Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Еловигов, Факторизация однопорожденных формаций, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 684–697

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm215>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:37:18

ФАКТОРИЗАЦИЯ ОДНОПОРОЖДЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

А. Б. Еловигов

В настоящей работе описан широкий класс однопорожжденных факторизуемых расслоенных формаций, включающий в себя композиционные, биканонические и другие виды формаций. В. А. Ведерниковым было предложено с единых позиций изучать расслоенные формации с направлениями β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, где α и γ также некоторые направления. В статье исследуются однопорожжденные факторизуемые расслоенные формации с направлениями из отрезка $[\alpha, \gamma]$, где α, γ – направления биканонической и композиционной формаций соответственно. В частности, изучены все несократимые факторизации однопорожжденных композиционных формаций.

Библиография: 9 названий.

Однопорожжденные формации конечных групп были введены в рассмотрение основателем теории формаций В. Гашюцем в 1963 г. Исследованию факторизуемых однопорожжденных локальных формаций посвящен ряд работ А. Н. Скибы, например, [1], [2]. В книге [3] Скиба описал все возможные факторизации однопорожжденных локальных формаций. Там же был поставлен вопрос об описании всех несократимых факторизаций композиционных формаций [3, вопрос 3.5.21].

В работах [4], [5] В. А. Ведерниковым и М. М. Сорокиной была предложена концепция расслоенных формаций. Это позволило классифицировать уже известные формации и конструировать новые виды формаций с помощью функции направления.

В настоящей работе рассматривается широкий класс расслоенных формаций, включающий в себя композиционные, биканонические и другие типы формаций. Описаны все несократимые факторизации однопорожжденных расслоенных формаций данного класса, у которых первый множитель также является расслоенной формацией. В частности, учитывая предложение 3.5.21 [3], получен полный ответ на вопрос 3.5.21 из [3].

Рассматриваются только конечные группы. Все необходимые определения и обозначения можно найти в [3]–[5]. Приведем только некоторые из них. Через $G = [A]B$ обозначают полупрямое произведение групп A и B ; символами $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_A$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_{cA}$ обозначают соответственно класс всех конечных групп, класс всех конечных A -групп, класс всех конечных простых групп, класс всех конечных разрешимых групп, класс тех конечных групп, у которых все главные A -факторы центральны. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – формации. Тогда $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ обозначает формационное произведение $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ [4]. Формация называется *расслоенной с направлением* φ [4], [5], если $\mathfrak{F} = F(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{G} : G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G))$. Обозначим через $\alpha(\gamma)$ – направление биканонической (композиционной) формации, т.е. $\alpha(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{I}$ и $\alpha(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для

любой абелевой группы $A \in \mathcal{I}$ ($\gamma(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для всех групп $A \in \mathcal{I}$). Направление φ расслоенной формации называют *b-направлением*, если $\varphi(A)\mathfrak{S}_A = \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathcal{I}$; *r-направлением*, если $\varphi(A) = \mathfrak{S}_{A'}\varphi(A)$ для любой $A \in \mathcal{I}$ [4]. На множестве Φ всех функций $\varphi: \mathcal{I} \rightarrow$ (непустые формации Фиттинга) введено *отношение частичного порядка* $\leq$. Для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ полагают $\varphi_1 \leq \varphi_2$, если $\varphi_1(A) \subseteq \varphi_2(A)$ для любой $A \in \mathcal{I}$ [4].

Перейдем к изложению полученных результатов.

Используя методы, разработанные в [4], несложно показать, что выполняется

ЛЕММА 1. Пусть f_1 и f_2 – внутренние спутники расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с *br-направлением* β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Тогда

- 1) $\mathfrak{S}_A f_1(A) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $A \in \mathcal{I} \cap \mathfrak{A}$;
- 2) $\mathfrak{S}_A f_1(A) = \mathfrak{S}_A f_2(A)$ для любого $A \in \mathcal{I} \cap \mathfrak{A}$;
- 3) $\mathfrak{F}$ обладает внутренним спутником g таким, что $g(A) = \mathfrak{F}$, если $A \in \mathcal{I} \setminus \mathfrak{A}$ и $g(A) = \mathfrak{S}_A f_1(A)$ для любого $A \in \mathcal{I} \cap \mathfrak{A}$.

Из леммы 1 непосредственно вытекает

ЛЕММА 2. Пусть f – внутренний спутник расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с *br-направлением* β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний спутник h , причем $h(A) = \mathfrak{F}$, если $A \in \mathcal{I} \setminus \mathfrak{A}$ и $h(A) = \mathfrak{S}_A h(A) = \mathfrak{S}_A f(A)$ для любого $A \in \mathcal{I} \cap \mathfrak{A}$.

ЛЕММА 3. Пусть f – максимальный внутренний спутник расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с *br-направлением* β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Если $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $f(A)$ также является наследственной для всех $A \in \mathcal{I}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существует $A \in \mathcal{I}$ такая, что найдется $G \in f(A)$, $M < G$ и $M \notin f(A)$, причем G – группа минимального порядка с таким свойством. Тогда $G \neq 1$. Если G – не монолитическая, то существуют две различные минимальные нормальные подгруппы R и N группы G , причем $G/R \in f(A)$ и $G/N \in f(A)$. По индукции $MR/R \in f(A)$ и $MN/N \in f(A)$, а значит $M/(M \cap R \cap N) \cong M \in f(A)$. Противоречие. Следовательно, G – монолитическая группа с монолитом R и $MR/R \in f(A)$. По лемме 2 $f(A) = \mathfrak{F}$ для всех $A \in \mathcal{I} \setminus \mathfrak{A}$, $f(A) = \mathfrak{S}_A f(A)$, если $A \in \mathfrak{A}$. Поэтому A – абелева p -группа. Допустим, что $O_A(G) \neq 1$. Тогда $R \subseteq O_A(G) = O_p(G)$ для некоторого простого числа p . Но в этом случае $M \in \mathfrak{S}_A f(A) = f(A)$. Противоречие. Значит, $O_A(G) = 1$.

По лемме 18.8 [6] существует точный неприводимый $F_p[G]$ -модуль T . Рассмотрим $\Gamma = [T]G$. Поскольку $\Gamma/T \cong G \in f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ и $O_p(\Gamma) \subseteq \Gamma_{\beta(A)}$, по лемме 2 [4] $\Gamma \in \mathfrak{F}$. Так как $TM < \Gamma$, по условию $TM \in \mathfrak{F}$. Тогда $TM/(TM)_{\beta(A)} \in f(A)$. Поскольку $C_\Gamma(T) = T = C_{TM}(T)$ – p -группа, то $(TM)_{\gamma(A)} = F_A(TM) = O_p(TM)$. Значит, $(TM)_{\beta(A)} = O_p(TM) = O_p(TM) \cap TM = T(O_p(TM) \cap M) \subseteq TO_p(M)$. Таким образом, $TM/(TO_p(M)) \cong M/(M \cap TO_p(M)) \cong M/(O_p(M)(M \cap T)) = M/O_p(M) \in f(A)$ и $M \in \mathfrak{S}_A f(A) = f(A)$. Противоречие. В силу произвольности выбора A $f(A)$ – наследственная формация для всех $A \in \mathcal{I}$. Лемма доказана.

Непустое множество формаций θ называется *полной решеткой формаций*, если $\emptyset$, $\mathfrak{S} \in \theta$ и пересечение любой совокупности формаций из θ снова принадлежит θ [7]. Через

θ^β обозначим совокупность всех расслоенных формаций с направлением β , обладающих θ -значным спутником.

ЛЕММА 4. Пусть θ – полная решетка формаций и $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп такой, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H} \in \theta^\beta$ и $\mathfrak{F} = \theta^\beta F(\mathfrak{X})$, где $\varphi_0 \leq \beta$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным θ -значным спутником f , причем $f(A) = \theta \text{form}(G/G_{\beta(A)} \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \mathfrak{I} \setminus K(\mathfrak{X})$.

