Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Костин, К вопросу о восстановлении коэффициентов рядов по некоторым ортогональным системам функций, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 704–723

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm220>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 02:57:48

УДК 517.518.3

К ВОПРОСУ О ВОССТАНОВЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДОВ ПО НЕКОТОРЫМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ

В. В. Костин

Пусть есть ряд по мультипликативной системе Прайса или по обобщенной системе Хаара, у которого мартингальная подпоследовательность частных сумм сходится почти всюду. В работе доказано, что при некоторых условиях на мажоранту этой последовательности ряд является рядом Фурье в смысле A -интеграла (или его обобщений) предельной функции, если ряд рассматривался по системе с $\sup p_n < \infty$. В подобных терминах также даны достаточные условия того, чтобы ряд был рядом Фурье в смысле обычного интеграла Лебега. Приведен пример, показывающий, что в случае $\sup p_n = \infty$ соответствующие утверждения неверны.

Библиография: 10 названий.

Пусть дана $\mathbf{P} = \{p_i\}_1^\infty$ – последовательность натуральных чисел, отличных от 1. Положим $m_0 = 1$, $m_j = \prod_{s=1}^j p_s$. $\mathbf{P}$ -ичное разложение точки $x \in [0, 1)$ имеет вид

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \quad 0 \leq x_j \leq p_j - 1, \quad x_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

причем для $\mathbf{P}$ -ично-рациональных точек, т.е. для точек вида l/m_n , где $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $l < m_n$ (рангом $\mathbf{P}$ -ично-рациональной x точки назовем n такое, что дробь $l/m_n = x$ несократима), выбираем суммы (1), состоящие из конечного числа слагаемых, – в этом случае каждому $x \in [0, 1)$ соответствует единственное $\mathbf{P}$ -ичное разложение. Теперь определим следующие классические ортонормированные системы функций: систему мультипликативных функций Прайса $\{\psi_k(x)\}_0^\infty$

$$\psi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j x_j}{p_j}\right), \quad (2)$$

где $k = \sum_{j=1}^n \alpha_j m_{j-1}$, $0 \leq \alpha_j \leq p_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, n$; и систему обобщенных функций Хаара $\{\chi_k(x)\}_0^\infty$,

$$\chi_0(x) \equiv 1,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00354, и программы “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96143.

а при $k \geq 1$

$$\chi_k(x) := \chi_{r,s}^n(x) = \begin{cases} \sqrt{m_n} \exp\left(\frac{2\pi i x_{n+1}}{p_{n+1}} s\right), & x \in \left[\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n}\right), \\ 0, & x \in [0, 1) \setminus \left[\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n}\right), \end{cases}$$

где $k = m_n + r(p_{n+1} - 1) + s - 1$, $0 \leq r \leq m_n - 1$, $1 \leq s \leq p_{n+1} - 1$. Если все p_j равны 2, то получаем системы Уолша (в нумерации Пэли) и Хаара соответственно. Будем называть **P-системой** или систему мультипликативных функций Прайса, или систему обобщенных функций Хаара, построенных по последовательности **P**; обозначим ее $\{\varphi_k(x)\}_0^\infty$. При $m_{n-1} \leq k < m_n$ функция $\varphi_k(x)$ непрерывна справа и постоянна на интервалах вида

$$\left[\frac{i}{m_n}, \frac{i+1}{m_n}\right), \quad i = 0, \dots, m_n - 1,$$

называемых **P-ичными интервалами ранга n**.

Напомним некоторые понятия и введем обозначения. Если $\lambda(x)$ – неотрицательная функция, для комплекснозначной функции $f(x)$ определим следующие виды *срезок*:

$$[f(x)]_{\lambda(x)} := \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq \lambda(x), \\ 0, & |f(x)| > \lambda(x), \end{cases} \quad]f(x)[_{\lambda(x)} := \begin{cases} f(x), & |f(x)| > \lambda(x), \\ 0, & |f(x)| \leq \lambda(x). \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ с фильтрацией, т.е. семейством $\{\mathcal{F}_n\}$ σ -алгебр $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что $\mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{B}$. Последовательность $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_1^\infty$ функций $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, измеримых относительно соответствующих σ -алгебр $\mathcal{F}_n$, называется *мартингальной* (или *мартингалом*), если $\forall m, n, m \geq n$, выполнено

$$\forall B \in \mathcal{F}_n \quad \int_B X_m d\mathbf{P} = \int_B X_n d\mathbf{P},$$

при этом она называется *замкнутой справа последним элементом X*, измеримым относительно $\mathcal{F} \in \mathcal{B}$, причем $\cup_n \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\forall B \in \mathcal{F}_n \quad \int_B X_n d\mathbf{P} = \int_B X d\mathbf{P}. \quad (3)$$

Мартингал $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\int]|X_n|[_{\mathcal{C}} d\mathbf{P} \rightarrow 0 \quad \text{равномерно по } n \text{ при } \mathcal{C} \rightarrow \infty.$$

Пусть дан ряд по **P**-системе

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(x). \quad (4)$$

Его поведение часто удобно формулировать в терминах подпоследовательности частных сумм

$$S_{m_n}(x) := \sum_{j=0}^{m_n-1} c_j \varphi_j(x),$$

которая, как известно, является мартингальной. При этом ряду по системе Прайса $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \psi_j(x)$ может быть сопоставлен ряд по соответствующей обобщенной системе Хаара $\sum_{j=0}^{\infty} b_j \chi_j(x)$ с той же мартингальной последовательностью частных сумм, и наоборот:

$$S_{m_n}^{\psi}(x) := \sum_{j=0}^{m_n-1} a_j \psi_j(x) \equiv \sum_{j=0}^{m_n-1} b_j \chi_j(x) =: S_{m_n}^{\chi}(x). \quad (5)$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $S_{m_n}(x)$ почти всюду на $[0, 1)$ сходится к $f(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Как по $f(x)$ восстановить коэффициенты ряда? В общем случае вопрос некорректен, поскольку таких рядов может быть несколько (даже в случае сходимости почти всюду самого ряда, а не только $S_{m_n}(x)$, в качестве примера можно упомянуть нуль-ряды (см., например, [1]), поэтому надо накладывать дополнительные условия на ряд, обеспечивающие его единственность. Если же единственность есть, то стандартный подход – определить, не является ли ряд (4) рядом Фурье, и если это так, то его коэффициенты восстанавливаются по формулам Фурье. Однако $f(x)$ может оказаться не интегрируемой по Лебегу. В этом случае можно попытаться применить этот же подход, если вместо интеграла Лебега рассматривать его обобщения. Одним из наиболее часто применяемых обобщений интеграла Лебега является A -интеграл, который может быть представлен как частный случай введенного Йонедой в [2], [3] $A\mathcal{H}$ -интеграла.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{H} := \{h_n(x)\}_1^{\infty}$ – последовательность действительных значений интегрируемых по Лебегу на $[0, 1)$ функций такая, что п.в. выполняется

$$0 \leq h_1(x) \leq \dots \leq h_n(x) \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = \infty.$$

Тогда $f(x): [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ называется $A\mathcal{H}$ -интегрируемой на $[0, 1)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{x: |f(x)| \geq \alpha h_n(x)\}} h_n(x) = 0 \quad \text{для всех } \alpha > 0 \quad (6)$$

и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 [f(x)]_{h_n(x)} dx =: (A\mathcal{H}) \int_0^1 f(x) dx, \quad (7)$$

который и называется $A\mathcal{H}$ -интегралом функции $f(x)$.

