Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Д. Фролкина, Обратные спектры с двумя и тремя отображениями, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 753–758

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm216>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 16:06:42

УДК 515.122.572

ОБРАТНЫЕ СПЕКТРЫ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

О. Д. Фролкина

Показано, что для всякого $1 \leq n < \infty$ существуют такие четыре отображения n -мерного куба в себя, что предел любой обратной последовательности n -кубов является пределом некоторой последовательности, содержащей только эти четыре отображения. Как предел обратной последовательности n -кубов с одним отображением, получен универсальный континуум в классе всех пределов последовательностей n -кубов. При помощи лишь трех отображений гильбертова куба в себя представлены все компакты тривиального шейпа. Построены такие два отображения отрезка в себя, что любой континуум Кнастера может быть получен как предел обратной последовательности, использующей только эти два отображения.

Библиография: 18 названий.

Пусть X – компакт (под компактом понимается метрический компакт, и все рассматриваемые отображения предполагаются непрерывными). *Пределом* обратной последовательности

$$X \xleftarrow{f_1} X \xleftarrow{f_2} X \xleftarrow{f_3} \dots,$$

где $f_n: X \rightarrow X$, называется подпространство произведения $X \times X \times X \times \dots$ из всех таких последовательностей $(x_1, x_2, x_3, \dots)$, что $f_n(x_{n+1}) = x_n$. Предельное пространство называется *змеевидным континуумом*, если $X = I = [0, 1]$, и *окружностноподобным континуумом*, если $X = S^1$ и все связующие отображения сюръективны.

В данном описании предельного пространства участвует бесконечное множество отображений. Естественно поставить вопрос о том, можно ли понизить число различных отображений, “не испортив” предельное пространство. Точнее, можно ли получить то же предельное пространство, пользуясь лишь *конечным* числом отображений, и если да, то сколь мало может быть это число? В этом направлении имеются следующие результаты. Хендерсон представил [1] псевдодугу как обратный предел последовательности отрезков, использующей только одно отображение. Махавиер привел [2] пример невырожденного змеевидного континуума, непредставимого как предел отрезков с одним отображением “на” (в действительности его нельзя получить никаким одним отображением). Дж. В. Роджерс получил [3] аналогичный пример в случае произвольного полиэдра. Марш построила [4] пример змеевидного континуума – предела последовательности отрезков с двумя отображениями “на”, непредставимого как предел с одним отображением.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00304.

Перечисленные результаты связаны с минимизацией числа отображений, необходимых для получения одного фиксированного континуума. Мы рассматриваем задачу получения *всех* пределов обратных последовательностей некоторого метрического компакта X . Согласно теореме Брауна [5, теорема 3] каждое связующее отображение спектра $X \leftarrow X \leftarrow X \leftarrow \dots$ может быть заменено на “близкое”, при этом сохраняется предельное пространство. Поэтому минимальное число отображений, необходимых для получения всех пределов последовательностей пространств X , не превосходит минимальной мощности такого семейства отображений $g_1, \dots, g_m: X \rightarrow X$, что композиции их плотны в пространстве $C(X, X)$ непрерывных отображений X в себя (с топологией равномерной сходимости). Известно, что итерации *одного* отображения $I \rightarrow I$ образуют нигде не плотное подмножество $C(I, I)$. Джолли и Дж. Т. Роджерс нашли [6] четыре отображения $I \rightarrow I$, композиции которых плотны в $C(I, I)$, показав этим, что для получения *всех* змеевидных континуумов достаточно четырех отображений: *существуют такие четыре отображения отрезка в себя, что любой змеевидный континуум можно получить как обратный предел последовательности, включающей только эти четыре отображения*. В настоящей работе даются конечномерный и бесконечномерный аналоги этой теоремы, причем в бесконечномерном случае число отображений редуцируется до трех.

Построение Джолли и Дж. Т. Роджерса опирается на существование в отрезке сходящейся к точке последовательности непересекающихся подотрезков. Аналогичная конструкция проходит в многомерном случае. Заметим, что и в случае произвольного абсолютного ретракта X нам достаточно найти *последовательность непересекающихся подобных X его подмножеств, сходящуюся к точке*. Таким образом, получается

ТЕОРЕМА 1. Пусть пространство X удовлетворяет хотя бы одному из условий:

- а) $X = Y \times I$, где $Y \subset Q$ – звездный AR -компакт (Q – гильбертов куб);
- б) $X \subset \mathbb{R}^n$ – AR -компакт с непустой внутренностью.

