Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Б. Салимов, П. Л. Шабалин, К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 724–734

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm221>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:00:50

УДК 517.54

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ

Р. Б. Салимов, П. Л. Шабалин

В работе получено обобщение метода регуляризующего множителя решения краевой задачи Гильберта теории аналитических функций, известного для конечного индекса, на случай бесконечного индекса степенного типа. Этим методом получено общее решение однородной задачи Гильберта для полуплоскости, которое зависит от существования и числа целых функций, обладающих зеркальной симметрией относительно вещественной оси и удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям, связанным с характеристикой особенности индекса. Для решения неоднородной задачи существенно используется специально построенное решение однородной задачи, при помощи которого краевое условие задачи Гильберта сводится к задаче Дирихле.

Библиография: 10 названий.

В ряде работ [1], [2] рассматривалось решение задачи Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости путем сведения ее к соответствующей задаче Римана методом Н. И. Мусхелишвили [3, с. 139–155].

В настоящей работе задача Гильберта с бесконечным индексом решается непосредственно (без использования решения соответствующей задачи Римана с бесконечным индексом) путем обобщения на рассматриваемый случай метода регуляризующего множителя, разработанного Ф. Д. Гаховым [4, с. 273] и развитого в ряде работ других авторов [5]–[7] для задачи Гильберта с конечным индексом.

1. Пусть L – вещественная ось в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Требуется найти аналитическую функцию $\Phi(z) = u(z) + iv(z)$, ограниченную в области D и непрерывно продолжимую во все точки контура L по краевому условию

$$a(t)u(t) - b(t)v(t) = c(t), \quad (1)$$

где $a(t), b(t), c(t)$ – заданные на L действительные функции, причем $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ всюду на L , включая бесконечно удаленную точку.

Перепишем условие (1) в виде

$$\operatorname{Re}[e^{-i\nu(t)}\Phi(t)] = c(t)|G(t)|^{-1}, \quad (2)$$

где $G(t) = a(t) - ib(t)$, а $\nu(t) = \arg G(t)$. Будем считать выполненными следующие ограничения.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда НИОКР РТ, грант № 05-5.1-48/2001 (Ф), и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00366.

1) Для функции $\nu(t)$ справедливо представление

$$\nu(t) = \begin{cases} \nu^- t^\rho + \tilde{\nu}(t), & t > 0, \\ \nu^+ |t|^\rho + \tilde{\nu}(t), & t < 0, \end{cases}$$

где ν^-, ν^+, ρ – постоянные, $0 < \rho < 1$, $\nu^{-2} + \nu^{+2} \neq 0$, $\tilde{\nu}(t)$ – функция, удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем μ , $0 < \mu < 1$, на всем контуре L , включая бесконечно удаленную точку – условию $H_L(\mu)$ в обозначениях Н.В. Говорова [8, с. 113], причем в окрестности бесконечно удаленной точки условие Гёльдера понимаем в смысле неравенства

$$|\tilde{\nu}(t_2) - \tilde{\nu}(t_1)| \leq K \left| \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right|^\mu.$$

2) Функции $|G(t)|, c(t)$ удовлетворяют условию $H_L(\mu)$.

По аналогии со случаем конечного индекса *индексом* рассматриваемой задачи назовем величину $\pi^{-1} \overline{\lim} [\nu(t_1) - \nu(t_2)], t_1 \rightarrow +\infty, t_2 \rightarrow -\infty$. Введем функцию

$$P(z) + iQ(z) = l e^{i\alpha} z^\rho = l e^{i\alpha} r^\rho e^{i\rho\theta},$$

где l, α – действительные постоянные, $r = |z|$, $\theta = \arg z$ – однозначная непрерывная в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ ветвь $\arg z$, удовлетворяющая соотношению $0 \leq \theta \leq \pi$, которая является аналитической в области D , а на ее границе L принимает значения

$$P(t) + iQ(t) = l |t|^\rho [\cos(\alpha + \rho\theta) + i \sin(\alpha + \rho\theta)],$$

где $\theta = 0$ при $t > 0$, $\theta = \pi$ при $t < 0$.

