Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. О. Гринив, А. А. Шкаликов, Экспоненциальная устойчивость полугрупп, связанных с некоторыми операторными моделями в механике, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 657–664

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm217>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:29:45

УДК 517.983 5/6

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛУГРУПП, СВЯЗАННЫХ С НЕКОТОРЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ МОДЕЛЯМИ В МЕХАНИКЕ

Р. О. Гринив, А. А. Шкаликов

Рассматриваются уравнения вида $\ddot{x} + B\dot{x} + Ax = 0$, где $x = x(t)$ – функция со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, оператор B симметрический, а A – равномерно положительный и самосопряженный в $\mathcal{H}$. С этим уравнением ассоциируется линейный оператор $\mathcal{T}$, который генерирует C_0 -полугруппу в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}$. Показано, что эта полугруппа является экспоненциально устойчивой, если оператор B равномерно положителен и подчинен оператору A в смысле квадратичных форм.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Линеаризованные уравнения, появляющиеся в различных задачах теории упругости и гидромеханики, часто записываются в виде

$$\ddot{x} + B\dot{x} + Ax = 0. \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ – функция со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а A и B – некоторые (неограниченные) операторы в $\mathcal{H}$. Обычно (см. [1], [2]) оператор A самосопряжен и равномерно положителен (отвечает за потенциальную энергию системы), а оператор B симметричен и неотрицателен (отвечает за силы демпфирования).

Энергия решения $x(t)$ уравнения (1) определяется функционалом

$$E(x(t)) := \frac{1}{2}(\|\dot{x}\|^2 + \|A^{1/2}x\|^2).$$

Из уравнения (1) находим, что при $B \geq 0$ энергия системы убывает со временем, ибо

$$\frac{d}{dt}E(x(t)) = -(B\dot{x}(t), \dot{x}(t)) \leq 0.$$

Для многих конкретных задач механики удастся показать, что энергия убывает экспоненциально. Задаче об описании абстрактных моделей, для которых наблюдается это

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 00-15-96100 и № 01-01-00691.

явление, в литературе уделено большое внимание (см., например, работы [1]–[6] и имеющиеся там ссылки). Настоящая заметка посвящена этой же проблеме. Здесь мы даем относительно простое доказательство экспоненциального убывания энергии при значительно более слабых условиях на операторы A и B , нежели имевшиеся ранее.

Обозначим через $\mathcal{H}_\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, шкалу гильбертовых пространств, порожденных равномерно положительным самосопряженным оператором A . Таким образом, при $\theta > 0$ пространство $\mathcal{H}_\theta$ совпадает с областью определения $\mathfrak{D}(A^{\theta/2})$ оператора $A^{\theta/2}$ и наделяется нормой $\|x\|_\theta := \|A^{\theta/2}x\|$, а при $\theta < 0$ это пространство совпадает с пополнением исходного пространства $\mathcal{H}$ по такой же норме. Уравнение (1) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{T}_0 \mathbf{x}(t), \quad (2)$$

где $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ – функция со значениями в энергетическом пространстве $\mathcal{E} := \mathcal{H}_1 \mathcal{H}$, и

$$\mathcal{T}_0 := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D}(\mathcal{T}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathfrak{D}(A), \quad x_2 \in \mathfrak{D}(B) \right\}. \quad (3)$$

Легко видеть, что $\mathbf{x}(t)$ является решением уравнения (2) в том и только том случае, когда $x_1(t)$ есть решение (1) и $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$, причем тогда $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{E}}^2 = 2E(x_1)$. Известно (см. [6]), что в случае, когда $B \geq 0$ и B подчинен оператору A в обычном смысле, т.е. когда

