Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Гусев, О выпуклых реализациях плоских линейных деревьев, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 665–675

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm218>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:58:37

УДК 514.774

О ВЫПУКЛЫХ РЕАЛИЗАЦИЯХ ПЛОСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Н. С. Гусев

В настоящей статье доказан необходимый признак существования выпуклой реализации у плоского линейного дерева; установлено, что этот признак достаточен для случая ломаных и найден непрерывный алгоритм построения такой реализации.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. В настоящей работе изучается задача выпуклой реализации плоских линейных деревьев. Это одна из задач, связанных с известной проблемой Штейнера (см. [1]–[4]) поиска сети минимальной длины, стягивающей данное конечное множество точек на плоскости; это множество обычно называется *граничным*.

В связи с тем, что проблема Штейнера является NP-трудной (см. [1]–[5]), А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным в [2] была поставлена задача о зависимости между геометрией границы и возможными типами (топологиями) минимальной сети. Один из подходов к изучению этой зависимости – рассматривать параллельные реализации (определение см. ниже) линейных плоских бинарных деревьев с межреберными углами при вершинах равными $2\pi/3$, при том, что граничное множество обладает некоторыми заданными геометрическими свойствами; например, оно расположено на границе выпуклого многоугольника. В качестве обобщения этой задачи можно рассмотреть параллельные реализации взвешенных локально минимальных деревьев (см. [6], [7]) и, далее, произвольных деревьев.

Прежде чем сформулировать задачу и результат этой работы, приведем некоторые определения, см. также [6].

Полуплоскость P вместе с некоторой частью своей границы назовем *опирающейся* на точку p , если $p \in \partial P$.

Вложением связного неориентированного без кратных ребер и петель графа $G = (V, E)$ в плоскость назовем такое инъективное отображение τ , определенное на $V \sqcup E$ и сопоставляющее вершинам точки, а ребрам интервалы, что замыкания образов несмежных ребер непересекаются, а замыкания образов смежных ребер пересекаются только по образу их общей вершины. Вложение τ графа G будем также обозначать (G, τ) , или говорить, что граф G *τ -вложенный*. Значение вложения τ графа G на вершине p будем обозначать τ_p или $\tau(p)$.

Вершину p τ -вложенного графа G назовем *τ -граничной* (*граничной*), если найдется открытая полуплоскость P , опирающаяся на образ p , такая, что все τ -образы ребер графа G , инцидентных этой вершине, лежат в P ; неграничную вершину такую, что образы всех инцидентных ей ребер располагаются на одной прямой, назовем *τ -фактивной*.

Множество всех τ -граничных вершин графа G назовем его τ -границей (границей) и обозначим через $\delta_\tau G$.

Два вложения графов (G, α) и (H, β) назовем *параллельными*, если найдутся изометрия ψ плоскости $\mathbb{R}^2$ и изоморфизм ϕ графов G и H такие, что для произвольных трех вершин p, q, r графа G таких, что p и r соседние с q , выполняется равенство

$$\angle(\overrightarrow{\alpha_q \alpha_p}, \overrightarrow{\alpha_q \alpha_r}) = \angle(\overrightarrow{\gamma_q \gamma_p}, \overrightarrow{\gamma_q \gamma_r}),$$

где $\gamma = \psi \circ \beta \circ \phi$ – композиция отображений, а $\angle(a, b)$ – ориентированный угол от вектора a до вектора b , принимающий значения в $(-\pi, \pi]$.

Вложение графа назовем *выпуклым*, если его граница лежит на границе выпуклого многоугольника, и *выпукло реализуемым*, если найдется ему параллельное выпуклое вложение.

Пусть (T, τ) – вложение дерева, $p \in \delta_\tau T$.

Тогда ребро e , инцидентное p , назовем *p -опорным*, если образы всех ребер, инцидентных p , лежат в одной замкнутой полуплоскости относительно прямой, проходящей через образ e .

Заметим, что у всякой граничной вершины p или одно или два опорных ребра. Если их два, то занумеруем их (e_1^p, e_2^p) так, чтобы пара векторов направлений этих ребер с началами в p образовывала положительно ориентированный базис. Если опорное ребро одно, то положим $e_1^p = e_2^p$.

Назовем *фрагментом дерева T , соответствующим ребру e (фрагментом ребра e)*, максимальный по включению отрезок среди всех отрезков, содержащихся в образе дерева T и содержащих образ ребра e .

Ребро e назовем *двусторонним*, если среди образов ребер, пересекающих фрагмент ребра e , найдутся два, лежащие по разные стороны относительно прямой, проходящей через этот фрагмент.