Доказательство проводится аналогично теореме 5 в [5].

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть f_i – минимальный θ -значный спутник расслоенной формации $\mathfrak{F}_i$ с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть f_i – максимальный внутренний θ -значный спутник расслоенной формации $\mathfrak{F}_i$ с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.

Через $F_n(\mathfrak{X}, \beta)$ будем обозначать n -кратно расслоенную формацию с направлением β , порожденную множеством групп $\mathfrak{X}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mathfrak{F} = F_n(\mathfrak{X}, \beta)$ с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, $n \geq 1$, $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Тогда $K(\mathfrak{F}) = K(\mathfrak{X})$.

ЛЕММА 5. В однопорожденной расслоенной формации $F(G, \beta)$ с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, содержится лишь конечное множество наследственных расслоенных формаций с направлением β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через θ полную решетку всех наследственных формаций. Пусть $\mathfrak{M} = \theta^\beta F(G)$ – пересечение всех расслоенных формаций с направлением β , содержащих G и имеющих хотя бы один θ -значный спутник. Очевидно, что $F(G, \beta) \subseteq \mathfrak{M}$. Покажем, что в $\mathfrak{M}$ содержится лишь конечное число наследственных расслоенных формаций с направлением β .

Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольная наследственная расслоенная формация с направлением β такая, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. По лемме 3 $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один θ -значный спутник. Пусть f и m – минимальные наследственные спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Тогда по следствию 1 $f \leq m$. По лемме 4 $m(A) = \theta \text{form}(G/G_{\beta(A)})$ для всех $A \in K(G)$ и $m(A) = \emptyset$, если $A \in \mathfrak{I} \setminus K(G)$ – однопорожденные формации. Следовательно, по лемме 8.8 в [6] существует лишь конечное множество наследственных спутников $t < m$. Значит в $\mathfrak{M}$, а тем более в $F(G, \beta)$, существует лишь конечное множество наследственных расслоенных формаций с направлением β . Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ – неединичные расслоенные формации с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, а $\mathfrak{H}$ – такая формация, что $K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \not\subseteq K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset$, то множество наследственных расслоенных подформаций с направлением β формации $\mathfrak{F}$ бесконечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z_p \in K(\mathfrak{H}) \setminus K(\mathfrak{M})$. Ясно, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Значит $Z_p \in K(\mathfrak{F})$. По лемме 1 $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть A – произвольная группа из $\mathfrak{N}_p$. Так как $A \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $A^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Но $Z_p \notin K(\mathfrak{M})$. Поэтому $A \in \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $Z_q \in K(\mathfrak{M})$.

Тогда $q \neq p$ и $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{M}$. Для всякого натурального числа n зафиксируем некоторую циклическую группу P_n порядка p^n . Построим регулярное сплетение $Q_n = Z_q \wr P_n$. Обозначим через $\mathfrak{F}_n$ расслоенную формацию с направлением β , порожденную группой Q_n . Группа $Q_n \in \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку группа Q_n метанильпотентна, то $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{N}^2$. Из доказательства теоремы 4 и следствия 4.1 [5] легко видеть, что каждая разрешимая расслоенная формация с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, является локальной формацией. Значит, ввиду леммы 8.10 [6] все расслоенные подформации с направлением β формации $\mathfrak{M}^2$ наследственны. Тогда $\mathfrak{F}_n$ – наследственная расслоенная подформация в $\mathfrak{F}$.

При доказательстве леммы 8.13 [6] было показано, что если n и m – различные натуральные числа, то $\mathfrak{F}_n \neq \mathfrak{F}_m$. Итак, в $\mathfrak{F}$ содержится бесконечное множество наследственных расслоенных подформаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$ с направлением β . Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $\mathfrak{M} = F(m, \beta)$ с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, и $\mathfrak{H}$ – такая непустая формация, что $K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \subseteq K(\mathfrak{M})$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ – расслоенная формация с направлением β , причем она обладает таким спутником f , что $f(A) = m(A)\mathfrak{H}$ для всех $A \in K(\mathfrak{M})$; $f(A) = \mathfrak{H}$, если $A \in K(\mathfrak{H}) \setminus K(\mathfrak{M})$ и $f(A) = \emptyset$ при $A \in \mathfrak{I} \setminus (K(\mathfrak{H}) \cup K(\mathfrak{M}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F}_1 = F(f, \beta)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Возьмем произвольную группу G из $\mathfrak{F}$. Тогда $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Если $A \in K(G^{\mathfrak{H}})$, то $A \in K(\mathfrak{M})$. Из свойств радикала и корадикала получим $(G/G_{\beta(A)})^{\mathfrak{H}} \cong G^{\mathfrak{H}}/(G_{\beta(A)} \cap G^{\mathfrak{H}}) = G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}})_{\beta(A)} \in m(A)$. Отсюда $G/G_{\beta(A)} \in m(A)\mathfrak{H} = f(A)$ для любого $A \in K(G^{\mathfrak{H}})$. Пусть $A \in K(G) \setminus K(G^{\mathfrak{H}})$. Таким образом, $G^{\mathfrak{H}} \subseteq O_{A'}(G) \subseteq G_{\alpha(A)} \subseteq G_{\beta(A)}$. Тогда из того, что $G/G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$, имеем $G/G_{\beta(A)} \in \mathfrak{H} \subseteq f(A)$ для любого $A \in K(G) \setminus K(G^{\mathfrak{H}})$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$ и G – группа минимального порядка с таким свойством. Тогда G – монолитическая с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$.

Из того, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$, получаем $G \notin \mathfrak{H}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{H}} \neq 1$ и $R \subseteq G^{\mathfrak{H}}$. Поскольку $G/R \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $(G/R)^{\mathfrak{H}} \cong G^{\mathfrak{H}}/(R \cap G^{\mathfrak{H}}) = G^{\mathfrak{H}}/R \in \mathfrak{M}$.

Пусть $K(R) = (A)$. Так как $G \in \mathfrak{F}_1$, то $G/G_{\beta(A)} \in f(A) \neq \emptyset$. Если $A \in K(\mathfrak{M})$, то $G/G_{\beta(A)} \in m(A)\mathfrak{H}$, т.е. $(G/G_{\beta(A)})^{\mathfrak{H}} \cong G^{\mathfrak{H}}/(G^{\mathfrak{H}})_{\beta(A)} \in m(A)$. Следовательно, по лемме 2 [4] $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$ и $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Противоречие. Пусть $A \in K(\mathfrak{H}) \setminus K(\mathfrak{M})$. Из условия леммы следует, что A – простая неабелева группа. Тогда $G/G_{\beta(A)} = G/O_{A'}(G) \cong G \in f(A) = \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть формация $\mathfrak{F}$ содержит лишь конечное число попарно неизоморфных формационно критических групп. Тогда если $G^{\mathfrak{F}}$ не имеет фраттиниевых G -главных факторов, то в формации $\mathfrak{M} = F_n(G, \beta)$ имеется лишь конечное число n -кратно расслоенных подформаций с направлением β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по n . Пусть $n = 0$. Тогда $\mathfrak{M} = \text{form } G$. По теореме 3.44 [6] $\mathfrak{M}$ имеет лишь конечное множество подформаций.

Пусть теперь $n > 0$ и лемма верна для $(n - 1)$. Обозначим через t минимальный спутник формации $\mathfrak{M}$. По лемме 4 $m(B) = F_{n-1}(G/G_{\beta(B)}, \beta)$ для любого $B \in K(G)$ и $m(B) = \emptyset$, если $B \in \mathfrak{I} \setminus K(G)$. Ввиду теоремы 3.36 [6] $\mathfrak{F}$ -корадикал группы $G/G_{\beta(B)}$ не содержит фраттиниевых G -главных факторов. Значит, по индукции в

формации $F_{n-1}(G/G_{\beta(B)}, \beta)$ имеется лишь конечное множество $(n-1)$ -кратно расслоенных подформаций с направлением β . Так как множество неизоморфных групп, принадлежащих $K(G)$, конечно, существует лишь конечное число спутников t n -кратно расслоенных формаций с условием $t \leq m$. Применяя теперь следствие 1, заключаем, что в формации $\mathfrak{M}$ содержится лишь конечное множество n -кратно расслоенных подформаций с направлением β . Лемма доказана.