$$\mathfrak{D}(B) \supset \mathfrak{D}(A), \quad (4)$$

оператор $\mathcal{T}_0$ допускает замыкание $\mathcal{T}$, причем $\mathcal{T}$ есть максимально диссипативный оператор в пространстве $\mathcal{E}$. Следовательно, $\mathcal{T}$ генерирует C_0 -полугруппу сжатий $\exp(t\mathcal{T})$ в $\mathcal{H}$, и любое решение уравнения (2) имеет вид $\mathbf{x}(t) = \exp(t\mathcal{T})\mathbf{x}_0$, где $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ – начальное состояние. Поэтому $E(x)$ экспоненциально убывает для любого решения уравнения (1) в том и только том случае, когда полугруппа $\exp(t\mathcal{T})$ является *экспоненциально устойчивой*, т.е. когда *экспоненциальный тип* $\omega(\mathcal{T})$ C_0 -полугруппы $\exp(t\mathcal{T})$ (см. [7], [8]), определяемый равенством

$$\omega(\mathcal{T}) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \|\exp(t\mathcal{T})\|_{\mathcal{E}},$$

является отрицательным.

В работах [1]–[3], [5] было показано, что $\omega(\mathcal{T}) < 0$, если, помимо (4), выполнено одно из следующих условий:

- а) $\|Bx\| \geq \varepsilon \|A^{1/2}x\|$ для всех $x \in \mathfrak{D}(A^{1/2})$ при некотором $\varepsilon > 0$;
- б) оператор B сравним с A^α при $\alpha \in [1/2, 1]$, т.е.

$$c_1(A^\alpha x, x) \leq (Bx, x) \leq c_2(A^\alpha x, x) \quad \text{для всех } x \in \mathfrak{D}(A^{\alpha/2}), \quad c_1, c_2 > 0.$$

В действительности при таких предположениях доказано большее: полугруппа $\exp(t\mathcal{T})$ является аналитической, и тогда экспоненциальный тип $\omega(\mathcal{T})$ совпадает со *спектральной абсциссой*

$$s(\mathcal{T}) := \sup\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(\mathcal{T})\},$$

где $\sigma(\mathcal{T})$ – спектр оператора $\mathcal{T}$. (Отметим, что всегда выполнено неравенство $s(\mathcal{T}) \leq \omega(\mathcal{T})$.) В [4] показано, что совпадение $s(\mathcal{T})$ и $\omega(\mathcal{T})$ имеет место также тогда, когда B сравним с A^α при любом $\alpha \in (0, 1/2)$, однако полугруппа в этом случае не аналитическая, а принадлежит классу Жеврея с показателем $1/2\alpha$. В работе [6] задача об аналитичности полугруппы $\exp(t\mathcal{T})$ решалась для секториальных операторов B .

В этой заметке мы отказываемся от условия (4) (есть конкретные задачи, где оно не выполняется) и заменяем его более слабым условием подчиненности оператора B оператору A в смысле квадратичных форм. Последнее означает, что линеал $\mathfrak{D}(B) \cap \mathcal{H}_1$ плотен в пространстве $\mathcal{H}_1 = \mathfrak{D}(A^{1/2})$, и справедлива оценка

$$|(Bx, x)| \leq c(A^{1/2}x, A^{1/2}x) \quad \text{для всех } x \in \mathfrak{D}(B) \cap \mathcal{H}_1, \quad (5)$$

где $c > 0$ – постоянная. Это условие эквивалентно тому, что оператор B продолжается по непрерывности как ограниченный оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Действительно, из оценки (5) следует, что оператор $K = A^{-1/2}BA^{-1/2}$ плотно определен в $\mathcal{H}$, а его числовой образ ограничен. Следовательно, K продолжается по непрерывности как ограниченный оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Обратное утверждение очевидно. Отметим также, что в случае $B \geq 0$ условие подчиненности в смысле квадратичных форм эквивалентно включению $\mathfrak{D}(B_F^{1/2}) \supset \mathfrak{D}(A^{1/2})$, где B_F – расширение по Фридрихсу оператора B (см. [6]).

Поясним, почему условие (5) является более слабым, нежели (4). Известно (см., например, [9]), что (4) влечет ограниченность оператора $B: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}$, а потому и оператора $B^*: \mathcal{H}_{-2} \rightarrow \mathcal{H}$. С учетом условия симметричности $B \subset B^*$, из интерполяционной теоремы (см., например, [10, гл. I]) получаем, что оператор $B: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$ также ограничен.