Назовем *ломаной* дерево с не менее чем одним ребром, степени всех вершин которого суть 1 или 2. *Простой ломаной* будем называть образ вложения ломаной. Ломаная *ориентирована*, если известно (задано) какая из двух ее вершин степени один начальная и какая конечная. У всякой ориентированной ломаной A обозначим $A_0, \dots, A_{n+1}$ все ее вершины в порядке ориентации, а число n назовем *длиной* ломаной. Для вложения f ориентированной ломаной A длины $n > 0$ обозначим

$$\begin{aligned} \text{ang}_f(i) &:= \angle(\overrightarrow{f(A_{i-1})f(A_i)}, \overrightarrow{f(A_i)f(A_{i+1})}), \quad i = 1, \dots, n, \\ \text{ang}_f &:= (\text{ang}_f(1), \dots, \text{ang}_f(n)), \quad \text{tw}(f) := \sum_{i=1}^n \text{ang}_f(i). \end{aligned}$$

Заметим, что иногда сумму в tw делят на $\pi/3$ (см. [6], [7]).

Пусть (T, τ) – вложение дерева, $p, q \in \delta_\tau T$, $p \neq q$. Тогда введем обозначения

- T^{pq} – ориентированная от p к q ломаная, соединяющая вершины p и q в дереве T ;
- $\hat{T}^{pq}$ – ломаная, получаемая из T^{pq} добавлением тех ребер из e_1^p и e_2^q , которые не входят в T^{pq} , с сохранением ориентации ломаной.

Обозначив ω вложение ломаной $\hat{T}^{pq}$, осуществляемое вложением всего дерева, определим также следующую функцию:

$$\text{agg}_\tau(p, q) := \text{tw}(\omega) - \nu\pi,$$

где ν – количество тех ребер из набора (e_1^p, e_2^q) , которые входят в состав ломаной T^{pq} .

Назовем вложение (T, τ) *строго неположительным*, если для всяких неравных граничных вершин p, q выполняются оба условия

1. $\text{agg}_\tau(p, q) \leq 0$;
2. если хотя бы одно из ребер e_1^p или e_2^q двустороннее, то неравенство строгое.

ЗАДАЧА. Исследовать, при каких условиях вложение дерева является выпукло реализуемым.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если вложение дерева (T, τ) выпукло реализуемо, то оно строго неположительно.*

ТЕОРЕМА 1.2. *Вложение ломаной (T, τ) выпукло реализуемо, если и только если оно строго неположительно.*

Кроме того, найден алгоритм построения выпуклой реализации и описано геометрическое строение совокупности всех классов параллельности выпукло реализуемых ломанных.

2. Общее необходимое условие выпуклой реализуемости вложений деревьев. В этом разделе мы докажем теорему 1.1. Ее доказательство проведем в пяти леммах. Будем считать, что образ дерева не является отрезком, так как в случае, когда образ дерева – отрезок, эта теорема очевидна.

Прежде всего определим некоторые понятия. Пусть $(F, f), (G, g)$ – вложения ориентированных ломанных. Тогда обозначим:

- $A := f(F) \cap g(G)$;
- B – совокупность связных компонент множества A (заметим, что этих связных компонент конечное число и каждая из них является или точкой или простой ломаной);
- для каждой связной компоненты $b \in B$ обозначим через $\hat{b}$ совокупность концевых точек b ;
- $C := \bigcup_{b \in B} \hat{b}$ (ясно, что C – конечное подмножество в A);
- упорядочив C вдоль f и g , получим соответственно $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ и $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – конечные последовательности всех точек из C такие, что μ_i предшествует μ_{i+1} вдоль f , и ν_i предшествует ν_{i+1} вдоль g .

ЛЕММА 2.1. *Пусть $(F, f), (G, g)$ – такие вложения ориентированных ломанных, что их начальные и конечные точки совпадают и существует односвязный многоугольник M , содержащий в себе g , частью границы которого является ломаная f . Тогда $\mu = \nu$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что $\mu_1 = \nu_1$ и $\mu_n = \nu_n$.

Допустим $\mu \neq \nu$; тогда $i := -1 + \min\{j : \mu_j \neq \nu_j\}$ и найдется $j : \nu_{i+1} = \mu_j$, а значит, $j > i + 1$.

Обозначим $\tilde{f}$ участок образа ломаной f от μ_i до μ_j , а $\tilde{g}$ – участок образа ломаной g от ν_i до ν_{i+1} .

1. Заметим, что если бы $A \supset \tilde{g}$, то ν_i и ν_{i+1} являлись бы концевыми точками ломаной $\tilde{g}$, а значит, $\tilde{g} \in B$; но тогда μ_i и μ_j были бы соседними точками C вдоль f , т.е. $i + 1 = j$, что противоречит предположению. Следовательно, $A \not\supset \tilde{g}$.

2. Если $\tilde{f} \cap \tilde{g} \neq \{\mu_i, \mu_j\}$, т.е. существует $\alpha \in \tilde{f} \cap \tilde{g}$ и $\alpha \neq \mu_i, \mu_j$, то найдется такая $b \in B$, что $\alpha \in b$, но тогда $\tilde{b}$ есть одна или две точки, лежащие на g между ν_i и ν_{i+1} , а значит равные им (или одной из них); отсюда $\tilde{g} = b \subset A$, что противоречит п. 1.

3. Из п. 2 следует, что $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ образуют вместе простую замкнутую ломаную l , ограничивающую некоторый односвязный многоугольник $\tilde{M} \subset M$.