Из следствия 3.48 [6] и леммы 8 вытекает

ЛЕММА 9. Если $\mathfrak{S}$ -корадикал $G^{\mathfrak{S}}$ группы G не имеет фраттиниевых G -главных факторов, то в формации $F_n(G, \beta)$ имеется лишь конечное множество n -кратно расслоенных подформаций с направлением β .

ЛЕММА 10. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – формации и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, причем, по крайней мере одна из формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ разрешима. Если $\mathfrak{F}$ – n -кратно расслоенная формация с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, то она обладает минимальной n -кратно расслоенной не $\mathfrak{H}$ -подформацией с направлением β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно при $\mathfrak{H} = \emptyset$. Пусть $\mathfrak{H} \neq \emptyset$ и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{H}}$. Индукцией по n покажем, что в $\mathfrak{M} = F_n(G, \beta)$ имеется лишь конечное множество n -кратно расслоенных подформаций с направлением β .

Пусть $n = 0$. Тогда $\mathfrak{M} = \text{form } G$. По лемме 19.6 [6] $\mathfrak{M}$ имеет лишь конечное множество подформаций.

Пусть $n > 0$ и лемма верна для $(n-1)$. Используя лемму 9 и методы леммы 8, можно показать, что в формации $\mathfrak{M}$ содержится лишь конечное множество n -кратно расслоенных подформаций с направлением β . Так как при этом $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $(1) \subseteq \mathfrak{H}$, то в $\mathfrak{M}$ можно выбрать такую n -кратно расслоенную подформацию $\mathfrak{K}$ с направлением β , что $\mathfrak{K} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Но $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ для каждой собственной n -кратно расслоенной подформации $\mathfrak{K}_1$ с направлением β из $\mathfrak{K}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 11 (М. М. Сорокина). Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая расслоенная формация с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, h – ее максимальный внутренний спутник. Если расслоенная формация $\mathfrak{F}$ с направлением β является минимальной расслоенной не $\mathfrak{H}$ -формацией, то $\mathfrak{F} = F(G, \beta)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:

- 1) $G = P$ – группа простого порядка;
- 2) P – неабелева группа и $P = G^{h(A)}$;
- 3) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p -группа и $H = [Q]N$ – монолитическая группа с монолитом $Q = H^{h(A)}$ для $A \in K(P)$.

ЛЕММА 12. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная расслоенная не $\mathfrak{N}^n$ -формация с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, $n > 1$. Тогда $\mathfrak{F} = F(G, \beta)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{N}^n}$, что выполняется одно из следующих условий:

- 1) P – неабелева группа;
- 2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p -группа и $H = [Q]N$, причем $C_H(Q) = Q = H^{\mathfrak{N}^{n-1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 и лемме 7 формация $\mathfrak{N}^n$ имеет такой максимальный внутренний спутник h , что $h(Z_p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}^{n-1}$ для всех $Z_p, p \in \mathbb{P}$, и $h(A) = \mathfrak{N}^n$ для любой простой неабелевой группы A . Ввиду леммы 11 имеем, что $\mathfrak{F} = F(G, \beta)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{N}^n}$, что выполняется одно из следующих условий:

(а) P – неабелева группа и $P = G^{h(A)}$ для $A \in K(P)$;

(б) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, а $H \neq 1$ – монолитическая группа с монолитом $Q = H^{h(A)}$ для $A \in K(P)$.

Пусть верно (б). Так как $G/P \cong H \in \mathfrak{N}^n$, то Q абелева. Поскольку $H \notin h(Z_p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}^{n-1}$, то $H \notin \mathfrak{N}$. Но формация $\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}^{n-1}$ локальна, а значит, насыщена. Из того, что $H/Q \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}^{n-1}$, заключаем, что $\Phi(H) = 1$; тогда $H = [Q]N$. Из монолитичности H следует, что $Q = C_H(Q) = F(H)$. Таким образом, $Q = H^{\mathfrak{N}^{n-1}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 13. Пусть h – произвольный спутник расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Тогда для минимального спутника f имеет место: $f(A) = \text{form}(G: G \in h(A) \cap \mathfrak{F} \text{ и } O_B(G) = 1 \text{ для всех } B \in K(\mathfrak{F}) \setminus (A))$, если A – неабелева группа, и $f(A) = \text{form}(G: G \in h(A) \cap \mathfrak{F} \text{ и } O_A(G) = 1)$ для абелевой группы A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 5 [5] $f(A) = \text{form}(G/G_{\beta(A)} \mid G \in \mathfrak{F})$ для любого $A \in K(\mathfrak{F})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \mathcal{J} \setminus K(\mathfrak{F})$. Пусть $A \in K(\mathfrak{F}) \setminus \mathcal{A}$ и $\mathfrak{F}_A = (G: G \in h(A) \cap \mathfrak{F} \text{ и } O_B(G) = 1 \text{ для всех } B \in K(\mathfrak{F}) \setminus (A))$. Если $G \in \mathfrak{F}_A$, то $O_{A'}(G) = G_{\beta(A)} = 1$ и $G/G_{\beta(A)} \cong G \in f(A)$. Таким образом, $\mathfrak{F}_A \subseteq f(A)$. Для любой группы S из $\mathfrak{F}$ выполняется $S/S_{\beta(A)} \in h(A) \cap \mathfrak{F}$. Но $O_B(S/S_{\beta(A)}) = O_B(S/O_{A'}(S)) = 1$ для всех $B \in K(\mathfrak{F}) \setminus (A)$. Тогда $S/S_{\beta(A)} \in \mathfrak{F}_A$ и $f(A) \subseteq \text{form } \mathfrak{F}_A$. Следовательно, $f(A) = \text{form } \mathfrak{F}_A$ для любой неабелевой группы A из $K(\mathfrak{F})$.

Возьмем произвольную группу A из $K(\mathfrak{F}) \cap \mathcal{A}$. Через $\mathfrak{F}_A$ теперь обозначим множество $(G: G \in h(A) \cap \mathfrak{F} \text{ и } O_A(G) = 1)$. Для произвольной группы M из $\mathfrak{F}_A$ рассмотрим регулярное сплетение $\Gamma = A \wr M = [K]M$, где K – база сплетения Γ . Несложно показать, что $O_{A'}(\Gamma) = \Gamma_{\alpha(A)} = K$. Кроме того, по лемме 2 [8] $\Gamma_{\gamma(A)} = F_A(\Gamma) = K$. Тогда $\Gamma/\Gamma_{\beta(A)} = \Gamma/K \cong M \in h(A)$ и, по лемме 1 $\Gamma \in \mathfrak{G}_A h(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Но тогда $\Gamma/\Gamma_{\beta(A)} \cong M \in f(A)$ и, значит, $\mathfrak{F}_A \subseteq f(A)$. С другой стороны, для любой группы N из $\mathfrak{F}$ выполняется $N/N_{\beta(A)} \in h(A) \cap \mathfrak{F}$. Поскольку β является b -направлением, по лемме 6 [4] $O_A(N/N_{\beta(A)}) = 1$. Таким образом, $N/N_{\beta(A)} \in \mathfrak{F}_A$ и $f(A) \subseteq \text{form } \mathfrak{F}_A$. Значит, $f(A) = \text{form } \mathfrak{F}_A$ для любой абелевой группы A из $K(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

Будем обозначать через $\Delta(\mathfrak{F})$ – множество всех попарно неизоморфных групп из $K(\mathfrak{F})$.