Выберем числа $l, l > 0$, и $\alpha, 0 \leq \alpha < 2\pi$, так, чтобы

$$l \cos \alpha = \nu^-, \quad l \cos(\alpha + \pi\rho) = \nu^+,$$

т.е. чтобы

$$l \cos \alpha = \nu^-, \quad l \sin \alpha = \frac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)}.$$

Отметим, что при этом

$$\begin{aligned} l \sin(\alpha + \rho\pi) &= \frac{\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)}, \\ l &= \frac{[(\nu^-)^2 + (\nu^+)^2 - 2\nu^- \nu^+ \cos(\pi\rho)]^{1/2}}{\sin(\pi\rho)}, \\ P(t) &= \begin{cases} \nu^- t^\rho, & t \geq 0, \\ \nu^+ |t|^\rho, & t < 0, \end{cases} \\ Q(t) &= \begin{cases} \frac{(\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+) t^\rho}{\sin(\pi\rho)}, & t > 0, \\ \frac{(\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)) |t|^\rho}{\sin(\pi\rho)}, & t < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Определим аналитическую ограниченную в области D функцию, граничные значения мнимой части которой равны $\nu(t) - P(t) = \tilde{\nu}(t)$, формулой [3, с. 155]

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\nu}(t) \frac{dt}{t-z}.$$

На контуре L эта функция принимает значения

$$\Gamma^+(t) = \Gamma_0(t) + i\tilde{\nu}(t),$$

где

$$\Gamma_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\nu}(t_1) \frac{dt_1}{t_1-t}.$$

С учетом изложенного выше перепишем краевое условие (2) в виде

$$\operatorname{Re}[e^{-\Gamma^+(t)} e^{-i l e^{i\alpha} t^\rho} \Phi(t)] = c(t) |G(t)|^{-1} e^{-\Gamma_0(t)} e^{Q(t)}. \quad (4)$$

2. Рассмотрим вначале решение однородной задачи, краевое условие которой с учетом (4) примет вид

$$\operatorname{Re}[e^{-\Gamma^+(t)} e^{-i l e^{i\alpha} t^\rho} \Phi(t)] = 0. \quad (5)$$

Определим функцию

$$F(z) = i e^{-\Gamma(z)} e^{-i l e^{i\alpha} z^\rho} \Phi(z), \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad (6)$$

аналитическую в области D . Согласно (5)

$$\operatorname{Im} F^+(t) = 0 \quad (7)$$

всюду на L . Последнее позволяет аналитически продолжить функцию $F(z)$ на полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ по закону

$$F(z) = \overline{F(\bar{z})}. \quad (8)$$

Формулы (6), (8) определяют целую функцию $F(z)$, порядок которой, очевидно, не превосходит ρ . Для функции $Q(z) = r^\rho l \sin(\alpha + \rho\theta)$ имеем

$$Q(re^{i\theta}) = \frac{r^\rho}{\sin(\pi\rho)} [\nu^- \cos[(\pi - \theta)\rho] - \nu^+ \cos(\rho\theta)].$$

Пусть $F(z)$ – произвольная целая функция, принимающая действительные значения на L . Тогда для функции $\Phi(z)$, определяемой формулой (6), выполняется краевое условие (5). Здесь имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Общее решение однородной краевой задачи (5) дается формулой*

$$\Phi(z) = -i e^{\Gamma(z)} e^{i l e^{i\alpha} z^\rho} F(z), \quad (9)$$

где $F(z)$ – произвольная целая функция, порядок которой не превосходит ρ , принимающая вещественные значения на границе области D , подчиненные условию

$$|F(t)| \leq C e^{Q(t)}, \quad C = \text{const.}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\rho < 1/2$. Тогда однородная краевая задача (5)

- а) не имеет нетривиальных ограниченных решений, если и только если $\nu^- \cos(\pi\rho) < \nu^+$ либо $\nu^+ \cos(\pi\rho) > \nu^-$;
- б) имеет единственное решение, если и только если $\nu^- \cos(\pi\rho) = \nu^+$, $\nu^+ \cos(\pi\rho) < \nu^-$ либо $\nu^+ \cos(\pi\rho) = \nu^-$, $\nu^- \cos(\pi\rho) > \nu^+$;
- с) имеет бесконечное множество ограниченных решений, если и только если $\nu^- \cos(\pi\rho) > \nu^+$, $\nu^+ \cos(\pi\rho) < \nu^-$.