В случае $h_n(x) \equiv n$ получается обычный A -интеграл; если же $h_n(x) \equiv \lambda_n$, где $\Lambda := \{\lambda_n\}_1^{\infty}$ – возрастающая к бесконечности последовательность чисел, и выполнено $\forall \alpha > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \mu\{x \in [0, 1) : |f(x)| > \alpha \lambda_k\} = 0,$$

получается обобщение A -интеграла, которое мы обозначим как AA -интеграл.

Отметим, что в мартингальных терминах то, что ряд (4) является рядом Фурье функции $f(x)$, равносильно тому, что мартингальная последовательность $S_{m_n}(x)$ (или ее подпоследовательность $S_{m_{n_k}}(x)$) замкнута справа последним элементом $f(x)$ (см. [4], где это утверждение доказано для мультипликативных систем и системы Хаара; для обобщенной системы Хаара оно доказывается аналогично, при этом $\{S_{m_n}(x)\}$ представляет собой равномерно интегрируемый мартингал и сходится к $f(x)$ почти всюду при $n \rightarrow \infty$, см. [5, с. 545]). Более того, совершенно так же доказывается аналог этого утверждения, когда ряд есть ряд Фурье в смысле какого-то обобщения интеграла Лебега, при этом в определении замкнутости справа интеграл в правой части равенства (3) понимается обобщенный. Единственное требование на обобщенный интеграл в этом случае – чтобы он являлся линейным, в частности, подходит любой $A\mathcal{H}$ -интеграл.

Оказывается, что некоторые условия, гарантирующие единственность ряда по определенному классу $\mathbf{P}$ -систем, могут быть выражены в терминах *мажоранты* частных сумм

$$S^*(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_{m_n}(x)|,$$

и при этом коэффициенты ряда могут быть восстановлены с помощью обобщений формул Фурье, причем при некоторых из этих условий обобщение происходит при помощи соответствующих AA -интегралов. А именно, выполнена

ТЕОРЕМА 1. Пусть мартингальная последовательность частных сумм $S_{m_n}(x)$ ряда по $\mathbf{P}$ -системе, удовлетворяющей

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} p_n < \infty, \quad (8)$$

сходится почти всюду к функции $f(x)$ и имеет мажоранту такую, что справедливы следующие утверждения.

1) Существует возрастающая к бесконечности последовательность $\{\lambda_n\}_1^\infty$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \mu\{x \in [0, 1) : S^*(x) > \lambda_k\} = 0. \quad (9)$$

Тогда n -й коэффициент данного ряда восстанавливается из функции $f(x)$ по формулам

$$b_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 [f(x) \overline{\chi_n(x)}]_{\eta_k} dx, \quad (10)$$

где $\eta_k = \lambda_k \sqrt{m_s}$, $k \in \mathbb{N}$, $m_{s-1} \leq n \leq m_s - 1$, в случае ряда по обобщенной системе Хаара и

$$a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 [f(x) \overline{\psi_n(x)}]_{\lambda_k} dx \quad (11)$$

в случае ряда по мультипликативной системе.

2) Существует возрастающая к бесконечности последовательность $\Lambda := \{\lambda_n\}_1^\infty$ такая, что

$$\forall \alpha > 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \mu\{x \in [0, 1) : S^*(x) > \alpha \lambda_k\} = 0. \quad (12)$$

Тогда ряд является рядом Фурье функции $f(x)$ в смысле АЛ-интеграла.

3) Выполняется условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \mu\{x \in [0, 1) : S^*(x) > \lambda\} = 0. \quad (13)$$

Тогда ряд является рядом Фурье функции $f(x)$ в смысле А-интеграла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение 1) для ряда по обобщенной системе Хаара $\sum_{j=0}^\infty b_j \chi_j(x)$. При доказательстве используем методы работы [6], где доказана аналогичная теорема для системы Франклина. Поскольку верно (8), существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что $\sup_{n \in \mathbb{N}} p_n < M$.

Фиксируем некоторое $\lambda > 0$. Пусть

$$E_\lambda := \left\{ x : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_{m_n}^x(x)| > \lambda \right\}.$$

Построим теперь множество B_λ , содержащее E_λ , в виде не более чем счетного объединения $\mathbf{P}$ -ичных интервалов. Пусть есть произвольное $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и множества $B_\lambda^q = \bigcup_i I_i^{\lambda, q}$ при $q < r$ уже построены ($B_\lambda^{-1} := \emptyset$). Разобьем $[0, 1)$ на m_r $\mathbf{P}$ -ичных интервалов ранга r . Из них выберем те интервалы I , которые не лежат в $\bigcup_{q < r} B_\lambda^q$ и для которых выполняется (через $|I|$ обозначаем длину интервала I)

$$\mu(E_\lambda \cap I) \geq \frac{1}{M} |I|. \quad (14)$$

Обозначим их $I_i^{\lambda, r}$, а их объединение $B_\lambda^r = \bigcup_i I_i^{\lambda, r}$. Продолжая аналогичный процесс по индукции, в итоге определяем $B_\lambda = \bigcup_{q \geq 0} \bigcup_i I_i^{\lambda, q}$. Из построения следует, что (все включения будем понимать с точностью до множеств меры нуль)

$$E_\lambda \subset B_\lambda \quad \text{и} \quad \mu B_\lambda \leq M \mu E_\lambda. \quad (15)$$

Через $\{n\}$ обозначим носитель n -й обобщенной функции Хаара $\chi_n(x)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{\{n\} \not\subset B_\lambda} b_n \chi_n(x). \quad (16)$$

Покажем, что мажоранта ряда (16) ограничена числом 3λ . Возможны следующие случаи:

- а) $x \notin B_\lambda$;
- б) $x \in B_\lambda$.

Рассмотрим эти два случая.

а) Пусть $x \notin B_\lambda$. Тогда если $\{k\} \subset B_\lambda$, то $\chi_k(x) = 0$, поэтому с учетом (15) и определения E_λ

$$\left| \sum_{\substack{\{k\} \not\subset B_\lambda \\ k < m_n}} b_k \chi_k(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^{m_n-1} b_k \chi_k(x) \right| \leq \lambda. \quad (17)$$

б) Пусть $x \in B_\lambda$. Возьмем функцию $\chi_k(x)$ ранга n (т.е. $m_{n-1} \leq k < m_n, m_{-1} := 0$), носитель которой содержит точку x , но не полностью лежит в B_λ (как всегда во включениях, множества меры нуль пренебрегаем). В этом случае на каждом из $\mathbf{P}$ -ичных интервалов ранга $n+1$, которые мы обозначим $\delta_i, i = 1, \dots, p_{n+1}$, составляющих $\{k\}$, есть точки из дополнения к E_λ , которые мы обозначим через $t_i, i = 1, \dots, p_{n+1}$ (в противном случае мы весь $\{k\}$, либо даже еще больший $\mathbf{P}$ -ичный интервал, в силу (14) взяли бы в качестве одного из составляющих B_λ , но $\{k\}$ у нас полностью в B_λ не лежит). В этих точках t_i выполняется

$$\left| \sum_{\substack{\{k\} \not\subset B_\lambda \\ m_{n-1} \leq k < m_n}} b_k \chi_k(t_i) \right| = \left| \sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} b_k \chi_k(t_i) \right| = \left| \sum_{k=0}^{m_n-1} b_k \chi_k(t_i) - \sum_{k=0}^{m_{n-1}-1} b_k \chi_k(t_i) \right| \leq 2\lambda,$$