Тогда

- 1) для всякого счетного множества отображений $f_n: X \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, существуют такие четыре отображения $X \rightarrow X$, что каждое f_n является некоторой их композицией;
- 2) существуют такие четыре отображения $X \rightarrow X$, что их композиции плотны в пространстве $C(X, X)$;
- 3) существуют такие четыре отображения $X \rightarrow X$, что предел любой обратной последовательности пространств X можно получить, пользуясь лишь этими отображениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть X удовлетворяет условию а). Пусть $*$ $\in Y$ – точка, относительно которой Y звездно. Расположим в $Y \times I$ вдоль отрезка $\{*\} \times I$ подобные X подмножества: $X_n = 2^{-2n}Y \times [2^{-2n}, 2^{1-2n}]$, $n \geq 1$, где λY – гомотет Y с центром $*$ и коэффициентом λ . Пусть $x = (y, t)$. Обозначим $s_n: X_n \rightarrow X$ подобие X_n на X : $s_n(y, t) = (2^{2n}y, 2^{2n}t - 1)$.

Опишем первое из отображений j . Положим $j(x) = s_{n-1}^{-1} \circ f_{n-1} \circ s_n$ для $x \in X_n$, $n \geq 2$. Далее, пусть $j(*, 0) = (*, 0)$. Продолжаем j на все X (это возможно, так как $X \in AR$).

Опишем второе отображение p . Для $x = (y, t) \in X_n$, $n \geq 2$, положим $p(y, t) = (4y, 4t)$. При $x = (y, t) \in X_1$ пусть $p(y, t) = (4y, 4t - 1)$. Пусть $p(*, 0) = (*, 0)$. Продолжаем p на все X .

Третье и четвертое отображения определим формулами

$$q(y, t) = \left(\frac{y}{4}, \frac{t}{4}\right), \quad k(y, t) = \left(\frac{y}{4}, \frac{(t+1)}{4}\right).$$

Тогда $f_n = p^{\circ n} \circ j \circ q^{\circ n} \circ k$. (Здесь и далее $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ раз}}$ является n -й итерацией f .)

В случае, если X удовлетворяет условию б), доказательство аналогично. В X можно взять шар и в нем последовательность подобных X непересекающихся подмножеств, сходящуюся к точке.

2) Возьмем в пространстве $C(X, X)$ счетное плотное множество и применим к нему результат п. 1).

3) Согласно теореме Брауна [5, теорема 3] вытекает из п. 2).

Как показывает теорема 3, в случае гильбертова куба число отображений можно снизить до трех.

Шори построил [7] универсальный (в смысле гомеоморфного вложения) змеевидный континуум, т.е. такой, в который может быть вложен любой змеевидный континуум. Из [2, теорема 2] вытекает, что существует универсальный змеевидный континуум, порожденный одним отображением отрезка в себя. Пасынков [8] и МакКорд [9] изучали существование универсальных компактов в более общих ситуациях. В частности [9, теорема 1], если X удовлетворяет условию теоремы 1, то среди X -подобных [10] компактов существует универсальный. Проводя аналогичные рассуждения, можно установить следующее предложение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть пространство X удовлетворяет хотя бы одному из условий:

- а) $X = Y \times I$, где $Y \subset Q$ – звездный AR -компакт;
- б) $X \subset \mathbb{R}^n$ – AR -компакт, имеющий внутреннюю точку.

Тогда существует такое отображение $u: X \rightarrow X$, что в предел $X \xleftarrow{u} X \xleftarrow{u} \dots$ может быть вложен предел любой обратной последовательности пространств X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X удовлетворяет условию а) (условие б) рассматривается аналогично). Определим отображение u на X_n (здесь X_n, s_n, j, k, p, q те же, что и в доказательстве теоремы 1). Разобьем множество $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ на (упорядоченные) четверки чисел (n_1, n_2, n_3, n_4) . Установим биекцию ϕ между множеством четверок и $\mathbb{N}$. Пусть $\phi(n_1, n_2, n_3, n_4) = m$. Положим для $x \in X_n$, $n \geq 2$,

$$u(x) = \begin{cases} s_m^{-1} \circ j \circ s_n, & \text{если } n = n_1, \\ s_m^{-1} \circ k \circ s_n, & \text{если } n = n_2, \\ s_m^{-1} \circ p \circ s_n, & \text{если } n = n_3, \\ s_m^{-1} \circ q \circ s_n, & \text{если } n = n_4. \end{cases}$$

Пусть $u(*, 0) = (*, 0)$.