Доказательство основано на сравнении индикатора роста функции $F(z)$ и функции

$$h(\theta) = \frac{\nu^+ \cos(\rho\theta) - \nu^- \cos[\rho(\theta - \pi)]}{\sin(\rho\pi)}$$

и теореме Фрагмена–Линделёфа.

Пусть $\nu^- - \nu^+ < 0$ и $\Phi(z)$ – ограниченное решение задачи (5). Тогда при $\theta = \pi/2$ для функции $Q(re^{i\theta})$ имеем

$$Q(re^{i\pi/2}) = r^\rho \left[(\nu^- - \nu^+) \cos \frac{\rho\pi}{2} \right] (\sin(\pi\rho))^{-1} < 0.$$

Последнее влечет $|F(re^{i\pi/2})| \leq C$, и согласно (8) $|F(re^{-i\pi/2})| \leq C$, поэтому по принципу Фрагмена–Линделёфа будем иметь $|F(z)| \leq \text{const}$ в полуплоскости $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, а следовательно, и в полуплоскости $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$, т.е. $F(z) \equiv 0$ и $\Phi(z) \equiv 0$.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 3. Если $\nu^- - \nu^+ < 0$, то однородная краевая задача (5) имеет только нулевое решение.

В связи с этим в дальнейшем будем считать выполненным условие $\nu^- - \nu^+ \geq 0$.

ТЕОРЕМА 4. Если $\rho \geq 1/2$ и выполняются условия $\nu^- < 0$ или $\nu^+ > 0$, то однородная краевая задача (5) имеет только нулевое решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho \geq 1/2$ и $\nu^- < 0$, а задача (5) имеет ненулевое ограниченное решение. Тогда индикатор роста функции $F(z)$ удовлетворяет условию $h_F(\pi/2\rho) = h_F(-\pi/2\rho) \leq \nu^- < 0$, что противоречит известному (см., например, [9, с. 84]) соотношению $h_F(\theta + \pi/\rho) + h_F(\theta) \geq 0$.

Отметим, что в ситуации $\rho < 1/2$ условия

$$\nu^- \geq 0, \quad \nu^+ \leq 0$$

являются необходимыми для существования ненулевого решения однородной краевой задачи (5) с дополнительным ограничением для конечного предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) \neq 0. \quad (10)$$

Пусть справедливы неравенства

$$\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0, \quad \nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) > 0. \quad (11)$$

Тогда с учетом (3) для достаточно больших $|t|$ будет выполнено

$$|F(t)| \leq \begin{cases} C \exp \left\{ \frac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)} t^\rho \right\}, & t > 0, \\ C \exp \left\{ \frac{\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)} |t|^\rho \right\}, & t < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Теперь ясно, что утверждение теоремы 1 можно уточнить.

ТЕОРЕМА 5. В случае, когда имеют место неравенства (11), общее решение однородной краевой задачи (5) дается формулой (9), где $F(z)$ – произвольная целая функция, принимающая на L действительные значения, порядок которой $\rho_F \leq \rho$, и при $\rho_F = \rho$ удовлетворяющая соотношениям (12) для достаточно больших $|t|$.

Пусть $\rho \geq 1/2$, $\nu^+ \leq 0$, $\nu^- \geq 0$ и имеют место неравенства

$$\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0, \quad \nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) < 0 \quad (13)$$

или

$$\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ < 0, \quad \nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) > 0. \quad (14)$$

В случае, когда имеют место неравенства (13), второе неравенство (12) показывает, что при $\rho_F < \rho$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\ln |F(t)|}{|t|^{\rho_F}} = -\infty,$$

что невозможно (см. [10, с. 259], [9, с. 74]), поэтому будем считать, что $\rho_F = \rho$. В самом деле, согласно [9, с. 74, 75] в случае $\rho_F < 1$ из того, что

$$h_F(\pi) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\ln |F(t)|}{|t|^{\rho_F}} = -\infty,$$

вытекает

$$h_F(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(t)|}{|t|^{\rho_F}} = -\infty,$$

поэтому $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$; следовательно, $F(z) \equiv 0$.