Наша дальнейшая цель – показать, что полугруппа $\exp(t\mathcal{T})$ корректно определена, если оператор $B \geq 0$ подчинен оператору A в смысле квадратичных форм, причем условие $B \gg 0$ достаточно для того, чтобы ее экспоненциальный тип $\omega(\mathcal{T})$ был отрицателен. Более того, как показано в замечании 1, эти условия в некотором смысле являются также необходимыми для экспоненциальной устойчивости. Конечно, условие $B \gg 0$ не гарантирует аналитичность полугруппы, и мы не можем утверждать, что $\omega(\mathcal{T})$ совпадает со спектральной абсциссой $s(\mathcal{T})$. Однако для числа $\omega(\mathcal{T})$ мы получим эффективную оценку.

2. Формулировка теоремы. Далее, как обычно, через (x, y) обозначаем скалярное произведение элементов $x, y \in \mathcal{H}$, и такое же обозначение сохраняем для значения функционала $x \in \mathcal{H}_{-1}$ на элементе $y \in \mathcal{H}_1$.

С уравнением (1) свяжем его символ

$$L(\lambda) = \lambda^2 + \lambda B + A.$$

Условие (5) не гарантирует, что линеал $\mathcal{L} = \mathfrak{D}(B) \cap \mathfrak{D}(A)$ плотен в $\mathcal{H}$ (может даже оказаться, что $\mathcal{L} = \{0\}$), поэтому оператор-функция $L(\lambda)$, вообще говоря, не определена в пространстве $\mathcal{H}$. Однако A допускает изометрическое продолжение как оператор из

$\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$, а условие (5) влечет, что B имеет ограниченное продолжение из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Обозначим эти продолжения через $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, соответственно. Тогда оператор

$$\tilde{L}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda\tilde{B} + \tilde{A}$$

корректно определен при $\lambda \in \mathbb{C}$ как ограниченный оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$, или как неограниченный оператор в $\mathcal{H}_{-1}$ с областью $\mathfrak{D}(\tilde{L}) = \mathcal{H}_1$. Теперь можно определить и оператор $L(\lambda)$ в пространстве $\mathcal{H}$, положив $L(\lambda)x = \tilde{L}(\lambda)x$ на области

$$\mathfrak{D}(L(\lambda)) = \{x \in \mathcal{H}_1 \mid \tilde{L}(\lambda)x \in \mathcal{H}\}.$$

Конечно, $\mathfrak{D}(L(\lambda))$ может зависеть от λ . Согласно [11] множество значений $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $L(\lambda)$ (оператор $\tilde{L}(\lambda)$) не имеет ограниченного обратного в $\mathcal{H}$ (в $\mathcal{H}_{-1}$), назовем *спектром пучка $L(\lambda)$* (*обобщенным спектром $L(\lambda)$*) и будем обозначать его $\sigma(L)$ (соответственно $\tilde{\sigma}(L)$).

Для формулировки теоремы определим числа

$$\begin{aligned}\beta &:= \inf\{(Bx, x) \mid x \in \mathfrak{D}(B), \|x\| = 1\}, \\ r(L) &:= \inf\{r \in \mathbb{R} \mid \tilde{L}(\lambda) \succ A \quad \text{для всех } \lambda > r\},\end{aligned}$$

где $\tilde{L}(\lambda) \succ A$ означает, что

$$(\tilde{L}(\lambda)x, x) \geq \varepsilon(Ax, x)$$

при некотором $\varepsilon > 0$ (зависящем от λ). Очевидно, из условия (5) следует $r(L) < 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть $A = A^* \gg 0$, $B \geq 0$ и B подчинен A в смысле квадратичных форм. Тогда оператор $\mathcal{T}_0$, определенный равенством (3), является существенно m -диссипативным, т.е. его замыкание $\mathcal{T}$ является m -диссипативным оператором в энергетическом пространстве $\mathcal{E} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}$. Оператор $\mathcal{T}$ определяется равенством

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\tilde{A}x_1 - \tilde{B}x_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