а поскольку m_n -я частная сумма ряда (16) на каждом из δ_i постоянна (и совпадает там со значением в t_i), то для любого y из $\{k\}$ (в том числе и для x)

$$\left| \sum_{\substack{\{k\} \not\subset B_\lambda \\ m_{n-1} \leq k < m_n}} b_k \chi_k(y) \right| \leq 2\lambda. \quad (18)$$

На $\{k\}$ есть точка t , не лежащая в B_λ , и для $S_{m_{n-1}}^\chi(t)$ выполнен пункт а), а раз эта частная сумма постоянна на всем $\{k\}$, то

$$\left| \sum_{\substack{\{k\} \not\subset B_\lambda \\ k < m_{n-1}}} b_k \chi_k(x) \right| = \left| \sum_{\substack{\{k\} \not\subset B_\lambda \\ k < m_{n-1}}} b_k \chi_k(t) \right| \leq \lambda. \quad (19)$$

Из (17)–(19) следует, что для любого $x \in [0, 1)$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{\substack{\{k\} \not\subset B_\lambda \\ k < m_n}} b_k \chi_k(x) \right| \leq 3\lambda, \quad (20)$$

а поэтому также (см. (15))

$$\int_{B_\lambda} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{\substack{\{k\} \not\subset B_\lambda \\ k < m_n}} b_k \chi_k(x) \right| dx \leq 3\lambda \mu B_\lambda \leq 3M\lambda \mu E_\lambda. \quad (21)$$

Из (20) видно, что m_n -е частные суммы ряда (16) составляют равномерно интегрируемый мартингал, поскольку ограничены интегрируемой функцией (константой), а поэтому сходятся к некоторой интегрируемой функции $g(x)$, и ряд (16) является рядом Фурье этой функции (см. [5, с. 545]).

Фиксируем теперь $n \in \mathbb{N}$ и обозначим $\eta_k := \lambda_k \sqrt{m_s}$, $k \in \mathbb{N}$, $m_{s-1} \leq n \leq m_s - 1$. Тогда

$$\int_0^1 [f(x) \overline{\chi_n(x)}]_{\eta_k} dx = \int_{B_{\lambda_k}} [f(x) \overline{\chi_n(x)}]_{\eta_k} dx + \int_{[0,1) \setminus B_{\lambda_k}} [f(x) \overline{\chi_n(x)}]_{\eta_k} dx =: I_1 + I_2. \quad (22)$$

Но в силу (9)

$$|I_1| \leq \eta_k \mu B_{\lambda_k} \leq \sqrt{m_s} M \lambda_k \mu E_{\lambda_k} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (23)$$

а поскольку на $[0,1) \setminus B_{\lambda_k}$ выполнено $|f(x)| \leq \lambda_k$, $|\overline{\chi_n(x)}| \leq \sqrt{m_s}$, то там $|f(x) \overline{\chi_n(x)}| \leq \eta_k$, а поэтому

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{[0,1) \setminus B_{\lambda_k}} f(x) \overline{\chi_n(x)} dx = \int_{[0,1) \setminus B_{\lambda_k}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \chi_j(x) \right) \overline{\chi_n(x)} dx \\ &= \int_{[0,1) \setminus B_{\lambda_k}} \sum_{\{j\} \not\subset B_{\lambda_k}} b_j \chi_j(x) \overline{\chi_n(x)} dx + \int_{[0,1) \setminus B_{\lambda_k}} \sum_{\{j\} \subset B_{\lambda_k}} b_j \chi_j(x) \overline{\chi_n(x)} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{\{j\} \not\subset B_{\lambda_k}} b_j \chi_j(x) \overline{\chi_n(x)} dx - \int_{B_{\lambda_k}} \sum_{\{j\} \not\subset B_{\lambda_k}} b_j \chi_j(x) \overline{\chi_n(x)} dx + 0 \\ &= \int_0^1 \sum_{\{j\} \not\subset B_{\lambda_k}} b_j \chi_j(x) \overline{\chi_n(x)} dx + o(1) \end{aligned} \quad (24)$$

при $k \rightarrow \infty$, так как из (21) видно, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_{\lambda_k}} \sum_{\{j\} \not\subset B_{\lambda_k}} b_j \chi_j(x) \overline{\chi_n(x)} dx \right| &\leq \sqrt{m_s} \int_{B_{\lambda_k}} \sup_{l \in \mathbb{N}} \left| \sum_{\substack{\{j\} \not\subset B_{\lambda_k} \\ j < m_l}} b_j \chi_j(x) \right| dx \\ &\leq 3\sqrt{m_s} M \lambda_k \mu E_{\lambda_k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$. Сходимость рядов в этих формулах понимается в виде сходимости п.в. их m_N -х, где $N \rightarrow \infty$, частных сумм. Но поскольку существует такое $K \in \mathbb{N}$, что при $k \geq K$ (ведь из (9) и (15) следует $\mu B_{\lambda_k} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$) верно включение $\{n\} \not\subset B_{\lambda_k}$, т.е. слагаемое $b_n \chi_n(x)$ входит в ряд (16) при $\lambda = \lambda_k$, $k > K$, и этот ряд, как было показано, есть ряд Фурье (своей суммы, если ее понимать описанным выше образом), то из (9), (22)–(24) наконец следует (10):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 [f(x) \overline{\chi_n(x)}]_{\eta_k} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\sum_{\{j\} \not\subset B_{\lambda_k}} b_j \chi_j(x) \right) \overline{\chi_n(x)} dx + \lim_{k \rightarrow \infty} o(1) = b_n. \quad (25)$$

Утверждение 1) теоремы доказано для обобщенных рядов Хаара. Теперь покажем, что из этого выводится справедливость утверждения 1) для рядов по мультипликативным системам. Мультипликативные функции Прайса и соответствующие обобщенные функции Хаара одинакового ранга n связаны друг с другом при помощи линейных зависимостей (индексы в суммах в следующем ниже рассуждении все от m_{n-1} до $m_n - 1$, коэффициенты γ_p^l , $l = m_{n-1}, \dots, m_n - 1$, зависят от n , $\Gamma_p := \{\gamma_p^{m_{n-1}}, \dots, \gamma_p^{m_n-1}\}$):

$$\psi_p = \sum_l \gamma_p^l \chi_l. \quad (26)$$

Покажем, что векторы Γ_p ортогональны друг другу в силу ортогональности **P**-систем ($\delta_{k,p}$ – символ Кронекера):

$$\delta_{k,p} = (\psi_k, \overline{\psi_p}) = \left(\sum_l \gamma_k^l \chi_l, \sum_j \overline{\gamma_p^j \chi_j} \right) = \sum_{l,j} \gamma_k^l \overline{\gamma_p^j} \chi_l \overline{\chi_j} = \sum_{l,j} \gamma_k^l \overline{\gamma_p^j} \delta_{l,j} = \sum_l \gamma_k^l \overline{\gamma_p^l}. \quad (27)$$