4. Заметим, что найдется $k > i + 1$ такое, что $\mu_{i+1} = \nu_k$, но тогда $\nu_k \in \tilde{M}$, а значит, часть g , начинающаяся в ν_{i+1} , и до конца вся лежит в $\tilde{M}$, что противоречит условию совпадения концов f и g , а значит, исходное допущение неверно и лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть f, g, M как в лемме 2.1 и существуют открытые множества U и V такие, что $U \ni$ начало f и g ; $V \ni$ конец f и g ; $U \cap f(F) = U \cap g(G)$; $V \cap f(F) = V \cap g(G)$. Тогда $\text{tw}(f) = \text{tw}(g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что из леммы 2.1 следует, что $\mu = \nu$, а отсюда с помощью индукции по μ_k нетрудно убедиться в справедливости утверждаемого.

ЛЕММА 2.3. Пусть (T, τ) – выпуклое вложение дерева, $p, q \in \delta_\tau T, p \neq q$. Тогда $\text{agg}_\tau(p, q) \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего введем некоторые обозначения:

- e_{pq} – ребро ломаной T^{pq} , инцидентное вершине p ;
- M – выпуклая оболочка $\tau(T)$;
- W – та из двух дуг ∂M , образованных образами вершин p и q , ориентированных от $\tau(p)$ к $\tau(q)$, tw которой больше;
- w_p^{pq}, w_q^{pq} – непересекающиеся отрезки, включенные в W , инцидентные $\tau(p)$ и $\tau(q)$ соответственно.

Заметим, что если L – прямая, натянутая на отрезок w_p^{pq} , то пересечения отрезков $w_p^{pq}, \tau(e_1^p), \tau(e_{pq})$ с окружностью достаточно малого радиуса с центром в $\tau(p)$ лежат по одну сторону относительно прямой L и угловые координаты этих точек пересечения монотонно возрастают. Отсюда ясно, что все взаиморасположения отрезков $w_p^{pq}, \tau(e_1^p), \tau(e_{pq})$ могут быть такими:

- 1) $w_p^{pq} \neq \tau(e_1^p) \neq \tau(e_{pq})$, и следовательно, $w_p^{pq} \neq \tau(e_{pq})$;
- 2) $w_p^{pq} \neq \tau(e_1^p) = \tau(e_{pq})$;
- 3) $w_p^{pq} = \tau(e_1^p) \neq \tau(e_{pq})$;
- 4) $w_p^{pq} = \tau(e_1^p) = \tau(e_{pq})$,

и аналогичное замечание можно сделать об отрезках $w_q^{pq}, \tau(e_2^q), \tau(e_{qp})$, однако здесь угловые координаты будут убывать.

Определим еще три простые ломаные:

- X = расширение τ -образа T^{pq} ребрами w_p^{pq}, w_q^{pq} ;
- Y = дополнительная к W дуга, расширенная w_p^{pq}, w_q^{pq} ;
- Z = та же дуга, расширенная τ -образами e_1^p, e_2^q .

С помощью леммы 2.2, замечания и ломаных $X, Y, Z, \hat{T}^{pq}$ нетрудно убедиться, что для каждой из пар случаев 1–4 для p, q выполняется утверждаемое неравенство.

Для завершения доказательства теоремы 1.1 определим r_{pq}^p, r_{pq}^q как лучи с началами в $\tau(p)$ и $\tau(q)$, содержащие интервалы $\tau(e_1^p)$ и $\tau(e_2^q)$ соответственно.

ЛЕММА 2.4. Пусть (T, τ) – выпуклое вложение дерева, $p, q \in \delta_\tau T$, $p \neq q$, $\text{agg}_\tau(p, q) = 0$. Тогда лучи r_{pq}^p, r_{pq}^q лежат на одной прямой l_{pq} и каждый из них в пересечении с ∂M образует невырожденный отрезок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из рассмотрения случаев взаиморасположения, описанных в доказательстве леммы 2.3, непосредственно вытекает утверждаемое.

ЛЕММА 2.5. Пусть (T, τ) – выпуклое вложение дерева, $p, q \in \delta_\tau T$, $p \neq q$. Тогда если хотя бы одно из ребер e_1^p или e_2^q двустороннее, то $\text{agg}_\tau(p, q) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим $\text{agg}_\tau(p, q) = 0$. Тогда из леммы 2.4 вытекает, что вся $\text{conv } \delta_\tau T$ лежит по одну сторону относительно l_{pq} , что противоречит наличию двустороннего ребра.

Таким образом теорема 1.1 доказана.

3. О достаточности необходимого условия выпуклой реализуемости для случая ломаных. В этом разделе доказывается теорема 1.2.

Мы не будем отличать в этом разделе ломаные от простых ломаных, и будем считать, что ломаная параметризована деревом, вершины которого суть $0, \dots, n+1$, а ребра суть пары $\{0, 1\}, \dots, \{n, n+1\}$, а также, что у ломаных нет фиктивных вершин.

Прежде всего сформулируем несколько определений.