ЛЕММА 14. Тогда и только тогда расслоенная формация $\mathfrak{F}$ с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, является однопорожжденной формацией, когда $\Delta(\mathfrak{F})$ – конечное множество и $\mathfrak{F}$ обладает таким внутренним спутником f , что $f(A)$ однопорожждена для всех $A \in \mathcal{J}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. По условию $\mathfrak{F} = F(G, \beta)$ для некоторой группы G . По следствию 3 $K(\mathfrak{F}) = K(G)$. Кроме того, ввиду теоремы 5 [5] формация $\mathfrak{F}$ имеет минимальный спутник f такой, что все его значения будут однопорожжденными формациями.

Достаточность. Пусть $\Delta(\mathfrak{F}) = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$ и существует внутренний спутник f такой, что $f(A)$ – однопорожденная формация для всех $A \in \mathcal{I}$. В частности, $f(A_i) = \text{form}(G_i)$, $i \in 1, 2, \dots, t$. Без ограничения общности можем считать, что $A_1, A_2, \dots, A_n$ – абелевы группы, $n \leq t$, т.е. $A_i \cong Z_{p_i}$ для некоторого $p_i \in \mathbb{P}$, а $A_{n+1}, \dots, A_t$ – простые неабелевы группы. Для всякого $i \in 1, 2, \dots, n$ рассмотрим регулярное сплетение $B_i = A_i \wr (G_i/O_{A_i}(G_i)) = [K_i](G_i/O_{A_i}(G_i))$, где K_i – база сплетения. Пусть $G = B_1 \times \dots \times B_n \times G_{n+1} \times \dots \times G_t$ и $\mathfrak{M} = F(G, \beta)$. Обозначим через m – максимальный внутренний спутник формации $\mathfrak{M}$ и покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$.

Поскольку f – внутренний спутник формации $\mathfrak{F}$, то $G_i \in \mathfrak{F}$. Более того, $B_i/K_i \cong G_i/O_{A_i}(G_i) \in f(A_i)$ и по лемме 1 $B_i \in \mathfrak{G}_{A_i} f(A_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $i \in 1, 2, \dots, n$. Таким образом, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

По лемме 2 $f(A_i) \subseteq m(A_i) = \mathfrak{M}$ для всех $i \in n+1, \dots, t$. Кроме того, для $i \in 1, 2, \dots, n$ выполняется $B_i/(B_i)_{\beta(A_i)} \in m(A_i)$. Заметим, что для $i \in 1, 2, \dots, n$ $(B_i)_{\beta(A_i)} = K_i$. Тогда по лемме 2 $B_i \in \mathfrak{G}_{A_i} m(A_i) = m(A_i)$ и, следовательно, $B_i/K_i \cong G_i/O_{A_i}(G_i) \in m(A_i)$ для всех $i \in 1, 2, \dots, n$. Таким образом, $G_i \in \mathfrak{G}_{A_i} m(A_i) = m(A_i)$ для $i \in 1, 2, \dots, n$. В итоге получили, что $f \leq m$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 15. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ – несократимая факторизация однопорожденной расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, где $\mathfrak{M}$ – также расслоенная формация с направлением β . Тогда $\mathfrak{M}$ – метанильпотентная расслоенная формация.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию для некоторой группы G справедливо $\mathfrak{F} = F(G, \beta)$. Обозначим через f – минимальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

Покажем сначала, что $|\Delta(K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A})| > 1$. Допустим, что существует простая неабелева группа $T \in \mathfrak{M}$. Для произвольной группы H из $\mathfrak{H}$ рассмотрим регулярное сплетение $W = T \wr (H^n) = [K](H^n)$, где K – база сплетения W , а H^n – прямое произведение n экземпляров группы H . По предложению 18.5 [8] группа W монолитична с монолитом $R = K$. Несложно показать, что $W \in \mathfrak{F}$. Тогда по теореме 5 [5] $W/W_{\beta(T)} \cong W/O_{T'}(W) \cong W \in f(T) = \text{form}(G/G_{\beta(T)})$. Но $|R| = |K| = |T|^{|H|^n}$, что противоречит лемме 3.1.5 [3]. Следовательно, все простые группы в формации $\mathfrak{M}$ абелевы и $K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset$.

Допустим, что $K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A} = (Z_p)$. Возьмем группу Y из разности $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$, причем минимальную с таким свойством. Тогда Y – монолитическая группа с монолитом $R = Y^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Как показано выше, каждая простая группа из $\mathfrak{M}$ абелева. Значит, R – элементарная абелева p -группа.

Допустим, что существует $U \in K(\mathfrak{M}) \setminus \mathfrak{A}$. Тогда существует группа $S \in \mathfrak{M}$ такая, что $U \in K(S)$. Без ограничения общности можем считать, что $O_{U'}(S) = 1$. Для произвольного натурального числа m рассмотрим регулярное сплетение $V = S \wr (Y^m/R^m)$. Допустим, что $V \in \mathfrak{F}$. Тогда $V/V_{\beta(U)} \cong V/O_{U'}(V) \cong V \in f(U) = \text{form}(G/O_{U'}(G))$, для любого $m \in \mathbb{N}$. Но это противоречит лемме 3.1.5 [3]. Значит, $V \notin \mathfrak{F}$. Поскольку $V/K \in \mathfrak{H}$, где K – база сплетения V , то $V^{\mathfrak{H}} \subseteq K \in \mathfrak{M}$. Но $V^{\mathfrak{H}}$ не входит подпрямо в K . Обозначим через S_1 – первую копию S в K и V_1 – проекцию $V^{\mathfrak{H}}$ на S_1 . Поскольку $V^{\mathfrak{H}}$ нормальна в V , то V_1 нормальна в S_1 . Так как $V^{\mathfrak{H}}$ не входит подпрямо в K , то $V_1 \neq S_1$ и по лемме 3.1.9 [3] $(S_1/V_1) \wr (Y^m/R^m)$ – гомоморфный образ $V/V^{\mathfrak{H}}$. Таким образом, учитывая лемму 18.2(d) [8], $(S_1/V_1) \wr (Y^m/R^m) \cong V/(V_1)^{\#} \in \mathfrak{H}$. Пусть S_1/X_1 – верхний

фактор главного ряда S_1 , проходящего через V_1 . Тогда, $(X_1)^\#$ – нормальная подгруппа в V и $(V_1)^\# \subseteq (X_1)^\#$. Значит, $V/(X_1)^\# \in \mathfrak{H}$. Поскольку $S_1/X_1 \in \mathfrak{M}$ и S_1/X_1 – простая группа, то $S_1/X_1 \cong Z_p$ и $V/(X_1)^\# \cong Z_p \wr (Y^m/R^m) \in \mathfrak{H}$. Но в этом случае по лемме 3.5.20 [3] $Y^m \in \text{form}(Z_p \wr (Y^m/R^m)) \subseteq \mathfrak{H}$ и $Y \in \mathfrak{H}$. Получили противоречие с выбором Y . Значит, $K(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{A}$. По допущению $K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A} = (Z_p)$. Тогда $K(\mathfrak{M}) = (Z_p)$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}^2$. Противоречие. Следовательно, $|\Delta(K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A})| > 1$.

Приступим теперь непосредственно к доказательству метанильпотентности $\mathfrak{M}$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}^2$. Тогда по лемме 10 в $\mathfrak{M}$ имеется неметанильпотентная расслоенная подформация $\mathfrak{M}_0$ с направлением β , у которой все собственные расслоенные подформации с направлением β метанильпотентны. Причем, по лемме 12 $\mathfrak{M}_0 = F(Z, \beta)$, где группа Z удовлетворяет одному из следующих условий:

(а) $P = Z^{\mathfrak{M}^2}$ – неабелева единственная минимальная нормальная подгруппа в Z ;

(б) $Z = [P]H$, где $P = C_Z(P)$ – p -группа, а $H = [Q]N \neq 1$, причем $Q = C_H(Q) = H^{\mathfrak{M}}$ – монолит группы H . Докажем, что оба эти случая невозможны.