Аналогично, если имеет место (14), на основании первого неравенства (12) придем к выводу, что следует взять $\rho_F = \rho$.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\rho \geq 1/2$ и $\nu^- \geq 0$, $\nu^+ \leq 0$, выполняются неравенства (13) или (14). Тогда общее решение однородной краевой задачи (5) дается формулой (9), где $F(z)$ – произвольная, принимающая на L действительные значения, целая функция порядка ρ , удовлетворяющая неравенствам (12).

3. В дальнейшем при исследовании неоднородной краевой задачи (4) нам понадобится какое-нибудь ограниченное в области D решение $\Phi(z) = \Phi_0(z)$ однородной задачи (5), при котором целая функция $F(z) = F_0(z)$, определяемая формулами (6)–(8), обладает следующими свойствами (ср. [8, с. 124]):

$$F_0(t) \neq 0, \quad t \in L; \quad (15)$$

существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{Q(t)}}{F_0(t)} = \frac{1}{m} > 0, \quad (16)$$

$$\frac{e^{Q(t)}}{F_0(t)} \in H_L. \quad (17)$$

Теперь нужно найти целую функцию $F_0(z)$ порядка ρ , удовлетворяющую условиям (7), (15), (16), (17). Возьмем целую функцию

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_k e^{i\theta_0}} \right), \quad (18)$$

в которой $0 < \theta_0 < \pi$, r_k – возрастающая последовательность чисел, которую определим ниже. Примем, что порядок этой функции равен ρ (т.е. показатель сходимости ее нулей равен ρ). Кроме того, предположим, что существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^\rho} = \Delta, \quad 0 < \Delta < \infty, \quad (19)$$

где $n(r)$ – число нулей функции (18) в круге $|z| \leq r$.

Логарифмируя функцию (18), получим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[1 - \frac{z}{r_k e^{i\theta_0}} \right], \quad (20)$$

причем под $\arg(1 - z/(r_k e^{i\theta_0}))$ будем понимать ветвь, непрерывную и однозначную в плоскости, разрезанной по лучу $z = r e^{i\theta_0}$, $r > r_k$, принимающую нулевое значение на луче $z = t e^{i(\theta_0 + \pi)}$, $-r_k < t < \infty$. Значения функции (20) на луче $z = t e^{i(\theta_0 + \pi)}$ выражаются через интеграл Стильтьеса [8, с. 125]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{t}{r_k} \right] = \int_0^{\infty} \ln \left[1 + \frac{t}{x} \right] dn(x).$$

Проинтегрировав в последней формуле по частям с учетом (19), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{t}{r_k} \right] = t \int_0^{\infty} \frac{n(x)}{x(x+t)} dx. \quad (21)$$

Здесь левая часть представляет собой значения на луче $z = t e^{i(\theta_0 + \pi)}$, $t > 0$, функции

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[1 - \frac{z}{r_k e^{i\theta_0}} \right],$$

а правая часть есть значение на луче $z = t e^{i(\theta_0 + \pi)}$, $t > 0$, аналитической функции

$$-z e^{-i\theta_0} \int_0^{\infty} \frac{n(x)}{x(x - z e^{-i\theta_0})} dx.$$

В силу (21) эти аналитические функции равны друг другу, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[1 - \frac{z}{r_k e^{i\theta_0}} \right] = -z e^{-i\theta_0} \int_0^{\infty} \frac{n(x)}{x(x - z e^{-i\theta_0})} dx. \quad (22)$$