Из (5) и (26) вытекает равенство

$$\sum_l \left(\sum_k a_k \gamma_k^l \right) \chi_l = \sum_k a_k \sum_l \gamma_k^l \chi_l = \sum_k a_k \psi_k = \sum_l b_l \chi_l,$$

т.е.

$$b_l = \sum_k a_k \gamma_k^l,$$

используя которое, (26), (27), а также то, что $[\overline{\chi_l} f]_{\eta_k} = \overline{\chi_l} [f]_{\lambda_k}$ и $\overline{\psi_p} [f]_{\lambda_k} = [\overline{\psi_p} f]_{\lambda_k}$, мы получаем (11):

$$\begin{aligned} a_p &= \sum_k a_k \delta_{k,p} = \sum_k a_k \sum_l \overline{\gamma_p^l} \gamma_k^l = \sum_l \overline{\gamma_p^l} \sum_k a_k \gamma_k^l = \sum_l \overline{\gamma_p^l} b_l \\ &= \sum_l \overline{\gamma_p^l} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 [f \overline{\chi_l}]_{\eta_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_l \overline{\gamma_p^l} \chi_l [f]_{\lambda_k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \overline{\psi_p} [f]_{\lambda_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 [f \overline{\psi_p}]_{\lambda_k}. \end{aligned}$$

В случае утверждения 2) (для обобщенной системы Хаара) из (12) непосредственно следует, что (см. (6), (7)) $\forall \alpha > 0 \quad \lambda_k \mu \{x \in [0, 1) : |f(x)| > \alpha \lambda_k\} \leq \lambda_k \mu \{x \in [0, 1) : S^*(x) > \alpha \lambda_k\} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, откуда $\forall \alpha > 0 \quad \sqrt{m_s} \lambda_k \mu \{x \in [0, 1) : |f(x) \chi_n(x)| > \alpha \sqrt{m_s} \lambda_k\} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, что с учетом (25) означает, что

$$b_n = (A \sqrt{m_s} \Lambda) \int_0^1 f(x) \overline{\chi_n(x)} dx, \quad n = 0, 1, \dots, \quad m_{s-1} \leq n \leq m_s - 1, \quad (28)$$

где, понятно, $\sqrt{m_s} \Lambda := \{\sqrt{m_s} \lambda_k\}_1^\infty = \{\eta_k\}_1^\infty$. Но известно (см. [3]), что $A\mathcal{H}$ -интеграл эквивалентен $A(c\mathcal{H})$ -интегралу при любом $c > 0$, поэтому (28) можно переписать в виде

$$b_n = (A\Lambda) \int_0^1 f(x) \overline{\chi_n(x)} dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

Аналогично для ряда по мультипликативной системе. Утверждение 2) теоремы доказано, а если выполнены условия (13), то рассматриваемый ряд будет рядом Фурье $(A\Lambda)$ для любой последовательности Λ возрастающих к бесконечности чисел, в частности, для $\{k\}_1^\infty$, которая, как уже было сказано выше, порождает обычный A -интеграл.

Теорема 1 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Покажем, что в заключении утверждений 3) и 2) теоремы 1 A - и $A\Lambda$ -интегралы стоят по существу и не могут быть заменены более узкими интегралами — Лебега и A - соответственно.

Рис. 1

ПРИМЕР 1. Пусть $\Phi(x)$ — непрерывная монотонно убывающая на $(0, 2]$ функция такая, что $\Phi(2) \geq 1$ и

$$\Phi(x) = o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow 0, \quad (29)$$

но тем не менее

$$\int_0^2 \Phi(x) dx = +\infty. \quad (30)$$

Например, таким условиям удовлетворяет функция

$$\begin{cases} -\frac{1}{x \ln x}, & 0 < x < \frac{1}{e}, \\ e, & \frac{1}{e} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

В силу (29)

$$\Phi(x) = \frac{1}{x} \alpha(x),$$

где $\alpha(x) = o(1)$, $x \rightarrow 0$, $\alpha(x) \geq 0$, а в силу непрерывности $\Phi(x)$ конечен

$$\sup_{x \in [0, 2]} \alpha(x) =: A.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\{\Phi(x) > \lambda\} &= \left\{ \frac{1}{x} \alpha(x) > \lambda \right\} = \left\{ x < \frac{\alpha(x)}{\lambda} \right\} \\ &= \left\{ x < \frac{A}{\lambda} \right\} \cap \left\{ x < \frac{\alpha(x)}{\lambda} \right\} \subset \left\{ x < \frac{1}{\lambda} \sup_{0 \leq x \leq A/\lambda} \alpha(x) \right\},\end{aligned}$$

откуда

$$\mu\{x: \Phi(x) > \lambda\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Далее построим по индукции последовательности: $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ натуральных чисел, $\{\zeta_k\}_0^\infty$ – при каждом k это $\mathbf{P}$ -ично рациональные числа ранга n_k ($\zeta_0 := 1$) и мартингальную последовательность $\{S_{m_n}(x)\}_{n=0}^\infty$ ряда по $\mathbf{P}$ -системе такую, что

$$\begin{aligned}S_{m_0}(x) &= S_1(x) \equiv 0, \\ S_{m_l}(x) &\equiv S_{m_{n_k}}(x), \quad n_k \leq l < n_{k+1}.\end{aligned} \quad (32)$$

Пусть для некоторого k уже определены $n_k, \zeta_k, S_{m_{n_k}}(x)$. Из условия (30) следует, что существует $z_{k+1} < \zeta_k$ такое, что

$$\int_{z_{k+1}}^{\zeta_k} \Phi(x) dx > 2, \quad (33)$$

а поэтому существует δ_{k+1} такое, что для любого разбиения $T := \{t_0 = z_{k+1} < t_1 < \dots < t_s = \zeta_k\}$ отрезка $[z_{k+1}, \zeta_k)$ верно

$$\int_{z_{k+1}}^{\zeta_k} \Phi(x) dx - \underline{\sigma}(\Phi, T) < 1, \quad (34)$$

как только диаметр разбиения не превосходит δ_{k+1} ; здесь $\underline{\sigma}(\Phi, T)$ – нижняя сумма Дарбу функции $\Phi(x)$ при разбиении T . Выберем $n_{k+1} > n_k$ такое, что

$$\frac{1}{m_{n_{k+1}-1}} < \min\left\{\frac{1}{2}z_{k+1}, \zeta_k - z_{k+1}, \delta_{k+1}\right\}, \quad (35)$$

и положим

$$P_{k+1}(x) := \begin{cases} \zeta_{k+1} := \max_{a \in \mathbb{N}} \left\{ \zeta : \zeta \leq \zeta_k, \zeta = \frac{a}{m_{n_{k+1}-1}} \right\}, \\ \Phi\left(t + \frac{1}{m_{n_{k+1}-1}}\right), \quad \zeta_{k+1} \leq t \leq x < t + \frac{1}{m_{n_{k+1}-1}} \leq \zeta_k, \\ \quad t = \frac{a}{m_{n_{k+1}-1}}, \quad a = 0, 1, \dots, m_{n_{k+1}-1} - 1, \\ 0, \quad x \in [0, \zeta_{k+1}) \cup [\zeta_k, 1). \end{cases} \quad (36)$$

