -пространстве G/H является *канонической* [7], если ее значение F_0 в точке $p_0 = H$ есть полином от θ . В [7] подробно рассмотрены условия существования на регулярных Φ -пространствах канонических инвариантных аффинорных структур, в частности, почти комплексных. Ранее в [9] было также рассмотрено подпространство $\mathfrak{m}^\varphi \subset \mathfrak{g}$, порожденное векторами вида $[X, \theta X]$, $X \in \mathfrak{m}$. То, какой интерес подпространство $\mathfrak{m}^\varphi$ представляет для наших исследований, показывает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть G/H – регулярное Φ -пространство, допускающее каноническую почти комплексную структуру J . Если для канонического редуктивного разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ выполняется условие $\mathfrak{m}^\varphi \subset \mathfrak{h}$, то на $\mathfrak{m}$ справедливо равенство (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко убедиться в том, что равенство $[X, \theta X]_{\mathfrak{m}} = 0$ равносильно равенству $[\theta X, Y]_{\mathfrak{m}} = [X, \theta Y]_{\mathfrak{m}}$, где $X, Y \in \mathfrak{m}$. Тогда

$$[X, \theta^2 X]_{\mathfrak{m}} = [X, \theta(\theta X)]_{\mathfrak{m}} = [\theta X, \theta X]_{\mathfrak{m}} = 0.$$

Далее, $[X, \theta^3 X]_{\mathfrak{m}} = [\theta X, \theta^2 X]_{\mathfrak{m}} = \theta[X, \theta X]_{\mathfrak{m}} = 0$. Аналогично $[X, \theta^k X]_{\mathfrak{m}} = 0$ для любого натурального числа k . Так как структура J на G/H каноническая, т.е. оператор J_0 является полиномом от θ , то $[X, J_0 X]_{\mathfrak{m}} = 0$.

Из предложения 2 следует теперь

ТЕОРЕМА 2. Пусть G/H – регулярное Φ -пространство с канонической почти эрмитовой структурой J и инвариантной римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ такое, что $\mathfrak{m}^\varphi \subset \mathfrak{h}$. Тогда на G/H справедливы утверждения а), б), с), d) и е) теоремы 1.

Известными примерами регулярного Φ -пространства с канонической почти комплексной структурой J являются однородные Φ -пространства порядка 3 и 5 [7]. При этом на однородном Φ -пространстве порядка 3 $\mathfrak{m}^\varphi \subset \mathfrak{h}$ всегда [10]. Условия, при которых $\mathfrak{m}^\varphi \subset \mathfrak{h}$, были найдены также и для хорошо исследованного в [11] и [12] однородного Φ -пространства порядка 5. Остается заметить, что любое периодическое однородное (псевдо) риманово Φ -пространство с канонической почти комплексной структурой есть почти эрмитово пространство. Это показано в [13].

В [3] было доказано, что на однородном Φ -пространстве порядка 3 каноническая связность редуктивного пространства является единственной почти комплексной связностью (т.е. $\nabla J = 0$), инвариантной относительно действий группы G и диффеоморфизма D , определяемого формулой

$$D: G/H \rightarrow G/H: xH \rightarrow \Phi(x)H.$$

В [14] было установлено, что равенство (1) всегда выполняется на произвольном регулярном Φ -пространстве с единственной инвариантной относительно G и D почти комплексной связностью, а именно, почти комплексной канонической связностью редуктивного пространства. Но, как было отмечено выше, равенство (5) следует из (1). Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть G/H – регулярное Φ -пространство с канонической почти эрмитовой структурой J и инвариантной римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть каноническая связность редуктивного пространства является единственной почти комплексной аффинной связностью на G/H , инвариантной относительно G и D . Тогда на G/H справедливы утверждения а), б), с), d) и е) теоремы 1.

Автор благодарен рецензенту за ряд ценных замечаний. В частности, доказанное в работе предложение 1 инициировано естественным вопросом рецензента о совпадении классов пространств, определяемых равенствами (1) и (5).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gray A., Hervella L. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Math. Pura Appl. 1980. V. 123. P. 35–58.
- [2] Wolf J., Gray A. Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms // J. Diff. Geometry. 1968. V. 2. № 1–2. P. 77–114, 115–159.
- [3] Степанов Н. А. Однородные 3-циклические пространства // Изв. вузов. Матем. 1967. № 12. С. 65–74.
- [4] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.
- [5] Hervella L., Vidal E. Nouvelles géométries pseudo-kähleriennes G_1 et G_2 // C. R. Acad. Sci. Paris. 1976. V. 283. P. 115–118.
- [6] Gray A. Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3 // J. Diff. Geometry. 1972. V. 7. № 3–4. P. 343–369.
- [7] Балащенко В. В., Степанов Н. А. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ -пространствах // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 11. С. 3–34.
- [8] Степанов Н. А. Основные факты теории φ -пространств // Изв. вузов. Матем. 1967. № 3. С. 88–95.
- [9] Балащенко В. В. Инвариантные оснащения и индуцированные связности на регулярных Φ -пространствах линейных групп Ли // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23. № 3. С. 209–212.
- [10] Балащенко В. В. Индуцированные связности на однородных 3-циклических пространствах линейных групп Ли // Дифференц. геометрия многообразий фигур. Вып. 18. Калининград, 1987. С. 10–13.
- [11] Балащенко В. В., Чурбанов Ю. Д. Инвариантные структуры на однородных Φ -пространствах порядка 5 // УМН. 1990. Т. 45. № 1. С. 169–170.
- [12] Чурбанов Ю. Д. О некоторых классах однородных Φ -пространств порядка 5 // Изв. вузов. Матем. 1992. № 3. С. 88–90.
- [13] Balashchenko V. Riemannian geometry of canonical structures on regular Φ -spaces // Bochum. Fakultät für Mathematik der Ruhr. Preprint Nr. 174/1994: Universität Bochum. P. 1–19.
- [14] Дашевич О. В. Канонические структуры классического типа на регулярных Φ -пространствах и инвариантные аффинные связности // Изв. вузов. Матем. 1998. № 10. С. 23–31.