Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Колмыков, В. В. Меньших, В. Ф. Субботин, М. В. Сумин, Четыре коэффициента характеристического многочлена преобразования Кокстера, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 788–791

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm219>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:23:21

ЧЕТЫРЕ КОЭФФИЦИЕНТА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОКСТЕРА

В. А. Колмыков, В. В. Меньших, В. Ф. Субботин, М. В. Сумин

Мы вычисляем четыре коэффициента характеристического многочлена преобразования Кокстера, связанного с произвольным лесом. Читателю нет необходимости быть знакомым с понятием преобразования Кокстера⁴, достаточно лишь знать, что с каждым лесом F связан некоторый многочлен, обозначаемый $F(\lambda)$, удовлетворяющий следующим трем свойствам.

- 1) Многочлен леса равен произведению многочленов его компонент (являющихся деревьями).
- 2) Для пустого дерева Emp имеем $\text{Emp}(\lambda) = 1$, для дерева A_1 , состоящего из одной вершины, имеем $A_1(\lambda) = \lambda + 1$.
- 3) Для дерева G имеет место (см. [2]) формула разрезания

$$G(\lambda) = G_2(\lambda)G_{-2}(\lambda) - \lambda G_1(\lambda)G_{-1}(\lambda), \quad (1)$$

где подграфы G_i определяются так. Зафиксируем пару смежных вершин α и β . Разрушим связь между этими вершинами. Компонента, содержащая α , обозначается G_{-2} . Другая компонента обозначается G_2 . Лес, получающийся из G_{-2} удалением вершины α , обозначается G_{-1} , а лес, получающийся из G_2 удалением β , обозначается G_1 .

ТЕОРЕМА 1. а) Многочлен дерева возвратен⁵.

б) Свободный член многочлена дерева равен 1.

в) Коэффициент при λ в многочлене дерева равен 1.

г) Коэффициент при λ в многочлене леса равен числу компонент этого леса.

Идея доказательства. а–в) Индукция по числу вершин + формула разрезания. г) Индукция по числу компонент + (б) + (в).

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – лес на $n = |G|$ вершинах, состоящий из k деревьев. Положим

$$\theta^{(m)} = \sum_v (\deg v)^m, \quad \tau = \sum_{uGv} (\deg u)(\deg v).$$

Здесь $\deg v$ – степень вершины v , а второе суммирование – по всем неупорядоченным парам смежных вершин u и v .

⁴Впрочем, интересующимся мы рекомендуем работу [1], в которой есть все определения и доказано, что все преобразования Кокстера, связанные с лесом, сопряжены и, стало быть, имеют одинаковый характеристический многочлен.

⁵Многочлен $a_n x^n + \dots + a_0$ называется *возвратным*, если $a_i = a_{n-i}$ для любого $i = 0, \dots, n$.

а) Коэффициент при λ^2 в многочлене леса равен

$$2(n-1) - \frac{\theta^{(2)}}{2} + \frac{k^2 - 5k + 4}{2}.$$

б) Коэффициент при λ^3 в многочлене леса равен

$$\frac{5}{2}\theta^{(2)} - \frac{10}{3}(n-1) - \frac{1}{3}\theta^{(3)} - \tau + (k-1)\left(2(n-1) - \frac{\theta^{(2)}}{2}\right) + \frac{(k-1)(k^2 - 14k + 32)}{6}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Для графа G через G^* обозначим граф, вершины которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с ребрами G ; эти вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие ребра инцидентны (т.е. имеют ровно одну общую вершину) в G .

а) Коэффициент при λ^2 для дерева G равен эйлеровой характеристике (ее определение см. в [3, гл. VI, § 6]) χG^* графа G^* .

б) Коэффициент при λ^2 для дерева

равен 1 если и только если это дерево цепь,

равен 0 если и только если это дерево трилистник (т.е. имеет ровно одну вершину степени 3, остальные – степени 2 или 1),
меньше нуля в других случаях.

ЗАМЕЧАНИЕ. Неформально говоря, преобразование Кокстера – это суперпозиция операторов, являющихся отражениями относительно некоторого набора гиперплоскостей. С этими данными связано несколько “геометрий”. Например, геометрия рассматриваемого пространства и квадратичной формы, инвариантной относительно этих отражений. Другой пример – геометрия алгебр Ли, связанная с первой посредством систем корней. Третий пример – “дискретная геометрия” графа Кокстера, соответствующего рассматриваемому набору отражений. Связь первой и третьей геометрий (являющаяся весьма важной для теории групп, порожденных отражениями, а так же для теории представлений колчанов и модулярных структур) в настоящее время мало изучена. Нас интересует геометрический смысл коэффициентов характеристического многочлена преобразования Кокстера, так как его спектральные свойства (тесно связанные с геометрией графа Кокстера [4], [5]) являются ключевыми в исследовании итераций преобразований и функторов Кокстера [1]. Настоящая заметка показывает, в каком направлении и какой техникой можно искать геометрический смысл этих коэффициентов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. а) Коэффициент при λ^2 обозначим s_G . Из формулы (1) следует, что если G – дерево, то

$$s_G = s_{G_2} + s_{G_{-2}} - u - v + 1, \quad (2)$$

где $u = \deg \alpha - 1$, $v = \deg \beta - 1$.