Из (35) видим, что $0 < \zeta_{k+1} \leq z_{k+1} < \zeta_k$. Построим разбиение T отрезка $[z_{k+1}, \zeta_k]$ $\mathbf{P}$ -ично рациональными точками ранга не выше $n_{k+1} - 1$. В силу (35) его диаметр не превосходит δ_{k+1} . Из (33)–(36) следует

$$\int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} P_{k+1}(x) dx = \underline{\sigma}(\Phi, T) > \int_{z_{k+1}}^{\zeta_k} \Phi(x) dx - 1 > 2 - 1 = 1. \quad (37)$$

Пусть $q = 1$, если $p_{n_{k+1}}$ нечетно, и $q = 0$, если $p_{n_{k+1}}$ четно. Теперь положим (см. рис. 1)

$$S_{m_{n_{k+1}}}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \zeta_{k+1}), \\ (-1)^{x_{n_{k+1}}} P_{k+1}(x), & 0 \leq x_{n_{k+1}} < p_{n_{k+1}} - q, x \in [\zeta_{k+1}, \zeta_k), \\ 0, & x_{n_{k+1}} = p_{n_{k+1}} - q, x \in [\zeta_{k+1}, \zeta_k), \\ S_{m_{n_k}}(x), & x \in [\zeta_k, 1), \end{cases} \quad (38)$$

если x имеет разложение (1). Поскольку из (38) видно, что для любого $\mathbf{P}$ -ичного интервала Δ ранга $n_{k+1} - 1$ выполнено

$$\int_{\Delta} S_{m_{n_{k+1}}}(x) dx = \int_{\Delta} S_{m_{n_k}}(x) dx, \quad (39)$$

то $\{S_{m_{n_k}}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ представляет собой мартингальную последовательность (причем $S_{m_{n_k}}(x)$ измерима относительно σ -алгебры, порожденной всеми $\mathbf{P}$ -ичными интервалами ранга n_k), а потому определяет ряд по $\mathbf{P}$ -системе $\sum c_j^{(1)} \varphi_j(x)$, и $\{S_{m_n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ тоже образует мартингал. Докажем (32). Пусть $x \in \Delta$, где Δ – $\mathbf{P}$ -ичный интервал ранга l , $n_k \leq l < n_{k+1}$, и тогда в силу мартингальности $\{S_{m_n}(x)\}$, (39) и того, что $S_{m_l}(x)$ и $S_{m_{n_k}}(x)$ принимают на Δ постоянное значение, получаем

$$\begin{aligned} S_{m_l}(x) &= \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} S_{m_l}(x) dx = \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} S_{m_{n_{k+1}}}(x) dx \\ &= \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} S_{m_{n_k}}(x) dx = S_{m_{n_k}}(x). \end{aligned} \quad (40)$$

Как видно из (38), (32), у ряда $\sum c_j^{(1)} \varphi_j(x)$ мартингальная последовательность частных сумм $S_{m_n}(x)$ всюду на $[0, 1)$ сходится к функции

$$g(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ S_{m_{n_{k+1}}}(x), & x \in [\zeta_{k+1}, \zeta_k). \end{cases}$$

Из (31), (32), (36), (38) следует, что для ряда $\sum c_j^{(1)} \varphi_j(x)$ выполняется условие (13) утверждения 3) теоремы 1, но вместе с тем $g(x)$ не является интегрируемой по Лебегу, поскольку (см. (37), (38))

$$\int_0^1 |g(x)| dx > \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} |S_{m_{n_{k+1}}}(x)| dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} P_{k+1}(x) dx > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3} = \infty,$$

Рис. 2

и, таким образом, ряд $\sum c_j^{(1)} \varphi_j(x)$ не может быть рядом Фурье–Лебега этой функции.

ПРИМЕР 2. Пусть $\Phi(x)$ – функция, удовлетворяющая всем требованиям предыдущего примера ((29), (30) и т.д.), и, кроме того, строго монотонная. Тогда у нее существует обратная функция, которую мы обозначим $T(x)$. Из (31) следует, что существует **P**-ично рациональная точка $\zeta \leq 1$ такая, что $\Phi(x) < 1/x$ при $x \leq \zeta$. Положим $\lambda_0 := \Phi(\zeta)$, а далее по индукции определим

$$\lambda_{k+1} := \frac{k+1}{T(\lambda_k)}. \quad (41)$$

Выберем последовательности **P**-ично рациональных чисел $\{\xi_k\}_1^\infty, \{\zeta_k\}_1^\infty$ из условий

$$T(\lambda_{k+1}) \leq \xi_k < \zeta_k \leq T(\lambda_k), \quad \max\{\xi_k - T(\lambda_{k+1}), T(\lambda_k) - \zeta_k\} < \frac{1}{8}(T(\lambda_{k+1}) - T(\lambda_k)). \quad (42)$$

Построим по индукции последовательность натуральных чисел $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ и мартингальную последовательность $\{S_{m_n}(x)\}_{n=0}^\infty$ ряда по **P**-системе такую, что

$$\begin{aligned} S_{m_0}(x) &= S_1(x) \equiv 0, \\ S_{m_l}(x) &\equiv S_{m_{n_k}}(x), \quad n_k \leq l < n_{k+1}. \end{aligned} \quad (43)$$

Пусть для некоторого k уже определены $n_k, S_{m_{n_k}}(x)$. Возьмем n_{k+1} , превышающее n_k , а также ранги точек ξ_{k+1}, ζ_{k+1} , и положим (см. рис. 2)

$$S_{m_{n_{k+1}}}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \xi_{k+1}), \\ \frac{(-1)^{x_{n_{k+1}}}}{T(\lambda_{k+1})}, & 0 \leq x_{n_{k+1}} < p_{n_{k+1}} - q, x \in [\xi_{k+1}, \zeta_{k+1}), \\ 0, & x_{n_{k+1}} = p_{n_{k+1}} - q, x \in [\xi_{k+1}, \zeta_{k+1}), \\ S_{m_{n_k}}(x), & x \in [\zeta_{k+1}, 1); \end{cases} \quad (44)$$

здесь x имеет разложение (1), а $q = 1$, если $p_{n_{k+1}}$ нечетно, и $q = 0$, если $p_{n_{k+1}}$ четно. Поскольку из (44) видно, что для любого $\mathbf{P}$ -ичного интервала Δ ранга $n_{k+1} - 1$ выполнено

$$\int_{\Delta} S_{m_{n_{k+1}}}(x) dx = \int_{\Delta} S_{m_{n_k}}(x) dx,$$

то $\{S_{m_{n_k}}(x)\}$ представляет собой мартингальную последовательность и верно (43) (см. (40) из примера 1). Таким образом, эта последовательность определяет ряд по $\mathbf{P}$ -системе $\sum c_j^{(2)} \varphi_j(x)$. Как видно из (44), (43), у этого ряда мартингальная последовательность частных сумм $S_{m_n}(x)$ всюду на $[0, 1)$ сходится к функции

$$g(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} [\xi_k, \zeta_k), \\ S_{m_{n_k}}(x), & x \in [\xi_k, \zeta_k), \end{cases}$$