на области

$$\mathfrak{D}(\mathcal{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathcal{H}_1, \quad \tilde{A}x_1 + \tilde{B}x_2 \in \mathcal{H} \right\}. \quad (7)$$

Спектр оператора $\mathcal{T}$ содержится в $\tilde{\sigma}(L)$ – обобщенном спектре пучка $L(\lambda)$. При $\lambda \notin \tilde{\sigma}(L)$ и $\lambda \neq 0$ резольвента $(\mathcal{T} - \lambda)^{-1}$ имеет представление

$$(\mathcal{T} - \lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}(\tilde{L}^{-1}(\lambda)\tilde{A} - I) & -\tilde{L}^{-1}(\lambda) \\ \tilde{L}^{-1}(\lambda)\tilde{A} & -\lambda\tilde{L}^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Экспоненциальный тип $\omega(\mathcal{T})$ полугруппы $\exp(t\mathcal{T})$ допускает оценку

$$\omega(\mathcal{T}) \leq \omega_0 := \max\left\{r(L), -\frac{\beta}{2}\right\}. \quad (9)$$

В частности, если $B \gg 0$, то $\omega(\mathcal{T}) < 0$, т.е. полугруппа $\exp(t\mathcal{T})$ экспоненциально устойчива.

3. Предварительные результаты. Имеется обширная литература о необходимых и достаточных условиях на операторы в гильбертовом или банаховом пространствах, чтобы они были генераторами равномерно устойчивых C_0 -полугрупп (см., например, [8], [12]–[19] и имеющиеся там ссылки). Мы воспользуемся результатом Герхарта [13] для случая гильбертова пространства. Напомним, что пространство Харди $H^\infty(\alpha)$ в полуплоскости $\Pi(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \alpha\}$ состоит из голоморфных равномерно ограниченных функций в $\Pi(\alpha)$. Это же обозначение мы сохраняем и для пространств голоморфных равномерно ограниченных оператор-функций в $\Pi(\alpha)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [13]). *Пусть T – генератор C_0 -полугруппы $S(t)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда ее экспоненциальный тип определяется равенством*

$$\omega(T) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid (T - \lambda)^{-1} \in H^\infty(\alpha)\}.$$

Далее используются понятия замкнутой квадратичной формы и ассоциированного с ней оператора. Необходимые сведения об этих понятиях можно найти в книге [20, гл. VI].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $\lambda \in (r(L), \infty)$. Тогда в условиях теоремы квадратичная форма $\mathfrak{l}_\lambda[x] := (\tilde{L}(\lambda)x, x)$, определенная на элементе $x \in \mathcal{H}_1$, замкнута, и ассоциированный с ней согласно первой теореме о представлении оператор совпадает с $L(\lambda)$. Более того, оператор $L(\lambda)$ самосопряжен, равномерно положительен, причем $\mathfrak{D}([L(\lambda)]^{1/2}) = \mathcal{H}_1$, а оператор $\tilde{L}(\lambda)$ осуществляет биекцию $\mathcal{H}_1$ на $\mathcal{H}_{-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим на время, что замкнутость квадратичной формы $\mathfrak{l}_\lambda$ уже установлена. Поскольку при $\lambda > r(L)$ квадратичная форма $\mathfrak{l}_\lambda$ равномерно положительна, по первой теореме о представлении ей соответствует равномерно положительный самосопряженный оператор L_λ в $\mathcal{H}$ такой, что $\mathfrak{D}(L_\lambda^{1/2}) = \mathcal{H}_1$. Для $x \in \mathfrak{D}(L_\lambda)$ и произвольного $y \in \mathcal{H}_1$ имеем

$$(L_\lambda x, y) = \mathfrak{l}_\lambda[x, y] = (\tilde{L}(\lambda)x, y),$$

поэтому $L_\lambda x = \tilde{L}(\lambda)x = L(\lambda)x$. Таким образом, $L(\lambda)$ есть симметрическое расширение L_λ , и поэтому $L_\lambda = L(\lambda)$. Далее, оператор $L_\lambda^{1/2}$ отображает биективно $\mathcal{H}_1$ на $\mathcal{H}$, а его сопряженный $(L_\lambda^{1/2})^*$ (являющийся расширением $L_\lambda^{1/2}$) реализует биекцию $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_{-1} = (\mathcal{H}_1)^*$. Следовательно, $\tilde{L}(\lambda) = (L_\lambda^{1/2})^* L_\lambda^{1/2}$ – биекция $\mathcal{H}_1$ на $\mathcal{H}_{-1}$.