Назовем конечную последовательность чисел $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *угловой последовательностью*, если найдется ориентированная ломаная f такая, что покомпонентно совпадают наборы чисел ang_f и φ (ясно, что это равносильно условию $\varphi_i \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, где $i = 1, \dots, n$).

Пусть φ – угловая последовательность длины n . Тогда определим ее расширение $\bar{\varphi}_0, \dots, \bar{\varphi}_{n+1}$, положив

$$\bar{\varphi}_i = \begin{cases} \varphi_i, & i = 1, \dots, n, \\ -\pi \operatorname{sign} \varphi_1, & i = 0, \\ -\pi \operatorname{sign} \varphi_n, & i = n+1. \end{cases}$$

Для φ – угловой последовательности длины n , и $i, j = 0, \dots, n+1$, где $i \leq j$, обозначим $\varphi(i, j) := \sum_{k=i}^j \bar{\varphi}_k$.

Угловую последовательность φ длины n назовем *выпуклой*, если $\forall i, j = 0, \dots, n+1$, $i < j$, $\operatorname{sign} \bar{\varphi}_i = \operatorname{sign} \bar{\varphi}_j =: \varepsilon$ выполняется

- 1) $\varphi(i, j) \in [0, 2\pi\varepsilon]$;
- 2) если $i > 1$ или $j < n$, то $\varphi(i, j) \neq 2\pi\varepsilon$;
- 3) если $\operatorname{sign} \varphi_{i-1}$ или $\operatorname{sign} \varphi_{j+1} = -\varepsilon$, то $\varphi(i, j) \neq 0$.

Заметим, что при этом из второго условия вытекает, что в третьем условии $\varphi(i, j) \neq 2\pi\varepsilon$.

Подмножество S множества целых чисел $\mathbb{Z}$ назовем *связным*, если оно является пересечением некоторого отрезка в $\mathbb{R}$ с $\mathbb{Z}$.

Если φ – угловая последовательность длины n , то множество $S \subset \{1, \dots, n\}$ назовем *φ -знакопостоянным*, если φ имеет постоянный знак на нем.

Максимальное по включению связное φ -знакопостоянное множество назовем *φ -сегментом*.

Ясно, что всякий φ -сегмент не пуст. Определим знак φ -сегмента, как знак φ на нем. Легко видеть, что для всякой угловой последовательности φ найдется одна и только

одна конечная естественно упорядоченная последовательность $\Gamma_1^\varphi, \dots, \Gamma_m^\varphi$ всех ее φ -сегментов, где m – их количество, причем видно, что знаки сегментов чередуются.

Обозначим через δf – множество всех вершин ломаной f и назовем *границей* f (ясно, что эта граница совпадает с границей, определенной во введении); через M_f – выпуклую оболочку границы δf ломаной f .

Назовем ломаную g *подломаной* в ломаной f , если g – подграф в f .

Ясно, что если f – ломаная, то она лежит в M_f , а если f выпукла, то $\delta f \subset \partial M_f$.

Если f – невырожденная (т.е. длины большей нуля) выпуклая ломаная, то ∂M_f гомеоморфна окружности S^1 , а ∂M_f без двух концевых вершин ломаной состоит из двух “дуг”, т.е. связных компонент, гомеоморфных прямой $\mathbb{R}$. Если точка $x \in \partial M_f$ – не концевая вершина f , то обозначим через W_x^f ту из этих дуг, которая содержит x .

Ясно, что если f – выпуклая ломаная, а g – ее подломаная, то g выпукла.

Заметим, что если f – ориентированная невырожденная выпуклая ломаная, то знаки всяких двух ее вершин совпадают, если и только если совпадают их дуги.

ЛЕММА 3.1. Пусть f – ориентированная выпуклая невырожденная ломаная. Тогда ang_f – выпуклая угловая последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть длина f равна n .

1. Рассмотрим случай, когда $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$, $\text{sign ang}_f(i) = \text{sign ang}_f(j) =: \varepsilon$.

Без ограничения общности положим $\varepsilon = -1$. Заметим, что $0 \geq \text{agg}_f(i, j) = \text{ang}_f(i, j)$. Если $\text{sign ang}_f(i-1)$ или $\text{sign ang}_f(j+1) = 1$, то, по крайней мере, одно из ребер $\{i-1, i\}$ или $\{j, j+1\}$ двустороннее, а значит, неравенство строгое (см. теорему 1.1). Нетрудно увидеть, что $\text{agg}_f(j+1, i-1) = -\text{ang}_f(i, j) + \lambda$, где λ – число, составленное из слагаемых, входящих в agg в вершинах $i-1$ и $j+1$; оно может принимать значения из $[-2\pi, 0]$, что вместе с теоремой 1.1 влечет $\text{ang}_f(i, j) \geq -2\pi$. Если $\text{sign ang}_f(i-1) = 1$, то $\lambda = -\text{ang}_f(i, j) + \kappa$ для некоторого $\kappa \in [-\pi, 0]$. Следовательно, $\lambda > -2\pi$ и $\text{ang}_f(i, j) > -2\pi$. Если же $\text{sign ang}_f(i-1) = -1$, то $-2\pi \leq \text{ang}_f(i-1, j) = \text{ang}_f(i, j) + \text{ang}_f(i-1)$, что влечет $\text{ang}_f(i, j) \geq -2\pi - \text{ang}_f(i-1) > -2\pi$.