причем

$$S^*(x) = |g(x)| \in \left\{0, \frac{1}{T(\lambda_k)}\right\}, \quad x \in [T(\lambda_{k+1}), T(\lambda_k)). \quad (45)$$

Из (41) видно, что для произвольного $\alpha > 0$ найдется $K \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geq K$ выполнено

$$\alpha \lambda_k = \alpha \frac{k}{T(\lambda_{k-1})} > \frac{1}{T(\lambda_{k-1})},$$

а поэтому (см. (44), (45), (31))

$$\lambda_k \mu\{x : S^*(x) > \alpha \lambda_k\} \leq \lambda_k T(\lambda_k) = \lambda_k \mu\{x : \Phi(x) > \lambda_k\} = o(1) \quad (46)$$

при $k \rightarrow \infty$, т.е. условие утверждения 2) теоремы 1 для ряда $\sum c_j^{(2)} \varphi_j(x)$ выполнено. Вместе с тем из (44), (45), (42) следует

$$\frac{1}{2T(\lambda_k)} \mu\left\{x : |g(x)| > \frac{1}{2T(\lambda_k)}\right\} \geq \frac{1}{2T(\lambda_k)} \left(\frac{2}{3} \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{8}\right) T(\lambda_k)\right) = \frac{1}{4} \neq o(1) \quad (47)$$

при $k \rightarrow \infty$, т.е. для предельной функции $g(x)$ не выполнено первое условие (6) A -интегрируемости, и, таким образом, ряд $\sum c_j^{(2)} \varphi_j(x)$ не может быть рядом Фурье в смысле A -интеграла функции $g(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если для измеримой функции $F(x) : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ выполнено

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \mu\{x : |F(x)| > \lambda_k\} = 0, \quad (48)$$

то существует последовательность $N := \{\nu_k\}_1^\infty$ такая, что выполнено

$$\forall \alpha > 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k \mu\{x : |F(x)| > \alpha \nu_k\} = 0. \quad (49)$$

Действительно, возьмем неубывающую последовательность $\{a_k\}_1^\infty$, сходящуюся к $+\infty$, такую, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \lambda_k \mu\{x : |F(x)| > \lambda_k\} = 0 \quad (50)$$

(например, если $K_n := \min\{K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K \quad \lambda_k \mu\{x : |F(x)| > \lambda_k\} < 2^{-2n}\}$, то $a_k := 2^n$ при $K_n \leq k < K_{n+1}$). Пусть $\nu_k := a_k \lambda_k$ – монотонно возрастающая последовательность. Для $\alpha > 0$ выберем $K \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $k \geq K$ будет $\alpha a_k \geq 1$. Тогда из (50) следует

$$\nu_k \mu\{x : |F(x)| > \alpha \nu_k\} = a_k \lambda_k \mu\{x : |F(x)| > \alpha a_k \lambda_k\} \leq a_k \lambda_k \mu\{x : |F(x)| > \lambda_k\} \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$, и (49) выполнено.

Таким образом, при выполнении условий утверждения 1) теоремы 1 для ряда и последовательности Λ найдется последовательность N , так что коэффициенты ряда могут быть восстановлены при помощи ΛN -интеграла. С помощью же $\Lambda \Lambda$ -интеграла в этом случае они могут не восстанавливаться, что показывает пример 2 замечания 1. Если в нем положить $\lambda'_k := \lambda_k / k = 1/T(\lambda_{k-1})$, $k \geq 1$, то (см. (46))

$$\lambda'_k \mu\{x : S^*(x) > \lambda'_k\} = \frac{\lambda_k}{k} T(\lambda_k) \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$, однако (см. (47))

$$\lambda'_k \mu\left\{x : S^*(x) > \frac{1}{2} \lambda'_k\right\} = \frac{1}{2}.$$

Если же в условиях утверждения 1) $\{\lambda_k\}$ возрастает не быстрее геометрической прогрессии, т.е. если

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \right| \leq C < \infty, \quad (51)$$

то коэффициенты ряда можно восстановить при помощи Λ -интеграла. В самом деле, из (48) и (51) видим, что если $\lambda_k < \lambda \leq \lambda_{k+1}$, то

$$\lambda \mu\{x : |F(x)| > \lambda\} \leq \lambda_{k+1} \mu\{x : |F(x)| > \lambda_k\} \leq C \lambda_k \mu\{x : |F(x)| > \lambda_k\} \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$, а следовательно, и при $\lambda \rightarrow \infty$.

То, что доказанная теорема пригодна, в частности, для рядов Фурье (в смысле обычного интеграла Лебега), демонстрирует

ЛЕММА 1. *Ряд Фурье по любой $\mathbf{P}$ -системе, не обязательно с условием (8), удовлетворяет (13).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично рассуждениям для системы Франклина из [7]. Если $f \in L[0, 1)$, то для ряда Фурье мартингальная последовательность $S_{m_n}(x)$ замкнута справа, и последним элементом служит как раз $f(x)$, что эквивалентно тому, что для любого $\mathbf{P}$ -ичного интервала I_n ранга n выполнено

$$\int_{I_n} S_{m_n}(x) dx = \int_{I_n} f(x) dx.$$

Пользуясь тем, что на I_n частная сумма $S_{m_n}(x)$ постоянна, запишем

$$\begin{aligned} S^*(t) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_{m_n}(t)| = \sup_{t \in I_n, n \in \mathbb{N}} |S_{m_n}(I_n)| = \sup_{t \in I_n, n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|I_n|} \left| \int_{I_n} S_{m_n}(x) dx \right| \\ &= \sup_{t \in I_n, n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|I_n|} \left| \int_{I_n} f(x) dx \right| \leq \sup_{t \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(x)| dx =: M(f, t), \end{aligned} \quad (52)$$

последний супремум берется по любым интервалам, содержащим t , и это есть максимальная функция, являющаяся сублинейным оператором для $f \in L[0, 1)$ и удовлетворяющая (см. [8, с. 444]) неравенству слабого типа $(1, 1)$: $\mu\{t : M(f, t) > \lambda\} \leq 5\|f\|_1/\lambda$. С учетом $M(f, t) \leq M([f]_{\lambda/2}, t) + M([f]_{\lambda/2}, t) \leq \lambda/2 + M([f]_{\lambda/2}, t)$ из (52) получаем

$$\begin{aligned} \mu\{t : S^*(t) > \lambda\} &\leq \mu\{t : M(f, t) > \lambda\} \\ &\leq \mu\left\{t : M([f]_{\lambda/2}, t) > \frac{\lambda}{2}\right\} \leq \frac{10\| [f]_{\lambda/2} \|}{\lambda} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

поскольку для интегрируемой f верно $\| [f]_{\lambda/2} \| \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$, т.е. свойство (13) для рядов Фурье выполнено.

Используя этот факт и теорему 1, получаем следующее утверждение (подобная теорема для систем Хаара и Уолша сформулирована в [7]).