Итак, осталось доказать замкнутость квадратичной формы $\mathfrak{l}_\lambda$ на $\mathcal{H}_1$. При $\lambda = 0$ это очевидно. Из теоремы о замкнутости суммы форм [20, гл. VI, теорема 1.33] и условия (5) получаем, что форма $\mathfrak{l}_\lambda$ замкнута в $\mathcal{H}_1$, если λ принадлежит некоторой окрестности нуля. Пусть (a, b) – наибольший интервал такой, что квадратичные формы $\mathfrak{l}_\lambda$ замкнуты на $\mathcal{H}_1$ при всех $\lambda \in (a, \infty)$. Предположим, что $a > r(L)$. Согласно определению

$$\mathfrak{l}_a[x] = (\tilde{L}(a)x, x) \geq \varepsilon(Ax, x), \quad x \in \mathcal{H}_1,$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Пусть c – константа из (5). Вновь используя теорему о замкнутости суммы форм, получаем, что квадратические формы $\mathfrak{l}_a$ и $\mathfrak{l}_{a+\delta}$ с произвольным $\delta \in (-\varepsilon/2c, \varepsilon/2c)$ замкнуты или не замкнуты на $\mathcal{H}_1$ одновременно. Поскольку $\mathfrak{l}_{a+\delta}$ замкнута на $\mathcal{H}_1$ при всех $\delta > 0$, мы получаем противоречие с выбором a . Поэтому предположение $a > r(L)$ неверно, т.е. $a \leq r(L)$. Аналогично доказывается, что $b = \infty$.

4. Доказательство теоремы. Разобьем его на несколько шагов.

Шаг 1. Условие диссипативности

$$\operatorname{Re}(\mathcal{T}_0 x, x) = -(Bx_2, x_2), \quad x = (x_1, x_2)^T,$$

проверяется непосредственно. Следовательно, $\mathcal{T}_0$ допускает замыкание $\mathcal{T}$. Согласно определению $\mathcal{T}_0$ является существенно m -диссипативным, если образ $\mathcal{T}_0 - \lambda$ плотен в $\mathcal{E}$ при некотором (а тогда при всех) λ из правой полуплоскости. Покажем, что при любых $y_1 \in \mathfrak{D}(B)$, $y_2 \in \mathcal{H}$, $\lambda > 0$ уравнение

$$(\mathcal{T}_0 - \lambda)(x_1, x_2)^T = (y_1, y_2)^T$$

разрешимо. Согласно предложению 2 при $\lambda > 0$ оператор $L(\lambda)$ обратим, а тогда решение этого уравнения находим явно:

$$x_1 = -L^{-1}(\lambda)(y_2 + (B + \lambda)y_1), \quad x_2 = \lambda x_1 + y_1.$$

Поскольку $\mathfrak{D}(B)$ плотно в $\mathcal{H}_1$, то образ $\mathcal{T}_0 - \lambda$ плотен в $\mathcal{E} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}$.

Далее, оператор $\mathcal{T}$, определенный равенством (6) на области (7), является диссипативным расширением $\mathcal{T}_0$. Так как $\overline{\mathcal{T}_0}$ не допускает нетривиальных диссипативных расширений в $\mathcal{E}$, равенство $\mathcal{T} = \overline{\mathcal{T}_0}$ вытекает из замкнутости $\mathcal{T}$. Замкнутость $\mathcal{T}$ устанавливается непосредственно из определения, точно так же, как в теореме 1 работы [6].