2. Случаи $i = 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$; $i \in \{1, \dots, n\}$, $j = n+1$; $i = 0$, $j = n+1$, рассматриваются аналогично.

Таким образом лемма доказана.

Далее будем считать, что задана выпуклая угловая последовательность φ числа сегментов $m > 0$.

Назовем ориентированную ломаную f *реализацией* φ , если $\text{ang}_f = \varphi$, и *выпуклой реализацией*, если к тому же f выпукла.

Пусть $k = 0, \dots, m$; тогда назовем ориентированную ломаную f *выпуклой k -реализацией* φ , если f удовлетворяет следующим условиям:

- при $k = 0$ f – произвольная ориентированная вырожденная ломаная;
- при $k > 0$ f – выпуклая ориентированная ломаная такая, что ang_f совпадает с первыми k сегментами φ .

Если f – ориентированная ломаная, то определим для нее направления:

- H_f – единичный вектор, сонаправленный последнему ребру f ;
- G_f – единичный вектор такой, что если f невырождена, то он сонаправлен предпоследнему ребру f , а если f вырождена, то $G_f = -H_f$.

Если f – выпуклая ориентированная ломаная, то x_f, y_f – векторы единичной длины такие, что если f вырождена, то $x_f = H_f, y_f = G_f$; иначе x_f совпадает с вектором H для ориентированной ломаной, образованной естественно ориентированной дугой ∂M_f без концов f , не содержащей последнего ребра f ; обозначив через g ломаную f без последнего ребра, определим вектор y_f как вектор H для ориентированной ломаной, образованной той естественно ориентированной дугой ∂M_g без концов g , которая содержится в дуге ∂M_f , дополняющей дугу, образующую x_f .

Определим для φ последовательность

$$s_k = \begin{cases} \text{sign } \Gamma_k^\varphi, & k = 1, \dots, m, \\ -\text{sign } \Gamma_1^\varphi, & k = 0. \end{cases}$$

Будем рассматривать вместе с выпуклой k -реализацией f угловой последовательности φ числа

$$q = \begin{cases} 1 + \max \Gamma_k^\varphi, & k = 1, \dots, m, \\ 1, & k = 0, \end{cases} \\ s = \max \Gamma_{k+1}^\varphi, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Назовем *подходящей k -реализацией* φ ломаную f , являющуюся выпуклой k -реализацией φ , и такую, что если $k < m$, то выполнены следующие четыре условия:

1) для всякого $j \geq q$ такого, что $\bar{\varphi}_q \bar{\varphi}_j > 0$, верно

$$s_k \angle(H_f, x_f) \geq s_k \varphi(q, j);$$

2) для всякого $j \geq q-1$ такого, что $\bar{\varphi}_{q-1} \bar{\varphi}_j > 0$ верно

$$s_k \angle(G_f, y_f) \leq s_k \varphi(q-1, j);$$

3) для всякого $j \geq q$ такого, что $\bar{\varphi}_q \bar{\varphi}_j > 0$ и сегмент, содержащий j , состоит только из j , верно

$$s_k \angle(H_f, x_f) > s_k \varphi(q, j);$$

4) для всякого $j \geq q-1$ такого, что $\bar{\varphi}_{q-1} \bar{\varphi}_j > 0$ и сегмент (если $j > q-1$), содержащий j , состоит только из j , верно

$$s_k \angle(G_f, y_f) < s_k \varphi(q-1, j).$$

ЛЕММА 3.2. *Существует подходящая 0-реализация.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную вырожденную ориентированную ломаную f . Она выпукла и, следовательно, чтобы доказать, что она подходящая 0-реализация, достаточно доказать неравенства из 1)–4). Без ограничения общности будем считать, что $s_0 = 1$.

Первое неравенство $\angle(H_f, x_f) \geq \varphi(q, j)$, где $q = 1$, выполняется, ибо $\angle(H_f, x_f) = 0$ (так как $H_f = x_f$), а $\varphi(q, j) \leq 0$ по выпуклости φ .

Второе неравенство $\angle(G_f, y_f) \leq \varphi(q-1, j)$ выполняется, ибо $G_f = y_f$ и $\varphi(q-1, j) \geq 0$ по выпуклости φ .

Неравенства из 3) и 4) точно так же непосредственно следуют из определений. Лемма доказана.

Если f – подходящая k -реализация φ , $k < m$, то определим $\mu = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, где

$$\beta = s_k \min\{|\varphi(q-1, j)| : j \geq q-1, \bar{\varphi}(q-1)\bar{\varphi}(j) > 0\},$$

$$\alpha = s_k \max\{s_k \angle(G_f, y_f), s_k \varphi(q-1, s)\}.$$

Это число μ будет основой продолжения f .