ТЕОРЕМА 2. *Если мартингальная подпоследовательность частных сумм $S_{m_n}(x)$ ряда по $\mathbf{P}$ -системе, удовлетворяющей (8), сходится почти всюду к интегрируемой функции $f(x)$, то следующие условия эквивалентны:*

- 1) ряд является рядом Фурье функции $f(x)$;
- 2) мартингальная последовательность $\{S_{m_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (или ее подпоследовательность) замкнута справа последним элементом $f(x)$;
- 3) справедливо

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \mu\{x \in [0, 1) : S^*(x) > \lambda\} = 0; \quad (53)$$

- 4) $\exists \lambda_k \uparrow \infty$ такая, что

$$\forall \alpha > 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \mu\{x \in [0, 1) : S^*(x) > \alpha \lambda_k\} = 0; \quad (54)$$

- 5) справедливо

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \mu\{x \in [0, 1) : S^*(x) > \lambda\} = 0. \quad (55)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Об эквивалентности условий 1) и 2) говорилось ранее. Далее, если ряд – ряд Фурье, то по лемме 1 выполняется (53), откуда следуют (54), (55) – более слабые условия. Обратно, если выполнено какое-либо из условий 3)–5), то применяем теорему 1, а все пределы и обобщенные интегралы в заключении теоремы здесь просто равны соответствующим интегралам Лебега, поскольку $f(x)$ интегрируема.

Оказывается, что от условия сходимости $S_{m_n}(x)$ почти всюду к функции $f(x)$ в теореме 1 можно избавиться, а именно, верна

ТЕОРЕМА 1'. Пусть дан ряд по $\mathbf{P}$ -системе, удовлетворяющей (8), и выполнено условие одного из утверждений 1)–3) теоремы 1. Тогда $S_{m_n}(x)$ сходится почти всюду при $n \rightarrow \infty$ к некоторой функции $f(x)$ и, следовательно, справедливо заключение соответствующего утверждения теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нашем случае можно применить следующую теорему Шоу (см. [9, теорема 2.4], а также [10, следствие 3]).

ТЕОРЕМА А. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство, $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_1^\infty$ есть (суб-)мартингал относительно регулярной последовательности σ -алгебр. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ существует и конечен почти всюду на множестве, где выполнено либо

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n < +\infty,$$

либо

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n > -\infty.$$

Здесь последовательность атомарных σ -алгебр называется регулярной, если существует $\delta > 0$ такое, что для любых двух атомов $E_n \in \mathcal{F}_n$ и $E_{n+1} \in \mathcal{F}_{n+1}$, $E_n \supseteq E_{n+1}$, выполнено $\mathbf{P}(E_{n+1})/\mathbf{P}(E_n) \geq \delta$.

В самом деле, самое слабое условие (9) все же гарантирует, в частности, конечность $S^*(x)$ почти всюду, поэтому и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_{m_n}(x) < +\infty, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_{m_n}(x) > -\infty$$

почти всюду, а при выполнении (8) соответствующая последовательность σ -алгебр будет как раз регулярной. По теореме А есть сходимость $S_{m_n}(x)$ почти всюду к некоторой функции $f(x)$, а тогда мы уже находимся в условиях теоремы 1.

Аналогично можно видоизменить теорему 2.

ТЕОРЕМА 2'. Пусть дан ряд по $\mathbf{P}$ -системе, удовлетворяющей (8), и выполнено одно из условий 1)–5) теоремы 2. Тогда $S_{m_n}(x)$ сходится почти всюду при $n \rightarrow \infty$ к некоторой функции $f(x)$ и если $f(x)$ интегрируема, то выполняются все остальные условия теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае выполнения условий 3)–5) применяем теорему А и затем теорему 2. Условия 1) и 2) эквивалентны, а сходимость $S_{m_n}(x)$ к $f(x)$ из них следует потому, что замкнутая справа интегрируемой функцией $f(x)$ подпоследовательность последовательности $S_{m_n}(x)$ образует равномерно интегрируемый мартингал, который при этом сходится к последнему элементу почти всюду (см. [5, с. 545]), и можно применять теорему 2.

Возникает вопрос, а что будет, если отказаться от условия (8)? Оказывается, что приведенные выше теоремы 1, 2, 1' и 2' в такой формулировке оказываются неверными даже для случая, когда

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \mu\{S^*(x) > \lambda\} = 0$$

и предельная функция $f(x)$ интегрируема, что показывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Для любой $\mathbf{P}$ -системы такой, что

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} p_n = \infty, \quad (56)$$

существует не равный тождественно нулю ряд по этой системе, удовлетворяющий условию

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \mu \{x \in [0, 1) : S^*(x) > \lambda\} = 0,$$

у которого $S_{m_n}(x) \rightarrow 0$ почти всюду при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi(x)$ – функция, удовлетворяющая всем требованиям примера 1 из замечания 1 ((29), (30) и т.д.). Построим по индукции последовательности: $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ натуральных чисел, $\{\xi_k\}_1^\infty, \{\zeta_k\}_1^\infty$ – при каждом k это числа из множества $\mathbb{P}_k := \{0, 1/p_{n_k}, 2/p_{n_k}, \dots, 1\}$, при этом

$$2 =: \zeta_0 > 1 =: \xi_0 \geq \xi_1 > \zeta_1 \geq \xi_2 > \zeta_2 \geq \dots, \quad (57)$$

кусочно-постоянных функций $\{Q_k(x)\}_0^\infty$, равных нулю вне $[\xi_k, \zeta_k)$ и неотрицательных внутри $[\xi_k, \zeta_k)$ ($Q_0(x) := 1, x \in [1, 2)$, $P_0(x) := Q_0(x)$) и неотрицательную мартингальную последовательность $\{S_{m_n}(x)\}_{n=0}^\infty$ ряда по $\mathbf{P}$ -системе такую, что

$$S_{m_0}(x) = S_1(x) \equiv 1, \quad S_{m_l}(x) \equiv S_{m_{n_k}}(x), \quad n_k \leq l < n_{k+1}. \quad (58)$$

Пусть для некоторого k уже построены $n_k, \xi_k, \zeta_k, Q_k(x), S_{m_{n_k}}(x)$; $S_{m_{n_k}}(x)$ представляет собой постоянную на $\mathbf{P}$ -ичных интервалах ранга n_k функцию. $\mathbf{P}$ -ичный интервал δ назовем *интервалом локального постоянства ступенчатой функции*, если на нем функция постоянна, а на любом $\mathbf{P}$ -ичном интервале, строго содержащем δ , постоянной уже не является. Пусть $I_1^{(k)}, \dots, I_{r(k)}^{(k)}$ – интервалы локального постоянства функции $S_{m_{n_k}}(x)$, образующие в сумме ее носитель, $d_1^{(k)}, \dots, d_{r(k)}^{(k)}$ – ее значения на них, все $d_i^{(k)} > 0$. Обозначим наибольший по длине из этих интервалов $I_k = [\alpha_k, \beta_k)$ (если таких несколько, берем любой), его ранг $l(k)$, а значение $S_{m_{n_k}}(x)$ на нем d_k .