Шаг 2. Заметим, что $\mathcal{T}$ ограниченно обратим в $\mathcal{E}$, причем

$$\mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} -\tilde{A}^{-1}\tilde{B} & -\tilde{A}^{-1} \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, при $\lambda \neq 0$, $\lambda \notin \tilde{\sigma}(L)$, можно явно вычислить резольвенту $(\mathcal{T} - \lambda)^{-1}$, которая выражается формулой (8). Из этого представления и предложения 1 получаем следующий результат.

Предложение 3. C_0 -полугруппа $\exp(t\mathcal{T})$ имеет экспоненциальный тип $\omega(\mathcal{T}) \leq \omega_0$ в том и только том случае, если при любом $\alpha > \omega_0$ все четыре оператор-функции

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &:= (\lambda - \omega_0)^{-1} A^{1/2} \tilde{L}^{-1}(\lambda) \tilde{A}^{1/2}, & f_2(\lambda) &:= A^{1/2} \tilde{L}^{-1}(\lambda), \\ f_3(\lambda) &:= \tilde{L}^{-1}(\lambda) \tilde{A}^{1/2}, & f_4(\lambda) &:= \lambda \tilde{L}^{-1}(\lambda) \end{aligned} \quad (10)$$

принадлежат пространству $H^\infty(\alpha)$ в равномерной операторной топологии пространства $\mathcal{H}$. Здесь $\tilde{A}^{1/2} = \tilde{A}A^{-1/2}$ – расширение $A^{1/2}$ как оператора из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_{-1}$.

Шаг 3. Фиксируем произвольное число δ , подчиненное условию $\delta > \omega_0 := \max\{-\beta/2, r(L)\}$. Положим $B_1 = B + 2\delta$, $A_1 = L(\delta)$. Через $\tilde{B}_1$, $\tilde{A}_1$ обозначим соответствующие расширения B_1 и A_1 как операторов из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Рассмотрим оператор-функцию

$$\tilde{L}_1(\lambda) := \lambda^2 + \lambda \tilde{B}_1 + \tilde{A}_1 = \tilde{L}(\lambda + \delta)$$

из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_{-1}$ и соответствующую ей оператор-функцию $L_1(\lambda) = L(\lambda + \delta)$ в $\mathcal{H}$. Согласно предложению 2 имеем $A_1 \gg 0$, $\mathfrak{D}(A_1) = \mathcal{H}_1$. Очевидно, B_1 подчинен A_1 в смысле квадратичных форм, и из определения числа β следует $B_1 > 0$.

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_1 & B_1 \end{pmatrix}.$$

По доказанному на шаге 1 $\mathcal{T}_1$ существенно m -диссипативен в $\mathcal{E}$, а его замыкание $\overline{\mathcal{T}_1}$ генерирует C_0 -полугруппу сжатий в $\mathcal{E}$. Из предложения 3 получаем, что все четыре функции

$$\begin{aligned} g_1(\lambda) &:= (\lambda - \omega_0)^{-1} A_1^{1/2} \tilde{L}_1^{-1}(\lambda) \tilde{A}_1^{1/2}, & g_2(\lambda) &:= A_1^{1/2} \tilde{L}_1^{-1}(\lambda), \\ g_3(\lambda) &:= \tilde{L}_1^{-1}(\lambda) \tilde{A}_1^{1/2}, & g_4(\lambda) &:= \lambda \tilde{L}_1^{-1}(\lambda) \end{aligned}$$

принадлежат пространствам Харди $H^\infty(\alpha)$ при любом $\alpha > 0$. Так как оба оператора $A_1^{1/2}$ и $A_1^{1/2}$ осуществляют биекцию $\mathcal{H}_1$ на $\mathcal{H}$, то оператор $K = A_1^{1/2} A^{-1/2}$ ограничен и обратим в $\mathcal{H}$. Учитывая равенства

$$A_1^{1/2} = K A^{1/2}, \quad \tilde{A}_1^{1/2} = \tilde{A}^{1/2} K^*, \quad \tilde{L}_1(\lambda) = \tilde{L}(\lambda + \delta),$$