Обозначим через $\mathfrak{F}_1$ формацию $\text{form}(G/G_{\beta(B)})$, где $B \in K(G)$. Тогда $\mathfrak{F}_1 = \text{form}(\Gamma)$ для некоторой группы Γ . Пусть A_1 – произвольная монолитическая группа из $\mathfrak{H}$. Понятно, что $O_{Z_p}(A_1) = 1$ для некоторого $Z_p \in K(\mathfrak{M})$. Значит, $A_1 \in \mathfrak{H} \subseteq m(Z_p)\mathfrak{H}$ и по лемме 13 $A_1 \in f(Z_p) = \text{form}(G/G_{\beta(Z_p)}) \subseteq \mathfrak{F}_1$. Следовательно, всякая монолитическая группа из $\mathfrak{H}$ входит в $\mathfrak{F}_1$. Поэтому $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Пусть M – неединичная группа из $\mathfrak{H}$. Для всякого натурального числа n через G_n обозначим регулярное сплетение $G_n = Z \wr (M^n) = [K](M^n)$, где K – база сплетения. Так как $G_n/K \cong M^n \in \mathfrak{H}$, то $(G_n)^\mathfrak{H} \subseteq K \in \mathfrak{M}$. Пусть D_1 – проекция $(G_n)^\mathfrak{H}$ в первую копию Z_1 . Допустим, что $D_1 \neq Z_1$. Поскольку $(G_n)^\mathfrak{H}$ нормальна в G_n , то D_1 нормальна в Z_1 . По лемме 3.1.9 [3] $(Z_1/D_1) \wr (M^n)$ – гомоморфный образ группы $G_n/(G_n)^\mathfrak{H}$, т.е. $(Z_1/D_1) \wr (M^n) \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $\pi(Z_1/D_1) \cap \pi(\mathfrak{H}) \neq \emptyset$. Тогда без ограничения общности в качестве M можно взять прямое произведение qd -групп из $\mathfrak{H}$, где $q \in \pi(Z_1/D_1) \cap \pi(\mathfrak{H})$, по одной для каждого q . Если L – подгруппа порядка q из M , а T – подгруппа порядка q из Z_1/D_1 , то по лемме 18.2 [8] группа $T \wr (L^n)$ изоморфно вкладывается в $(Z_1/D_1) \wr (M^n)$. Тогда $T \wr (L^n) \in s \text{form}(\Gamma)$. Ввиду леммы 8.15 [6] степень нильпотентности группы $T \wr (L^n)$ не меньше $n + 1$. Противоречие с леммой 3.1.5 [3]. Таким образом, $Z_1 = D_1$, т.е. $(G_n)^\mathfrak{H}$ входит подпрямую в K . Поэтому $(G_n)^\mathfrak{H} \in \mathfrak{M}$ и $G_n \in \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$.

Пусть Z удовлетворяет условию (а), $B \in K(P)$. Поскольку каждая простая группа в $\mathfrak{M}$ абелева, то $P \subset Z$. Тогда $G_n/O_{B'}(G_n) \cong G_n \in f(B) = \text{form}(G/O_{B'}(G))$. Но G_n содержит монолит порядка $|P|^{|M|^n}$, что противоречит лемме 3.1.5 [3].

Пусть Z удовлетворяет условию (б), $p \in \pi(P)$. Так как $C_Z(P) = P$, то P не содержится в центре Z . Следовательно, по предложению 18.5 [8] G_n – монолитична с монолитом $T = \prod_{b \in M^n} P_1^b$, где P_1 – монолит Z_1 . Из локальности $\mathfrak{N}^2$ заключаем, что $P \not\subseteq \Phi(Z)$. Тогда ввиду леммы 9.4 [8] $T \not\subseteq \Phi(K)$ и T – дополняема в G_n . Из монолитичности G_n заключаем, что $C_{G_n}(T) = T$. Таким образом, $(G_n)_{\beta(Z_p)} = T$. Поэтому $W = G_n/T \cong (Z_1/P_1) \wr (M^n) \in f(Z_p)$. Но $Z_1/P_1 \cong H$ и $C_H(Q) = Q$. Значит, Q не содержится в центре H и по предложению 18.5 [8] W имеет минимальную нормальную подгруппу порядка $|Q|^{|M|^n}$. Это приводит к противоречию с леммой 3.1.5 [3].

Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^2$. Лемма доказана.

Через $\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$ будем обозначать формацию, порожденную всеми группами

$G/O_p(G)$, где $G \in \mathfrak{H}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ – несократимая факторизация расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, где $\mathfrak{M}$ – также расслоенная формация с направлением β . Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – однопорожденная расслоенная формация, когда выполняются следующие условия:

- 1) $K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \subseteq K(\mathfrak{M})$;
- 2) $\mathfrak{M}$ – метанильпотентная однопорожденная расслоенная формация;
- 3) $\pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(t(B)) = \emptyset$ для всех $B \in K(\mathfrak{M})$, где t – минимальный спутник формации $\mathfrak{M}$;
- 4) если $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$, то $\mathfrak{H}$ – однопорожденная формация, причем $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$ влечет $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$;
- 5) если $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$, то формация $\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$ однопорождена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. По условию для некоторой группы G справедливо $\mathfrak{F} = F(G, \beta)$. Обозначим через h – минимальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

По лемме 15 $\mathfrak{M}$ – метанильпотентная формация.

Допустим, что $K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \not\subseteq K(\mathfrak{M})$. Тогда по лемме 6 в формации $\mathfrak{F}$ содержится бесконечное множество наследственных расслоенных подформаций с направлением β , что противоречит лемме 5. Значит, $K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \subseteq K(\mathfrak{M})$, т.е. выполняется условие 1).

Обозначим через t минимальный спутник формации $\mathfrak{M}$. По лемме 7 формация $\mathfrak{F}$ имеет также такой спутник f , что $f(B) = t(B)\mathfrak{H}$ для всех $B \in K(\mathfrak{M})$, $f(B) = \mathfrak{H}$ при всяком $B \in K(\mathfrak{H}) \setminus K(\mathfrak{M})$. Поскольку t – внутренний спутник формации $\mathfrak{M}$, то f – внутренний спутник формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что найдутся такие различные простые числа p и q , что в формации $t(Z_p)$ содержится группа Z_q и $q \in \pi(\mathfrak{H})$. Пусть H – некоторая qd -группа из $\mathfrak{H}$. Для всякого натурального числа n через H_n обозначим регулярное сплетение $Z_q \wr (H^n) = [K](H^n)$, где K – база сплетения. Так как $H_n/K \cong H^n \in \mathfrak{H}$, т.е. $(H_n)^{\mathfrak{H}} \subseteq K \in t(Z_p)$, то $H_n \in t(Z_p)\mathfrak{H}$. По лемме 18.8(в) [8] $O_p(H_n) = 1$. Следовательно, по лемме 13 $H_n \in h(Z_p)$. Если L – подгруппа порядка q из H , то по лемме 18.2 [8] группа $Z_q \wr (L^n)$ изоморфно вкладывается в H_n . Ввиду леммы 8.15 [6] ступень нильпотентности группы $Z_q \wr (L^n)$ не меньше $n + 1$. По теореме 5 [5] $h(Z_p) = \text{form}(G/G_{\beta(Z_p)})$. Обозначим через $\mathfrak{H}_1$ – формацию, порожденную всеми силовскими q -подгруппами из $G/G_{\beta(Z_p)}$. По лемме 8.11 [6] всякая силовская q -подгруппа группы H_n принадлежит $\mathfrak{H}_1$. Хорошо известно, что формация, порожденная конечным множеством групп, однопорождена; пусть $\mathfrak{H}_1 = \text{form } S$ для некоторой группы S . Таким образом, $Z_q \wr (L^n) \in s \text{ form } S$. Последнее ввиду леммы 3.1.5 [3] означает, что ступень нильпотентности группы $Z_q \wr (L^n)$ не превышает (при любом натуральном n) ступень нильпотентности группы S . Противоречие.