В формуле (2) величины s_G , s_{G_2} , $s_{G_{-2}}$ – инварианты соответствующих графов, а u и v – нет. Главная идея доказательства состоит в исключении неинвариантных слагаемых.

Имеем

$$\theta_G^{(2)} = \theta_{G_2}^{(2)} + \theta_{G_{-2}}^{(2)} + 2u + 2v + 2. \quad (3)$$

Суммирование (3)+2(2) дает

$$\theta_G^{(2)} + 2s_G + 4 = (\theta_{G_2}^{(2)} + 2s_{G_2} + 4) + (\theta_{G_{-2}}^{(2)} + s_{G_{-2}} + 4).$$

Положим $\psi_G = 2s_G + \theta_G^{(2)} + 4$ (например $\psi_{A_1} = 4$). Тогда $\psi_G = \psi_{G_{-2}} + \psi_{G_2}$, т.е., ψ является аддитивной функцией на деревьях. Из этого следует, что $\psi_G = |G|\psi_{A_1} = 4|G|$. Итак, $2s_G + \theta_G^{(2)} + 4 = 4n$, т.е., $s_G = 2(n-1) - \theta_G^{(2)}/2$.

Если G – лес, то коэффициент s_G будем искать в виде

$$s_G = 2(n-1) - \frac{\theta_G^{(2)}}{2} + \nu_G.$$

Пусть лес G состоит из деревьев $G_1, \dots, G_k$. Поскольку многочлен леса равен произведению многочленов его деревьев, то

$$\nu_{G_1 \cup \dots \cup G_{m+1}} = \nu_{G_1 \cup \dots \cup G_m} + m - 2. \quad (4m)$$

Кроме того, $\nu_{G_1} = 0$. Складывая равенства (4m) для $m = 1, \dots, k-1$, получаем

$$\nu_{F_1 \cup \dots \cup F_k} = \frac{k^2 - 5k + 4}{2} = \frac{(k-4)(k-1)}{2}.$$

Пункт а) доказан. Отметим, что формулы коэффициента при λ^2 для дерева и четырехкомпонентного леса совпадают (аналогично для двух- и трехкомпонентного леса).

б) Начнем с равенств

$$\theta_G^{(2)} = \theta_{G_2}^{(2)} + \theta_{G_{-2}}^{(2)} + 2(u+v) + 2, \quad (5)$$

$$\theta_G^{(3)} = \theta_{G_2}^{(3)} + \theta_{G_{-2}}^{(3)} + 3(u^2 + v^2) + 3(u+v) + 2, \quad (6)$$

$$\tau_G = \tau_{G_2} + \tau_{G_{-2}} + \sum_{\alpha_i \in G_{-2}\alpha} \deg \alpha_i + \sum_{\beta_j \in G_2\beta} \deg \beta_j + (u+1)(v+1), \quad (7)$$

где первое суммирование по всем вершинам α_i дерева G_{-2} , смежным с α , второе по всем вершинам β_j дерева G_2 , смежным с β ; как и ранее $u = \deg \alpha - 1$, $v = \deg \beta - 1$.

Коэффициенты при λ^3 и λ^2 в многочлене $G(\lambda)$ обозначим соответственно t_G и s_G .

Из формулы (1) следует, что если G – дерево, то

$$G(\lambda) = (\dots + t_{G_2}\lambda^3 + s_{G_2}\lambda^2 + \lambda + 1)(\dots + t_{G_{-2}}\lambda^3 + s_{G_{-2}}\lambda^2 + \lambda + 1) - \lambda(\dots + s_{G_1 \cup G_{-1}}\lambda^2 + (u+v)\lambda + 1),$$

откуда получаем

$$t_G = t_{G_2} + t_{G_{-2}} + \Delta, \quad \text{где } \Delta = s_{G_2} + s_{G_{-2}} - s_{G_1 \cup G_{-1}}. \quad (8)$$

Далее,

$$s_{G_1 \cup G_{-1}} = 2(|G_1 \cup G_{-1}| - 1) - \frac{1}{2}\theta_{G_1 \cup G_{-1}}^{(2)} + \frac{1}{2}((u+v)^2 - 5(u+v) + 4) \quad (9)$$

и

$$s_{G_2} + s_{G_{-2}} = 2(|G_2| - 1) - \frac{1}{2}\theta_{G_2}^{(2)} + 2(|G_{-2}| - 1) - \frac{1}{2}\theta_{G_{-2}}^{(2)}. \quad (10)$$