ЛЕММА 3.3. Для f – подходящей k -реализации набора φ , $k < t$, верны следующие неравенства:

- 1) $s_k \mu \geq s_k \angle(G_f, y_f)$;
- 2) $s_k \mu < s_k \bar{\varphi}_{q-1}$;
- 3) $s_k \mu > s_k \varphi(q-1, s)$;
- 4) $s_k \mu \leq s_k(-\pi + \varphi(q-1, s))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что $s_k = -1$. Тогда

$$\mu = \frac{1}{2}(\min\{\angle(G_f, y_f), \varphi(q-1, s)\} + \max\{\varphi(q-1, j) : j \geq q-1, \bar{\varphi}_j < 0\}).$$

Докажем 1). Ясно, что $\mu \leq \frac{1}{2}(\angle(G_f, y_f) + \beta)$. Вычислим ограничение сверху на β . Из второго условия в определении подходящей k -реализации следует, что $\angle(G_f, y_f) \geq \varphi(q-1, j)$, $j \geq q-1$, при $\bar{\varphi}_{q-1}\bar{\varphi}_j > 0$, т.е. $\beta \leq \angle(G_f, y_f)$, а значит, $\mu \leq \angle(G_f, y_f)$.

Докажем 2). Оценим β снизу:

$$\beta = \max\{\varphi(q-1, j) : j \geq q-1, \bar{\varphi}_j < 0\} \geq \varphi(q-1, q-1) = \bar{\varphi}_{q-1}.$$

Оценим снизу α , т.е. оценим $\angle(G_f, y_f)$ и $\varphi(q-1, s)$: $\angle(G_f, y_f) > \bar{\varphi}_{q-1}$ из четвертого условия определения подходящей k -реализации и

$$\varphi(q-1, s) = \bar{\varphi}_{q-1} + \varphi_q + \dots + \varphi_s > \bar{\varphi}_{q-1},$$

так как $\varphi_q + \dots + \varphi_s > 0$, из-за того, что знаки сегментов чередуются.

Из этих оценок следует, что $\mu > \bar{\varphi}_{q-1}$.

Докажем 3). Допустим противное, т.е. $\varphi(q-1, s) \leq \mu$. Тогда из первого свойства вытекает, что $\varphi(q-1, s) \leq \mu \leq \angle(G_f, y_f)$, и $\mu = \frac{1}{2}(\varphi(q-1, s) + \beta)$. Из последних двух неравенств и доказательства второго свойства видно, что $\beta > \varphi_{q-1}$, и найдется $j > q-1$ такое, что $\bar{\varphi}_j < 0$ и $\varphi(q-1, s) + \varphi(s+1, j) = \varphi(q-1, j) \geq \varphi(q-1, s)$. Заметим, что отсюда $\varphi(s+1, j) \geq 0$. Рассмотрим два случая:

- 1) если $s+1 = j$, то $\varphi(s+1, s+1) = \bar{\varphi}_{s+1} \geq 0$, что противоречит тому, что $\bar{\varphi}_{s+1} < 0$, так как $s+1$ следует непосредственно за положительным сегментом Γ_{k+1}^φ ;
- 2) если $s+1 < j$, то $\varphi(s+1, j) \in [-2\pi, 0)$ из третьего условия определения выпуклой угловой последовательности, что также противоречиво.

Докажем 4). Из второго условия определения подходящей k -реализации следует, что $\angle(G_f, y_f) \geq \beta$. Заметим, что $\varphi(q-1, s) \geq \beta$, так как $\beta = \max\{\bar{\varphi}_{q-1}, \varphi(q-1, s) + \gamma\}$, где $\gamma = \max\{\varphi(s+1, j) : j \geq s+1, \bar{\varphi}_{s+1}\bar{\varphi}_j > 0\}$, и из первого условия определения выпуклой угловой последовательности вытекает, что $\gamma \leq 0$, и, как в первом пункте, $\bar{\varphi}_{q-1} < \varphi(q-1, s)$.

Отсюда следует, что $\mu \geq \beta$, так как $\beta \leq \varphi(q-1, s)$ и α оценено через β .

Оценим снизу β : $\beta \geq \varphi(q-1, s+1) = \varphi(q-1, s) + \bar{\varphi}_{s+1} \geq \varphi(q-1, s) + (-\pi)$.

Таким образом лемма доказана.

Из леммы 3.3 следует, что $\mu \in (-\pi, \pi)$, а значит, может считаться ориентированным углом между некоторыми векторами. Определим вектор $Z_{f, \varphi}$ как вектор единичной длины такой, что $\angle(G_f, Z_{f, \varphi}) = \mu$.

С помощью вектора $Z_{f, \varphi}$ построим продолжение f .

Нетрудно показать, что верно следующее утверждение.

ЛЕММА 3.4. Пусть числа $\phi_0, \dots, \phi_n, \mu \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, таковы, что $0 = \phi_0 < \phi_1 < \dots < \phi_n \leq \mu + \pi$; $0 < \mu \leq \pi$; $\phi_i - \phi_{i-1} < \pi$, $i = 1, \dots, n$; $\mu < \phi_n$.