Итак, в дальнейшем мы можем считать, что если p и q – различные простые числа и группа Z_q принадлежит формации $t(Z_p)$, то $q \notin \pi(\mathfrak{H})$. Более того, как и при доказательстве теоремы 8.16 [6], можно показать, что в этой ситуации формация $\mathfrak{H}$ абелева.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ – метанильпотентная однопорожденная расслоенная формация. Ввиду следствия 4.1 [5] и леммы 8.10 [6] всякая расслоенная подформация с направлением β из $\mathfrak{M}$ наследственна. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ и по лемме 5 в $\mathfrak{M}$ имеется лишь конечное множество расслоенных подформаций с направлением β . Пусть $(1) = \mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}$ – такая цепь расслоенных формаций с направлением β , что $\mathfrak{M}_{i-1}$ – мак-

симальная расслоенная подформация в $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Пусть $H_i \in \mathfrak{M}_i \setminus \mathfrak{M}_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда $\mathfrak{M} = F(H_1, \dots, H_k, \beta) = F(H_1 \times \dots \times H_k, \beta)$, т.е. $\mathfrak{M}$ – однопорожденная расслоенная формация. Итак, выполняется условие 2).

Предположим, что найдется такое простое число q , что $q \in \pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(m(B))$. Так как формация $\mathfrak{M}$ метанильпотентна, то $K(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{A}$, т.е. $B \cong Z_p$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$. Причем, по следствию 5.1 [5] $m(Z_p) \subseteq m_1(Z_p)$, где m_1 – минимальный спутник формации $\mathfrak{M}^2$. По лемме 7 $m(Z_p) \subseteq \mathfrak{N}$. Более того, учитывая лемму 13, заключаем, что $m(Z_p) \subseteq \mathfrak{N}_{p'}$. Следовательно, $q \neq p$ и в формации $m(Z_p)$ имеется группа порядка q . Значит, как показано ранее, $q \notin \pi(\mathfrak{H})$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ удовлетворяют условию 3).

Пусть $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Тогда найдется такое $Z_p \in K(\mathfrak{M})$, что $(1) \subset m(Z_p)$. Но $m(Z_p) \subseteq \mathfrak{N}_{p'}$. Следовательно, в формации $m(Z_p)$ имеется группа простого порядка q , где $p \neq q$. В этом случае ввиду установленного ранее формация $\mathfrak{H}$ абелева.

Предположим теперь, что $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$. Напомним, что через $\mathfrak{F}_1$ мы обозначили формацию $\mathfrak{F}_1 = \text{form}(G/G_{\beta(B)})$, где $B \in K(G)$. Пусть $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$. Рассуждая, как показано выше, можно показать, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Тогда по лемме 3.1.5 [3] число неизоморфных монолитических групп из $\mathfrak{H}$ конечно, ибо все они являются циклическими группами порядка не больше $|G|$. Значит, в этом случае формация $\mathfrak{H}$ однопорождена. Пусть $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{A}$. Тогда ввиду доказанного ранее $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, $m(Z_p) = (1)$ при всех $Z_p \in K(\mathfrak{M})$. Таким образом, $f(Z_p) = m(Z_p)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ и $f(B) = \mathfrak{H}$ для $B \in K(\mathfrak{H}) \setminus (\mathfrak{M})$. Но $h \leq f$. Значит, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Получаем $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_1$ – однопорожденная формация.

Возьмем теперь $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$. Покажем, что в этом случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H}))$. Очевидно, $\mathfrak{N}_p(\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Пусть теперь $S \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Тогда $S^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$, т.е. $S^{\mathfrak{H}} \subseteq O_p(S)$. Значит, $S/O_p(S) \in \mathfrak{H}$. Но $O_p(S/O_p(S)) = 1$ и, следовательно, $S/O_p(S) \in \mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$. Поэтому $S \in \mathfrak{N}_p(\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H}))$ и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_p(\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H}))$. По лемме 7 $\mathfrak{F}$ имеет спутник f_1 такой, что $f_1(A) = \mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$ для всех $A \in K(\mathfrak{F})$. Пусть M – произвольная группа из $\mathfrak{H}$. Тогда $M/O_p(M) \in \mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H}) = f_1(Z_p)$. Поскольку $O_p(M/O_p(M)) = 1$, по лемме 13 $M/O_p(M) \in h(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{F}_1$. По определению $h \leq f_1$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$ и $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$ – однопорожденная формация.

Достаточность. Пусть $\pi(\mathfrak{M}) = \{p\}$. Ввиду условия 2) заключаем, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Как говорилось выше, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H}))$ и по лемме 7 $\mathfrak{F}$ имеет спутник f_1 такой, что $f_1(C) = \mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$ для всех $C \in K(\mathfrak{F})$. Из теорем 1 и 2 [5] следует, что $\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$ является свободной формацией. Тогда, учитывая теорему 5 [5], легко показать, что $\Delta(\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H}))$ – конечное множество. Но в этом случае $\Delta(\mathfrak{F})$ – конечное множество. Следовательно, по лемме 14 $\mathfrak{F}$ – однопорожденная формация.

Рассмотрим случай, когда $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$. Ввиду леммы 7 формация $\mathfrak{F}$ имеет такой спутник f , что $f(C) = m(C)\mathfrak{H}$, если $C \in K(\mathfrak{M})$, и $f(C) = \mathfrak{H}$ для всех $C \in K(\mathfrak{H}) \setminus K(\mathfrak{M})$. По условию 2) $\mathfrak{M}$ – однопорожденная расслоенная формация. Значит, по лемме 14 $\Delta(\mathfrak{M})$ – конечное множество. По теореме 1 и теореме 2 [5] следует, что $\mathfrak{H}$ является свободной формацией. Тогда из теоремы 5 [5] несложно получить, что $\Delta(\mathfrak{H})$ – конечное множество. Очевидно, что $K(\mathfrak{F}) \subseteq K(\mathfrak{H}) \cup K(\mathfrak{M})$. Поэтому $\Delta(\mathfrak{F})$ – конечное множество.

Используя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 8.16 [6], несложно показать, что формация $m(C)\mathfrak{H}$ однопорождена для любого $C \in K(\mathfrak{M})$. Тогда по лемме 14 $\mathfrak{F}$ является однопорожденной расслоенной формацией с направлением β . Теорема

доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_t$ – несократимая факторизация расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, причем формация $\mathfrak{M}_1$ также является расслоенной с направлением β . Формация $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда однопорожждена, когда выполняются следующие условия:

- 1) $t \leq 3$, $K(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{A} = K(\mathfrak{M}_1)$ и $|\Delta(\mathfrak{F})| > 1$;
- 2) при $t = 2$ выполняются следующие пункты:
 - $\mathfrak{M}_1$ – метанильпотентная однопорожжденная расслоенная формация;
 - $\pi(\mathfrak{M}_2) \cap \pi(m(B)) = \emptyset$ для всех $B \in K(\mathfrak{M}_1)$, где m – минимальный спутник формации $\mathfrak{M}_1$;
 - если $|\pi(\mathfrak{M}_1)| > 1$, то $\mathfrak{M}_2$ – однопорожжденная формация, причем $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}$ влечет $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{A}$;
 - если $|\pi(\mathfrak{M}_1)| = 1$, то $\mathfrak{M}_2/O_p(\mathfrak{M}_2)$ – однопорожжденная формация;
- 3) если $t = 3$, то $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ – однопорожжденные расслоенные формации с направлением β , $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ однопорожждены, причем, формации $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ нильпотентны, формация $\mathfrak{M}_3$ абелева и $\pi(\mathfrak{M}_2) \cap \pi(\mathfrak{M}_3) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{M}_2 \dots \mathfrak{M}_t$, т.е. $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{F} = F(G, \beta)$ для некоторой группы G . По теореме 1 $\mathfrak{M}_1$ – метанильпотентная расслоенная формация. Значит, существует $p \in \mathbb{P}$ для которого $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}_1$. Очевидно, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{M}_1)$. Предположение, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$, противоречит следствию 3.3.7 [3]. Таким образом, $|\Delta(\mathfrak{F})| > 1$. Покажем, что $K(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{A} = K(\mathfrak{M}_1)$. Для любого $Z_p \in K(\mathfrak{F})$ выполняется $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{F} = (\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{M}_1)(\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H}_1)$. По следствию 3.3.7 [3] формации $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H}_1$ не могут одновременно быть отличны от (1) и $\mathfrak{N}_p$. Поэтому либо $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}_1$, либо $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}_1$. Допустим, что найдется $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{M}_1$. Тогда по лемме 6 множество наследственных расслоенных подформаций $\mathfrak{F}$ с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, бесконечно, что противоречит лемме 5. Следовательно, $K(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{A} = K(\mathfrak{M}_1)$.