Из условия (30) следует, что существует $z_{k+1} < \xi_k$ такое, что

$$\int_{z_{k+1}}^{\xi_k} \Phi(x) dx > d_k + 1, \quad (59)$$

а поэтому существует δ_{k+1} такое, что для любого разбиения $T := \{t_0 = z_{k+1} < t_1 < \dots < t_s = \xi_k\}$ отрезка $[z_{k+1}, \xi_k)$ верно

$$\int_{z_{k+1}}^{\xi_k} \Phi(x) dx - \underline{\sigma}(\Phi, T) < \frac{1}{2}, \quad (60)$$

как только диаметр разбиения не превышает δ_{k+1} , здесь $\underline{\sigma}(\Phi, T)$ – нижняя сумма Дарбу функции $\Phi(x)$ при разбиении T . Поскольку выполнено (56), выберем $n_{k+1} > n_k$ такое, что

$$\frac{1}{p_{n_{k+1}}} < \min \left\{ \frac{1}{2\Phi(\xi_k)}, \frac{1}{2}z_{k+1}, \xi_k - z_{k+1}, \delta_{k+1} \right\}, \quad (61)$$

и положим

$$\zeta_{k+1} := \max_{y \leq \xi_k, y \in \mathbb{P}_{k+1}} y, \quad \xi_{k+1} := \max_{y \leq z_{k+1}, y \in \mathbb{P}_{k+1}} y,$$

$$P_{k+1}(x) := \begin{cases} \Phi\left(t + \frac{1}{pn_{k+1}}\right), & \xi_{k+1} \leq t \leq x < t + \frac{1}{pn_{k+1}} \leq \zeta_{k+1}, t \in \mathbb{P}_{k+1} \setminus \{1\}, \\ 0, & x \in [0, \xi_{k+1}) \cup [\zeta_{k+1}, 2). \end{cases} \quad (62)$$

Из (61) видим, что $0 < \xi_{k+1} \leq z_{k+1} < \zeta_{k+1} \leq \xi_k$. Построим разбиение T отрезка $[z_{k+1}, \xi_k]$ точками из $\mathbb{P}_{k+1}$. В силу (61) его диаметр не превышает δ_{k+1} . Из (59)–(62) следует

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_{k+1}(x) dx &\geq \underline{\sigma}(\Phi, T) - (\xi_k - \zeta_{k+1})\Phi(\xi_k) \\ &> \int_{z_{k+1}}^{\xi_k} \Phi(x) dx - \frac{1}{2} - \frac{1}{pn_{k+1}}\Phi(\xi_k) > d_k + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = d_k, \end{aligned}$$

поэтому мы можем уменьшить значения $P_{k+1}(x)$ на интервалах $[t, t + 1/pn_{k+1})$, где $\xi_{k+1} \leq t < t + 1/pn_{k+1} \leq \zeta_{k+1}$, $t \in \mathbb{P}_{k+1} \setminus \{1\}$ (сохранив эти интервалы интервалами постоянства), так что

$$P_{k+1}(x) \geq Q_{k+1}(x), \quad x \in [0, 2), \quad \int_0^1 Q_{k+1}(x) dx = d_k, \quad (63)$$

здесь $Q_{k+1}(x)$ – получающаяся при этом функция. Продолжим $Q_{k+1}(x)$ с $[0, 1]$ на $\mathbb{R}$ периодически, обозначим продолженную функцию через $\tilde{Q}_{k+1}(x)$. Теперь положим (см. рис. 3–5)

$$Sm_{n_{k+1}}(x) = \begin{cases} \tilde{Q}_{k+1}(m_{n_{k+1}-1}(x - \alpha_k)), & x \in I_k, \\ Sm_{n_k}(x), & x \in [0, 1) \setminus I_k. \end{cases} \quad (64)$$

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

Отсюда и из (63) следует

$$\int_{\Delta} S_{m_{n_{k+1}}}(x) dx = |\Delta| \int_0^1 Q_{k+1}(x) dx = d_k |\Delta| = \int_{\Delta} S_{m_{n_k}}(x) dx \quad (65)$$

для $\mathbf{P}$ -ичного интервала Δ ранга $n_{k+1} - 1$, $\Delta \subset I_k$ (для $\Delta \not\subset I_k$ (65) очевидно). То есть последовательность $\{S_{m_{n_k}}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является мартингальной, а потому определяет ряд по $\mathbf{P}$ -системе, и $\{S_{m_n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ тоже образует мартингал и верно (58) (см. (40) из примера 1 замечания 1).

Теперь докажем, что $\{S_{m_n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ обладает требуемыми свойствами. По построению

$$\text{supp } S_1(x) \supsetneq \cdots \supsetneq \text{supp } S_{m_{n_k}}(x) \supsetneq \text{supp } S_{m_{n_{k+1}}}(x) \supsetneq \cdots, \quad (66)$$

причем каждый из интервалов $I_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, r(k)$, составляющих носитель $S_{m_{n_k}}(x)$, не менее чем через $N(i, k) \leq r(k)$ число шагов станет наибольшим из интервалов локального постоянства для функции $S_{m_{n_k+N(i, k)}}(x)$ и будет выбран в качестве $I_{k+N(i, k)}$ (поскольку каждый раз до этого выбирается интервал, длина которого не меньше, и заменяется на объединение $\mathbf{P}$ -ичных интервалов ранга большего, чем n_k , а ранг любого из $I_i^{(k)}$ не превосходит n_k), при этом на нем носитель получающейся функции будет иметь меру не более половины длины этого интервала (начиная с некоторого K , а именно, когда будет $\xi_k - \zeta_k < 1/2$ для всех $k \geq K$, см. (57)). Таким образом,

$$\mu\{\text{supp } S_{m_{n_{k+r(k)}}}(x)\} < \frac{1}{2} \mu\{\text{supp } S_{m_{n_k}}(x)\},$$

т.е. (см. (58), (66)) $\mu\{\text{supp } S_{m_n}(x)\} \rightarrow 0$, и $S_{m_n}(x) \rightarrow 0$ почти всюду, $n \rightarrow \infty$.

Наконец, из (58), (64), (63), (62), (31) видим, что

$$\begin{aligned} \mu\{x : S^*(x) > \lambda\} &= \mu\left\{x : \sup_{k \in \mathbb{N}} |S_{m_{n_k}}(x)| > \lambda\right\} \leq \mu\left\{x : \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(x) > \lambda\right\} \\ &\leq \mu\left\{x : \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) > \lambda\right\} \leq \mu\{x : \Phi(x) > \lambda\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Скворцов В. А. О нуль-рядах по некоторой мультипликативной системе // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1979. № 6. С. 63–67.
- [2] Yoneda K. On generalized A -integrals. I // Proc. Japan Acad. 1969. V. 45. № 3.
- [3] Yoneda K. On generalized A -integrals. II // Math. Japon. 1973. V. 18. № 2.
- [4] Костин В. В., Скворцов В. А. Мартингальные последовательности в теории ортогональных рядов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1999. № 6. С. 50–53.
- [5] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
- [6] Геворкян Г. Г. Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4. С. 521–545.
- [7] Геворкян Г. Г. О единственности рядов по системе Франклина // Матем. заметки. 1989. Т. 42. № 2. С. 51–58.
- [8] Капин В. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1987.
- [9] Gundy R. F. Martingale theory and positive convergence of certain orthogonal series // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 124. № 2. P. 228–248.
- [10] Chow Y. S. Convergence theorems of martingales // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. 1963. V. 1. P. 340–346.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
E-mail: valkostin@mail.ru

Поступило
20.06.2001