Тогда числа $\psi_1, \dots, \psi_n$, индуктивно определенные равенствами

$$\psi_n = \mu, \quad \psi_i = \frac{1}{2}(\max\{0, \phi_{i+1} - \pi\} + \min\{\phi_i, \psi_{i+1}\}), \quad i = n-1, \dots, 1,$$

обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 0 < \psi_1 < \dots < \psi_{n-1}; \quad \psi_i < \phi_i, \quad i = 1, \dots, n; \\ \phi_{i+1} - \psi_i < \pi, \quad i = 1, \dots, n-2; \\ \phi_n - \psi_{n-1} < \pi, \quad \psi_{n-1} < \psi_n, \quad \text{если } \phi_n < \mu + \pi; \\ \psi_{n-1} = \mu, \quad \text{если } \phi_n = \mu + \pi; \end{aligned}$$

зависимость ψ от (ϕ, μ) непрерывная.

Функцию Φ , сопоставляющую угловой последовательности φ некоторую ориентированную ломаную $f = \Phi(\varphi)$ такую, что $\text{ang}_f = \varphi$, назовем *непрерывной*, если каждая вершина этой ломаной f непрерывно зависит от набора действительных чисел φ .

ЛЕММА 3.5. Пусть R – луч на плоскости с началом в точке c , $d \in R \setminus \{c\}$, $0 < \mu \leq \pi$. Тогда существует непрерывная функция Φ , сопоставляющая набору чисел $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, где $n = 1, 2, \dots$, при том, что набор чисел $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = \varphi_1, \dots, \phi_n = \varphi_1 + \dots + \varphi_n$, μ удовлетворяет условию леммы 3.4, ломаную $f = \Phi(\varphi)$ со свойствами

- 1) $\text{ang}_f = \varphi$;
- 2) $f_0 = c$;
- 3) $f_1 = d$;
- 4) $\angle(\overrightarrow{cd}, \overrightarrow{cf_{n+1}}) = \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем построение по индукции. Пусть точки $f_0, f_1, \dots, f_i$ уже построены. Тогда определим f_{i+1} как единственную точку пересечения лучей $\{c + th : t \geq 0\}$ и $\{f_i + tj : t \geq 0\}$, где $\angle(\overrightarrow{cd}, h) = \psi_{i+1}$, $\angle(\overrightarrow{cd}, j) = \phi_i$, при этом если $\phi_n < \mu + \pi$, то $i = 1, \dots, n$, а если $\phi_n = \mu + \pi$, то $i = 1, \dots, n-1$, и в качестве точки f_{n+1} возьмем середину отрезка $[c, f_n]$.

Нетрудно убедиться, что такое построение непрерывно.

ЛЕММА 3.6. Если f – подходящая k -реализация φ и $k < t$, то найдется g – выпуклая $(k+1)$ -реализация φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим g как продолжение f . Без ограничения общности можно считать, что $s_k = -1$. Временно переобозначим

$$\begin{aligned} \varphi_i &:= \varphi_{i+q-1}, \quad i + q - 1 \in \Gamma_{k+1}^\varphi, \\ \mu &:= -\bar{\varphi}_{q-1} + \mu \end{aligned}$$

и по этим числам с помощью функции Φ из леммы 3.5 на точках $c = f_{q-1}$, $d = f_q$ пристроим к f ее продолжение и получим g .

Возможность применения предыдущей леммы обеспечивается леммой 3.3.

Докажем теперь, что построенное в лемме 3.6 продолжение является подходящей $(k+1)$ -реализацией (отсюда видно, что можно осуществить индуктивное построение реализации угловой последовательности φ).

ЛЕММА 3.7. *Если f – подходящая k -реализация φ и $k < m$, то найдется g – подходящая $(k+1)$ -реализация φ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем ломаную g , построенную в лемме 3.6. По лемме 3.3 она выпукла. Поэтому осталось только проверить для нее условия 1)–4) из определения подходящей k -реализации, при условии, что $k+1 < m$.

Заметим, что $\angle(H_g, x_g) = \mu - \varphi(q-1, s)$, и если $\text{card } \Gamma_{k+1}^\varphi = 1$, то $y_g = x_f$, а если $\text{card } \Gamma_{k+1}^\varphi > 1$, то ясно, что $y_g = G_g$. Без ограничения общности можно считать, что $s_k = -1$.

Первое условие. Оно эквивалентно $\mu \geq \varphi(q-1, j)$, при $j \geq s+1$, $\bar{\varphi}_j < 0$, а это неравенство вытекает из следующих трех замечаний:

- ясно, что $\varphi(q-1, j) \leq \beta$;
- из выпуклости φ следует $\varphi(q-1, j) = \varphi(q-1, s) + \varphi(s+1, j) \leq \varphi(q-1, s)$;
- из второго условия определения подходящей k -реализации следует, что $\varphi(q-1, j) \leq \angle(G_f, y_f)$.

Второе условие. Если $\text{card } \Gamma_{k+1}^\varphi = 1$, то $\angle(G_g, y_g) = \angle(H_f, x_f) \leq \min\{\varphi(s, j) : j \geq s = q, \bar{\varphi}_j > 0\}$ из того, что f – подходящая k -реализация.