Пусть $t > 2$. Обозначим $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_3 \dots \mathfrak{M}_t$. Если $|\Delta(\mathfrak{M})| = 1$, то либо $K(\mathfrak{M}) = (A)$, где A – простая неабелева группа, либо $K(\mathfrak{M}) = (Z_p)$ для некоторого простого числа p . В последнем случае $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$, что противоречит несократимости факторизации $\mathfrak{F}$ и следствию 3.3.7 [3]. Следовательно, либо $K(\mathfrak{M}) = (A)$ для простой неабелевой группы A , либо $|\Delta(\mathfrak{M})| > 1$. В любом случае $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$. Значит, по лемме 3.2.5 [3] $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Тогда по теореме 1 формация $\mathfrak{H}$ абелева и в силу леммы 3.2.5 [3] следует, что $t = 3$. Утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) непосредственно следует из теоремы 1.

Пусть $t = 3$. Допустим, что $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}$. Тогда $|\pi(\mathfrak{M}_1)| > 1$ и по теореме 1 $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ – абелева формация. В этом случае $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ ограничена параметру c , что противоречит лемме 3.2.5 [3]. Следовательно, $\mathfrak{M}_1$ нильпотентна. По лемме 7 $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ – расслоенная формация с направлением β . Следовательно, по теореме 1 $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ – метанильпотентные однопорожжденные расслоенные формации. Кроме того, так как $|\pi(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)| > 1$, то по лемме 3.2.5 [3] $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ ненильпотентна. И значит, по теореме 1 $\mathfrak{M}_3$ – однопорожжденная абелева формация.

Покажем, что $\mathfrak{M}_2$ – нильпотентная формация. Пусть m_1 – минимальный спутник формации $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$. По теореме 5 и следствию 5.1 работы [5] $m_1(Z_p) \subseteq \mathfrak{N}$ для всех $Z_p \in K(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)$. Поскольку формация $\mathfrak{F}$ разрешима и $K(\mathfrak{F}) = K(\mathfrak{M}_1)$, то $|\pi(\mathfrak{M}_1)| > 1$. Обо-

значим через $\mathfrak{X} = \bigcup_{p \in \pi(\mathfrak{M}_1)} m_1(Z_p)$. Предположим, что $\mathfrak{M}_2 \not\subseteq R_0(\mathfrak{X})$. Пусть A – группа минимального порядка из $\mathfrak{M}_2 \setminus R_0(\mathfrak{X})$. Тогда A – монолитическая группа с монолитом R . Поскольку $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ – метанильпотентная формация, то R – элементарная абелева p -группа для некоторого простого числа p . Пусть $q \in \pi(\mathfrak{M}_1) \setminus \{p\}$ и $T = Z_q \wr A$. Поскольку $O_q(A) = 1$, то ввиду леммы 2 [9] $T_{\gamma(Z_q)} = K$, где K – база регулярного сплетения T . Кроме того, $T_{\alpha(Z_q)} = K$. Но $T/K \cong A \in \mathfrak{M}_2$. Тогда $T \in \mathfrak{N}_q\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$. Следовательно, $T/T_{\beta(Z_q)} = T/K \cong A \in m_1(Z_q)$. Противоречие. Значит $\mathfrak{M}_2 \subseteq R_0(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{N}$.

Поскольку $|\pi(\mathfrak{M}_1)| > 1$, по теореме 1 формации $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ однопорожждены.

Пусть $B \in R_0(\mathfrak{X})$. Но по теореме 1 $\pi(m_1(L)) \cap \pi(\mathfrak{M}_3) = \emptyset$ для всех $L \in K(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)$. Следовательно, $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{M}_3) = \emptyset$. Значит $\pi(\mathfrak{M}_2) \cap \pi(\mathfrak{M}_3) = \emptyset$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_t$, где $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_t$ – неединичные формации, удовлетворяющие условиям 1)–4). При $t = 2$ по пункту 2) и теореме 1 $\mathfrak{F}$ – однопорожденная расслоенная формация. Рассмотрим случай при $t = 3$. Если $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}_p$, то $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{M}_3 \subseteq \mathfrak{N}_p$. Противоречие с несократимостью факторизации $\mathfrak{F}$. Поэтому $|\pi(\mathfrak{M}_1)| > 1$. Поскольку $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}$, то $m(A) = (1)$ для любой группы $A \in K(\mathfrak{M}_1)$, где m – минимальный спутник формации $\mathfrak{M}_1$. Значит, $\pi(\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3) \cap \pi(m(A)) = \emptyset$ для всех $A \in K(\mathfrak{M}_1)$. Видим, что выполняются все условия теоремы 1. Таким образом, $\mathfrak{F}$ – однопорожденная расслоенная формация с направлением β . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_t$ – несократимая факторизация биканонической (композиционной) формации $\mathfrak{F}$, причем формация $\mathfrak{M}_1$ также является биканонической (композиционной). Формация $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда однопорождена, когда выполняются следующие условия:

- 1) $t \leq 3$, $K(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{A} = K(\mathfrak{M}_1)$ и $|\Delta(\mathfrak{F})| > 1$;
- 2) при $t = 2$ выполняются следующие пункты:
 - $\mathfrak{M}_1$ – метанильпотентная однопорожденная биканоническая (композиционная) формация;
 - $\pi(\mathfrak{M}_2) \cap \pi(m(B)) = \emptyset$ для всех $B \in K(\mathfrak{M}_1)$, где m – минимальный спутник формации $\mathfrak{M}_1$;
 - если $|\pi(\mathfrak{M}_1)| > 1$, то $\mathfrak{M}_2$ – однопорожденная формация, причем $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}$ влечет $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{A}$;
 - если $|\pi(\mathfrak{M}_1)| = 1$, то $\mathfrak{M}_2/O_p(\mathfrak{M}_2)$ – однопорожденная формация;
- 3) если $t = 3$, то $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ – однопорожденные биканонические (композиционные) формации, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3$ однопорожждены, причем формации $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ нильпотентны, формация $\mathfrak{M}_3$ абелева и $\pi(\mathfrak{M}_2) \cap \pi(\mathfrak{M}_3) = \emptyset$.

В процессе доказательства теоремы было установлено, имеющее самостоятельный интерес

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_t$ – несократимая факторизация однопорожденной расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, причем формация $\mathfrak{M}_1$ так же расслоенная с направлением β . Если $\mathfrak{M}_1$ – ненильпотентная формация, то $t = 2$.