Так как $X \in AR$, то u продолжается на все X . Легко видеть, что в предел $X \xleftarrow{u} X \xleftarrow{u} \dots$ могут одновременно быть вложены пределы всех обратных последовательностей из X .

ТЕОРЕМА 3. Пусть Y – компакт, X – произведение счетного числа экземпляров Y . Тогда

- 1) для всякого счетного семейства отображений $f_n: X \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, существуют такие три отображения X в себя, что каждое f_n является некоторой их композицией;
- 2) существуют такие три отображения $X \rightarrow X$, что их композиции плотны в $C(X, X)$;
- 3) существуют такие три отображения $X \rightarrow X$, что любой предел последовательности пространств X можно получить, используя только эти три отображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Положим $f_n = f_1$ для $n \leq 0$. Обозначим символом $\prod X$ произведение счетного числа экземпляров X . Точки пространства X представляем бесконечными в обе стороны последовательностями $(\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots)$, а точки $\prod X$ – бесконечными по обоим направлениям матрицами с элементами из Y . Зафиксируем гомеоморфизм $\phi: \prod X \rightarrow X$, получающийся из некоторой “перестановки координат”: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Пусть $\Delta f_n: X \rightarrow \prod X$ – диагональ семейства $\{f_n, n \in \mathbb{Z}\}$, $\pi_0: \prod X \rightarrow X$ – проекция произведения на нулевой сомножитель, $s: \prod X \rightarrow \prod X$, $s(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = (\dots, x_0, x_1, x_2, \dots)$ – сдвиг.

Положим $p = \phi \circ \Delta f_n$, $h = \phi \circ s \circ \phi^{-1}$, $\pi = \pi_0 \circ \phi^{-1}$. Тогда каждое из f_n , $n \geq 1$, представимо как композиция этих трех отображений: $f_n = \pi \circ h^{\circ n} \circ p$.

- 2) Возьмем в $C(X, X)$ счетное плотное множество и применим утверждение п. 1).
- 3) Согласно теореме Брауна вытекает из п. 2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно [11, с. 130, следствие] компакты X и Y одного шейпа могут быть получены как пределы обратных последовательностей $\{X_n, p_n\}$ и $\{X_n, q_n\}$ из одних и тех же полиэдров, причем $p_n \simeq q_n$. Как известно [12], компакты тривиального шейпа есть в точности пределы обратных последовательностей гильбертовых кубов Q . Поэтому из теоремы 3 вытекает, что компакты X и Y тривиального шейпа могут быть получены как пределы обратных последовательностей $\{Q, p_n\}$ и $\{Q, q_n\}$, причем все связующие отображения берутся из одного и того же трехэлементного множества.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в спектре, представляющем окружностноподобный континуум, заменить каждое отображение на гомотопное вида $z \mapsto z^n$, то получится соленоид с тем же шейпом, что и исходный континуум. Согласно [13, теорема 4.1], [14] для соленоидов равносильны шейповая эквивалентность, изоморфность как топологических групп и гомеоморфность. Из работы [14] вытекает, что для соленоидов эквивалентны следующие условия: соленоид можно получить при помощи конечного числа отображений; его можно получить с помощью одного отображения; определяющая соленоид последовательность простых чисел имеет лишь конечное число различных элементов. Следовательно, не всякий окружностноподобный континуум можно получить при помощи конечного числа отображений окружности. Отметим, что и для произвольного n

не всякий S^n -подобный континуум можно получить при помощи конечного числа отображений сферы S^n . Отсюда и из теоремы 3 вытекает, что при ретракции свойство “порождаться конечным числом отображений” не сохраняется. Остаются открытыми следующие *вопросы*.

1. Верно ли, что для всякого AR -компакта X существует конечное число отображений $g_1, \dots, g_m: X \rightarrow X$, порождающих все X -подобные компакты?

2. Верно ли, что ни для какого (ориентируемого) замкнутого многообразия M^n без края не существует конечного числа отображений $g_1, \dots, g_m: M^n \rightarrow M^n$, порождающего все M -подобные компакты?

Змеевидный континуум называют *континуумом Кнастера*, если все связующие отображения открыты. Согласно [15, теорема 7], [16, лемма 4], можно ограничиться такими отображениями w_n , что

- (1) если $0 \leq i \leq n$, то $w_n(i/n)$ равно 0 при четном i и равно 1 при нечетном i ;
- (2) w_n линейно на отрезках $[i/n, (i+1)/n]$ для $0 \leq i < n$.