Вычитая (10) – (9), получаем

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 - \frac{1}{2}(\theta_{G_2 \cup G_{-2}}^{(2)} - \theta_{G_1 \cup G_{-1}}^{(2)}) - \frac{1}{2}((u+v)^2 - 5(u+v) + 4) \\ &= 2 - \frac{1}{2} \left(2 \sum_{\alpha_i \in G_{-2}\alpha} \deg \alpha_i + 2 \sum_{\beta_j \in G_2\beta} \deg \beta_j - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 - u - v) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2}((u+v)^2 - 5(u+v) + 4) \\ &= - \left(\sum_{\alpha_i \in G_{-2}\alpha} \deg \alpha_i + \sum_{\beta_j \in G_2\beta} \deg \beta_j \right) + 3(u+v) - (u^2 + v^2) - uv. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя это выражение для Δ в (8), получаем

$$t_G = t_{G_2} + t_{G_{-2}} - \left(\sum_{\alpha_i \in G_{-2}\alpha} \deg \alpha_i + \sum_{\beta_j \in G_2\beta} \deg \beta_j \right) + 3(u + v) - (u^2 + v^2) - uv. \quad (12)$$

Складывая (12) + (7) + $\frac{1}{3}(6) - \frac{5}{2}(5)$, получаем

$$\begin{aligned} t_G + \tau_G + \frac{1}{3}\theta_G^{(3)} - \frac{5}{2}\theta_G^{(2)} \\ = t_{G_2} + \tau_{G_2} + \frac{1}{3}\theta_{G_2}^{(3)} - \frac{5}{2}\theta_{G_2}^{(2)} + t_{G_{-2}} + \tau_{G_{-2}} + \frac{1}{3}\theta_{G_{-2}}^{(3)} - \frac{5}{2}\theta_{G_{-2}}^{(2)} - \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Положим $\phi_G = t_G + \tau_G + \frac{1}{3}\theta_G^{(3)} - \frac{5}{2}\theta_G^{(2)} - \frac{10}{3}$ (например, $\phi_{A_1} = -10/3$). Тогда $\phi_G = \phi_{G_{-2}} + \phi_{G_2}$, т.е., ϕ является аддитивной функцией на деревьях. Из этого следует, что $\phi_G = |G|\psi_{A_1} = -\frac{10}{3}|G|$. Этим доказано утверждение для дерева.

Если G – лес, то t_G будем искать в виде

$$T_G = \frac{5}{2}\theta_G^{(2)} - \frac{10}{3}(|G| - 1) - \frac{1}{3}\theta_G^{(3)} - \tau_G + \gamma_G.$$

Если $G_1, \dots, G_k$ – полный набор компонент леса G , то

$$\gamma_{G_1 \cup \dots \cup G_{m+1}} = \gamma_{G_1 \cup \dots \cup G_m} + s_{G_1 \cup \dots \cup G_m} + m s_{G_{m+1}} + \frac{10}{3}, \quad (13_m)$$

где $\gamma_{G_1} = 0$;

$$s_{G_1 \cup \dots \cup G_m} = s_{G_1} + \dots + s_{G_m} + \frac{m^2 - m}{2}.$$

Складывая рекурсивные формулы (13_m) для $m = 1, \dots, k - 1$, получаем

$$\begin{aligned} \gamma_G &= (k - 1)s_G - \frac{(k - 1)(2k^2 - k - 20)}{6} \\ &= (k - 1) \left(2(|F| - 1) - \frac{1}{2}\theta_G^{(2)} \right) + \frac{(k - 1)(k^2 - 14k + 32)}{6}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. а) Число вершин в G^* равно $|G| - 1$. Если $d_1, \dots, d_n$ – набор степеней вершин дерева G , то число ребер в G^* равно

$$\sum \frac{d_i(d_i - 1)}{2} = \frac{1}{2}\theta_G^{(2)} - (|G| - 1).$$

б) Известно, что для связного графа $\chi \leq 1$, причем равенство достигается только если этот граф – дерево. Но G^* – дерево, только если G – цепь. Далее, $\chi = 0$, если и только если в графе ровно один цикл. Но в G^* ровно один цикл, если и только если G – трилистник.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А. // УМН. 1973. Т. 28. № 2(170). С. 19–33. 2. Субботин В. Ф., Сумин М. В. Исследование многочленов, связанных с представлениями графов. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1982. Деп. в ВИНТИ 30.12.82, № 6480–82 Деп. 3. Масси У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология. Введение. М.: Мир, 1977. 4. Субботин В. Ф., Стекольников Р. Б. // Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 1. С. 84–85. 5. Ringel C. M. // Math. Ann. 1994. № 300. P. 331–339.

Воронежский государственный университет (В. А. Колмыков)

Воронежский институт МВД России (В. В. Меньших)

E-mail: kolmykov@vak.vsu.ru

Поступило

30.11.2000

Исправленный вариант 15.01.2002