ЛЕММА 16. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{H}$ – расслоенная формация с направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, причем $|\pi| > 1$. Тогда $\mathfrak{H} = R_0(\bigcup_{A \in K(\mathfrak{F})} f(A))$, где f – минимальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\mathfrak{X} = \bigcup_{A \in K(\mathfrak{F})} f(A)$. Предположим, что $\mathfrak{H} \not\subseteq R_0(\mathfrak{X})$ и пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus R_0(\mathfrak{X})$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом R . Поскольку $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$. Если R – неабелева группа и $K(R) = (B)$, то $G/O_{B'}(G) \cong G \in f(B) \subseteq R_0(\mathfrak{X})$. Противоречие. Значит R – элементарная абелева p -группа для некоторого $p \in \mathbb{P}$. Рассмотрим регулярное сплетение $T = Z_q \wr G = [K]G$, где $q \in \pi \setminus \{p\}$, а K – база сплетения. Поскольку $O_q(G) = 1$, по лемме 2 [9] $T_{\gamma(Z_q)} = O_{Z_q}(T) = K = T_{\alpha(Z_q)} = T_{\beta(Z_q)}$. Так как $T/K \cong G \in \mathfrak{H}$, то $T \in \mathfrak{N}_q \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Следовательно, $T/T_{\beta(Z_q)} = T/K \cong G \in f(Z_q) \subseteq R_0(\mathfrak{X})$. Получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{H} \subseteq R_0(\mathfrak{X})$.

Покажем обратное включение. Ввиду теоремы 5 [5] $f(B) = \text{form}(G/G_{\beta(B)} \mid G \in \mathfrak{F})$ для всех $B \in K(\mathfrak{F})$. Пусть M – произвольная группа из $\mathfrak{F}$. Если $B \notin K(M)$, то $M/M_{\beta(B)} \cong 1 \in \mathfrak{H}$. Пусть $B \in K(M)$. Поскольку $M^{\mathfrak{H}} \subseteq \mathfrak{N}_\pi$, то $M^{\mathfrak{H}} \subseteq F(M) \subseteq F_B(M)$. В случае, когда $B \notin \mathfrak{A}$, $M/M_{\beta(B)} = M/F_B(M) \in \mathfrak{H}$. Пусть $B \in \mathfrak{A}$. Из нильпотентности $M^{\mathfrak{H}}$ заключаем, что $M^{\mathfrak{H}} \subseteq O_{B', B}(M) = M_{\alpha(B)} \subseteq M_{\beta(B)}$. Таким образом, $M/M_{\beta(B)} \in \mathfrak{H}$ для любой группы M из $\mathfrak{F}$. Значит, $f(B) \subseteq \mathfrak{H}$. В силу произвольности B можно сделать вывод, что $R_0(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{H} = R_0(\mathfrak{X})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 17. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{H}$ – несократимая факторизация однопорожжденной расслоенной формации $\mathfrak{F}$ с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Тогда $\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H}) = R_0(\bigcup_{A \in K(\mathfrak{F})} f(A))$, где f – минимальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{X} = \bigcup_{A \in K(\mathfrak{F})} f(A)$. По теореме 1 $K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \subseteq (Z_p)$. Тогда по лемме 7 формация $\mathfrak{F}$ обладает спутником h таким, что $h(A) = \mathfrak{H}$ для всех $A \in K(\mathfrak{F})$. Пусть H – произвольная группа из $\mathfrak{H}$. Тогда $H/O_p(H) \in \mathfrak{H} = h(Z_p)$. Поскольку $O_p(H/O_p(H)) = 1$, по лемме 13 $H/O_p(H) \in f(Z_p)$. Значит, $\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H}) \subseteq R_0(\mathfrak{X})$.

Докажем обратное включение. Несложно показать, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H}))$. Пусть произвольная группа $M \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H}))$. В этом случае $M^{\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})} \in \mathfrak{N}_p$, т.е. $M^{\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})} \subseteq F(M) \subseteq F_B(M)$ для любого $B \in K(M)$. Ввиду теоремы 5 [5] $f(B) = \text{form}(G/G_{\beta(B)} \mid G \in \mathfrak{F})$ для всех $B \in K(\mathfrak{F})$. Если $B \notin K(M)$, то $M/M_{\beta(B)} \cong 1 \in \mathfrak{H}$. Пусть $B \in K(M)$. В случае, когда $B \notin \mathfrak{A}$, $M/M_{\beta(B)} = M/F_B(M) \in \mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$. Пусть $B \in \mathfrak{A}$. Из нильпотентности $M^{\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})}$ заключаем, что $M^{\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})} \subseteq O_{B', B}(M) = M_{\alpha(B)} \subseteq M_{\beta(B)}$. Таким образом, $M/M_{\beta(B)} \in \mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$ для любой группы M из $\mathfrak{F}$. Значит, $f(B) \subseteq \mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$. В силу произвольности B можно сделать вывод, что $R_0(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H})$. Тогда $\mathfrak{H}/O_p(\mathfrak{H}) = R_0(\mathfrak{X})$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть однопорожжденная расслоенная формация $\mathfrak{F}$ с br -направлением β , $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, допускает несократимую факторизацию $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_t$, где $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$ – неразложимые формации, в которой формация $\mathfrak{F}_1$ также является расслоенной с направлением β . Если $t \neq 2$ или формация $\mathfrak{F}_1$ не является примарной, то все множители факторизации $\mathfrak{F}$ однозначно определены. В случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}_2$ однозначно определена формация $\mathfrak{F}_2/O_p(\mathfrak{F}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что формация $\mathfrak{F}$ допускает две различные несократимые факторизации $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \dots \mathfrak{M}_t = \mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 \dots \mathfrak{H}_r$ с неразложимыми множителями, в которых $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{H}_1$ – расслоенные формации с направлением β .

По теореме 2 $t \leq 3$ и $r \leq 3$. Если t или r равны 3, то формация $\mathfrak{F}$ разрешима, а следовательно, локальна. Единственность разложения однопорожжденной локальной формации доказана в теореме 3.4.1 [3]. Осталось рассмотреть случай $t = r = 2$.

Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2$. Если хотя бы одна из формаций $\mathfrak{M}_1$ или $\mathfrak{H}_1$ не нильпотентна, то по теореме 1 формация $\mathfrak{F}$ разрешима. Значит, остается вариант, когда обе формации $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{H}_1$ нильпотентны. Кроме того, по теореме 2 $K(\mathfrak{M}_1) = K(\mathfrak{M}_1) \cap \mathfrak{A} = K(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{A} = K(\mathfrak{H}_1)$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{H}_2$, где $\pi = \pi(\mathfrak{M}_1) = \pi(\mathfrak{H}_1)$. Из лемм 16 и 17 заключаем, что если $|\pi| > 1$, то $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{H}_2$, а если $|\pi| = 1$, то $\mathfrak{M}_2/O_p(\mathfrak{M}_2) = \mathfrak{H}_2/O_p(\mathfrak{H}_2)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть однопорожденная биканоническая (композиционная) формация $\mathfrak{F}$ допускает несократимую факторизацию $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_t$, где $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$ — неразложимые формации, в которой формация $\mathfrak{F}_1$ также является биканонической (композиционной). Если $t \neq 2$ или формация $\mathfrak{F}_1$ не является примарной, то все множители факторизации $\mathfrak{F}$ однозначно определены. В случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}_2$ однозначно определена формация $\mathfrak{F}_2/O_p(\mathfrak{F}_2)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Скиба А. Н. О факторизациях одного класса формаций конечных групп // Вопросы алгебры. Вып. 7. Гомель. 1992. С. 108–110.
- [2] Skiba A. N. On nontrivial factorizations of an onegenerated local formation of finite groups // Proc. Int. Conf. Algebra Dedicat. Mem. A. I. Malcev (Novosibirsk, 21–26 August 1989). Novosibirsk, 1989. P. 111.
- [3] Скиба А. Н. Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997.
- [4] Vedernikov V. A. Maximal satellites of Ω -foliated formations and Fitting classes // Тр. МИАН. 2. 2001. V. 2. P. 217–233.
- [5] Ведерников В. А., Сорокина М. М. Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга // Дискретная матем. 2001. Т. 13. № 3. С. 125–144.
- [6] Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
- [7] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды. 1999. Т. 2. № 2. С. 114–147.
- [8] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
- [9] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. О минимальном композиционном экране композиционной формации // Вопросы алгебры. Вып. 7. Гомель. 1992. С. 39–43.