получаем, что все четыре функции в (10) принадлежат пространствам Харди $H^\infty(\alpha)$ при любом $\alpha > \delta$. Вновь воспользовавшись предложением 3, получим, что полугруппа $\exp(t\mathcal{T})$ имеет экспоненциальный тип $\leq \delta$. Это завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В заключение отметим, что для симметрического оператора B условия (5) и $B \gg 0$ являются в некотором смысле необходимыми для экспоненциальной устойчивости полугруппы $\exp(t\mathcal{T})$. Действительно, при нарушении (5) оператор $\mathcal{T}$ не является ограниченно обратимым в $\mathcal{E}$ (ср. шаг 2 доказательства теоремы), т.е. $0 \in \sigma(\mathcal{T})$ и $\omega(\mathcal{T}) \geq s(\mathcal{T}) = 0$. Если же не требовать равномерной положительности оператора B , то, например, при $B = A^{-1}$ также получим $\omega(\mathcal{T}) \geq s(\mathcal{T}) = 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chen G., Russel D. L. A mathematical model for linear elastic systems with structural damping // Quart. Appl. Math. 1982. № 1. P. 433–454.
- [2] Chen S., Triggiani R. Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems // Pacific J. Math. 1989. V. 136. № 1. P. 15–55.
- [3] Huang F. On the mathematical model for linear elastic systems with analytic damping // SIAM J. Control Optim. 1988. V. 26. № 3. P. 714–724.
- [4] Chen S., Triggiani R. Gevrey class semigroups arising from elastic systems with gentle dissipation: the case $0 < \alpha < 1/2$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 110. № 2. P. 401–415.
- [5] Huang F. Some problems for linear elastic systems with damping // Acta Math. Sci. 1990. V. 10. № 3. P. 316–326.
- [6] Гринив Р. О., Шкаликов А. А. Операторные модели в теории упругости и гидромеханике и ассоциированные с ними аналитические полугруппы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех. 1999. № 5. С. 5–14.
- [7] Любич Ю. И. Классическое и локальное преобразование Лапласа в абстрактной задаче Коши // УМН. 1966. Т. 21(129). № 3. С. 3–51.
- [8] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations // Applied Mathematical Sciences. V. 44. New York–Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [9] Kato T. A generalization of the Heinz inequality // Proc. Japan. Acad. 1961. V. 37. P. 305–308.
- [10] Лионс Ж.-Л., Мадженес Е. Неоднородные граничные задачи и приложения. I. М.: Мир, 1971.

- [11] Shkalikov A. A. Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula // *Operator Theory: Adv. and Appl.* V. 87: Birkhäuser-Verlag, 1996. P. 358–385.
- [12] Datko R. Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert space // *J. Math. Anal. Appl.* 1970. V. 32. P. 610–616.
- [13] Gearhart L. Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1978. V. 236. P. 385–394.
- [14] Van Casteren J. A. Operators similar to unitary or self-adjoint ones // *Pacific J. Math.* 1983. V. 104. № 1. P. 241–255.
- [15] Набоко С. Н. Об условии подобия унитарным или самосопряженным операторам // *Функцион. анал. и его прилож.* 1984. Т. 18. № 1. С. 16–27.
- [16] Маламуд М. М. Критерий подобия замкнутого оператора самосопряженному // *Укр. матем. ж.* 1985. Т. 37. № 1. С. 49–56.
- [17] Rolewicz S. On uniform N -equistability // *J. Math. Anal. Appl.* 1986. V. 115. P. 431–441.
- [18] Littman W. A Generalization of a Theorem of Datko and Pazy // *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.* V. 130. Berlin–New York: Springer, 1989. P. 318–323.
- [19] Гомилко А. М. Об условиях на производящий оператор равномерно ограниченной C_0 -полугруппы операторов // *Функцион. анализ и его прилож.* 2000. Т. 33. № 4. С. 66–69.
- [20] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Институт прикладных проблем механики и математики,
Львов, Украина
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: rhryniv@iapmm.lviv.ua
ashkalikov@yahoo.com

Поступило
28.10.2002