Иначе $\angle(G_g, y_g) = 0 \leq \min\{\varphi(s, j) : j \geq s, \bar{\varphi}_j > 0\}$ из выпуклости φ .

Третье условие. Пусть $j \in \Gamma_\nu^\varphi$, $\nu = k+2, k+4, \dots < m$, $\text{card } \Gamma_\nu^\varphi = 1$. Тогда сравним $\mu - \varphi(q-1, s)$ с $\varphi(s+1, j)$, т.е. μ с $\varphi(q-1, j)$. Из определения μ и того, что f – подходящая k -реализация (см. условие 4)) легко видеть, что это сравнение эквивалентно сравнению 0 с $\varphi(s+1, j)$.

Если $s+1 = j$, то $0 > \varphi_{s+1}$ из определения угловой последовательности, а если $j > s+1$, то $0 > \varphi(s+1, j)$ из выпуклости φ .

Четвертое условие. 1. Если $j = s$, то $\angle(G_g, y_g)$ сравним с φ_s : если $s = q$, то $y_g = x_f$, и из того, что f – подходящая k -реализация φ , следует, что $\angle(H_f, x_f) = \angle(G_g, y_g) < \varphi_q$; если $s > q$, то $y_g = G_g$, т.е. надо сравнить 0 и φ_s , но $0 < \varphi_s$, так как $s_k = -1$.

2. Пусть теперь $j \in \Gamma_\nu^\varphi$, $\nu = k+3, k+5, \dots < m$, $\text{card } \Gamma_\nu^\varphi = 1$. Тогда надо сравнить $\angle(G_g, y_g)$ с $\varphi(s, j)$. Если $s = q$, то $y_g = x_f$, и по третьему условию определения подходящей k -реализации верно $\angle(H_f = G_g, x_f) < \varphi(q, j)$. Если $s > q$, то $y_g = G_g$, и тогда надо сравнить 0 с $\varphi(s, j)$. Из выпуклости φ следует, что $0 < \varphi(s, j)$ (см. третье условие определения выпуклости). Таким образом лемма доказана.

Итак, мы пришли к основному результату этого раздела.

ТЕОРЕМА 3.1. *Плоская ломаная длины $n \geq 1$ выпукло реализуема, если и только если ее угловая последовательность (с какой-нибудь, а следовательно, и с противоположной, ориентацией) является выпуклой.*

Существует такой алгоритм построения выпуклой реализации выпуклой угловой последовательности, что функция, соответствующая этому алгоритму, непрерывна.

Кроме того, все выпуклые угловые последовательности данной длины n образуют многогранное множество, состоящее из 2^n связанных компонент, каждая из

которых выпукла; а если $n \geq 3$, то замыкание всего многогранника связано и не выпукло.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость была доказана в лемме 3.1. Достаточность следует из лемм 3.2 и 3.7, дающих соответственно базу и шаг индукции. То, что выпуклые угловые последовательности длины n образуют многогранное множество J , следует из того, что они определяются системой линейных неравенств. Количество связанных компонент и их выпуклость вытекает из определения, а то, что замыкание J при $n \geq 3$ не выпукло, следует из того, что всегда найдутся две выпуклые угловые последовательности длины n такие, что соединяющий их отрезок не лежит в J . Приведем пример таких последовательностей:

$$a = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \dots, (-1)^{k-1} \frac{\pi}{2}, \dots, (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2} \right), \text{ где } k \geq 4,$$

$$b = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \dots, (-1)^{k-1} \frac{\pi}{2}, \dots, (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2} \right), \text{ где } k \geq 4.$$

Нетрудно убедиться, что эти последовательности выпуклы. А если взять $c = at + b(1-t)$, где $0 < t < 1/2$, то c не выпукла, так как

$$c_1 + c_2 + c_3 = -\frac{\pi}{4} + t\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - t\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = t\frac{\pi}{4} > 0,$$

что противоречит первому условию определения выпуклой угловой последовательности.

Автор благодарен профессору А. О. Иванову и профессору А. А. Тужилину за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fomenko A. T., Tuzhilin A. A. Elements of Geometry and Topology of Minimal Surfaces in Three-Dimensional Space // Transl. Math. Monographs. 1992. V. 93.
- [2] Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато // УМН. 1992. Т. 47. № 2(284). С. 53–115.
- [3] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations. CRC Press, 1994.
- [4] Melzak Z. A. On the problem of Steiner // Canad. Math. Bull. 1960. V. 4. P. 143–148.
- [5] Garey M. R., Johnson D. S. The Rectilinear Steiner Problem is NP-Complete // SIAM J. Appl. Math. 1977. V. 32. P. 826–834.
- [6] Иванов А. О., Тужилин А. А. Число вращения плоских линейных деревьев // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 8. С. 41–92.
- [7] Иванов А. О., Тужилин А. А. Задача Штейнера для выпуклых границ или плоские минимальные сети // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 12. С. 1813–1844.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
01.03.2002