Число n называют *степенью отображения w_n* . Имеется классификация континуумов Кнастера в терминах последовательностей степеней, представляющих континуум функций [16], [17]. В частности, не всякий континуум Кнастера представим как обратный предел отрезков с конечным числом открытых отображений.

ТЕОРЕМА 4. *Существуют такие два отображения отрезка в себя, что любой континуум Кнастера получается как предел последовательности, использующей только эти два отображения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в качестве таких отображений можно взять w_2 и k , где $k(x) = \frac{1}{10}x$. Согласно теореме Брауна достаточно сколь угодно хорошо приблизить композициями w_2 и k каждое из отображений w_n . Как отмечено в [15], $w_m \circ w_n = w_{mn}$, откуда $w_2^m = w_{2^m}$. Возьмем такое m , что $2^m > n$, и рассмотрим отрезок $[0, n/(2^m)]$. Ограничение отображения w_{2^m} на этот отрезок имеет степень n . Если бы мы могли линейно отобразить $[0, 1]$ на него, то, взяв потом w_{2^m} , мы получили бы в точности w_n . Но мы не можем отобразить линейно $[0, 1]$ на $[0, n/(2^m)]$ при помощи w_2 и k , а потому будем отображать “приближенно”. Так как степень двойки может начинаться с любой комбинации цифр [18, с. 39], то множество чисел вида $2^p/10^q$ плотно на $[0, 1]$. Кроме того, есть линейное отображение $w_2^{\circ p} \circ k^{\circ q}$ отрезка $[0, 1]$ на $[0, 2^p/10^q]$. Таким образом, мы построили последовательность отображений вида $w_2^{\circ p_i} \circ k^{\circ q_i}$, сходящуюся к w_n .

Автору приятно выразить благодарность С. А. Богатому за постановку задачи и ценные беседы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Henderson G. W. The pseudo-arc as an inverse limit with one binding map // Duke Math. J. 1964. V. 31. №3. P. 421–425.
- [2] Mahavier W. S. A chainable continuum not homeomorphic to an inverse limit on $[0, 1]$ with only one bonding map // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. V. 18. P. 284–286.
- [3] Rogers J. W. Jr. Continua not an inverse limit with a single bonding map on a polyhedron // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 21. №2. P. 281–283.
- [4] Marsh D. S. A chainable continuum not homeomorphic to an inverse limit on $[0, 1]$ with only one bonding map // Colloq. Math. 1980. V. 43. P. 75–80.

- [5] Brown M. Some applications of an approximation theorem for inverse limits // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. V. 11. P. 478–483.
- [6] Jolly R. F., Rogers J. T. Jr. Inverse limit spaces defined by only finitely many distinct bonding maps // Fund. Math. 1970. V. 68. P. 117–120.
- [7] Schori R. M. A universal snake-like continuum // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16. № 6. P. 1313–1316.
- [8] Пасынков Б. А. Об универсальных компактах // УМН. 1966. Т. 21. № 4. С. 91–100.
- [9] McCord M. C. Universal $\mathcal{P}$ -like compacta // Michigan Math. J. 1966. V. 13. P. 71–85.
- [10] Mardešić S., Segal J. ε -mappings onto polyhedra // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 109. P. 146–164.
- [11] Рубанов И. Характеризация шейпов компактов с помощью спектров из нервов покрытий // Сиб. Матем. журн. 1979. Т. 20. № 1. С. 128–140.
- [12] Mardešić S. Decreasing sequences of cubes and compacta of trivial shape // Gen. Topol. Appl. 1972. V. 2. № 1. P. 17–23.
- [13] Keesling J. Shape theory and topological groups // Lect. Notes Math. 1974. V. 378. P. 233–242.
- [14] McCord M. C. Inverse limit sequences with covering maps // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 114. P. 197–209.
- [15] Rogers J. W., Jr. On mapping indecomposable continua onto certain chainable indecomposable continua // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 25. P. 449–456.
- [16] Debski W. On topological types of the simplest indecomposable continua // Colloq. Math. 1985. V. 49. P. 203–211.
- [17] Watkins W. T. Homeomorphic classification of certain inverse limit spaces with open bonding maps // Pacific J. Math. 1982. V. 103. № 2. P. 589–601.
- [18] Гальперин Г. А., Земляков А. Н. Математические бильярды. М.: Наука, 1990.