Как и в [8, с. 125], получим

$$-ze^{-i\theta_0} \int_0^\infty \frac{dx}{x^{1-\rho}(x - ze^{-i\theta_0})} = \frac{\pi(ze^{-i\theta_0})^\rho e^{-i\rho\pi}}{\sin(\pi\rho)}, \quad 0 < \arg z - \theta_0 < 2\pi.$$

Учитывая последнее, формулу (22) запишем так

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \ln \left[1 - \frac{z}{r_k e^{i\theta_0}} \right] &= \frac{\Delta\pi(ze^{-i\theta_0})^\rho e^{-i\rho\pi}}{\sin(\pi\rho)} \\ &- ze^{-i\theta_0} \int_0^\infty \frac{n(x) - x^\rho \Delta}{x(x - ze^{-i\theta_0})} dx, \quad 0 < \arg z - \theta_0 < 2\pi. \end{aligned} \quad (23)$$

Заменяя здесь θ_0 на $-\theta_0$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \ln \left[1 - \frac{z}{r_k e^{-i\theta_0}} \right] &= \frac{\Delta\pi(ze^{i\theta_0})^\rho e^{-i\rho\pi}}{\sin(\pi\rho)} \\ &- ze^{i\theta_0} \int_0^\infty \frac{n(x) - x^\rho \Delta}{x(x - ze^{i\theta_0})} dx, \quad 0 < \arg z + \theta_0 < 2\pi. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $\arg[1 - z/(r_k e^{-i\theta_0})]$ означает ветвь, непрерывную и однозначную в плоскости, разрезанной по лучу $z = re^{-i\theta_0}$, $r > r_k$, принимающую нулевое значение на луче $z = te^{i(-\theta_0+\pi)}$, $-r_k < t$, причем для действительных значений $z = t$

$$\arg \left[1 - \frac{t}{r_k e^{-i\theta_0}} \right] = -\arg \left[1 - \frac{t}{r_k e^{i\theta_0}} \right].$$

При $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, для значений $0 \leq \theta < \theta_0$ в формуле (23) мы должны взять

$$(ze^{-i\theta_0})^\rho = (re^{i(\theta+2\pi)}e^{-i\theta_0})^\rho = (re^{i\theta}e^{-i\theta_0})^\rho e^{i2\pi\rho},$$

а для значений $2\pi - \theta_0 < \theta \leq 2\pi$ в формуле (24) мы должны взять

$$(ze^{i\theta_0})^\rho = (re^{i(\theta-2\pi)}e^{i\theta_0})^\rho = (re^{i\theta}e^{i\theta_0})^\rho e^{-i2\pi\rho}.$$

Обозначая

$$F_0(z) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{r_k e^{i\theta_0}} \right) \left(1 - \frac{z}{r_k e^{-i\theta_0}} \right), \quad (25)$$

из формул (23), (24) получим

$$\begin{aligned} \ln F_0(z) &= -ze^{-i\theta_0} \int_0^\infty \frac{n(x) - x^\rho \Delta}{x(x - ze^{-i\theta_0})} dx - ze^{i\theta_0} \int_0^\infty \frac{n(x) - x^\rho \Delta}{x(x - ze^{i\theta_0})} dx \\ &+ \begin{cases} \frac{\Delta\pi}{\sin(\pi\rho)} (re^{i\theta})^\rho 2 \cos[\rho(\theta_0 - \pi)], & 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \frac{\Delta\pi}{\sin(\pi\rho)} e^{-i\rho\pi} (re^{i\theta})^\rho 2 \cos(\rho\theta_0), & \theta_0 \leq \theta < 2\pi - \theta_0, \\ \frac{\Delta\pi}{\sin(\pi\rho)} e^{-2i\rho\pi} (re^{i\theta})^\rho 2 \cos[\rho(\theta_0 - \pi)], & 2\pi - \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

(Отметим попутно, что порядок функции $F_0(z)$ равен ρ .)

При действительных $z = t$ эта функция принимает действительные значения. Поэтому будем иметь

$$\ln F_0(t) = 2I(t, \theta_0) + \begin{cases} \frac{\Delta \pi 2 \cos[\rho(\theta_0 - \pi)]}{\sin(\pi \rho)} t^\rho, & t > 0, \\ \frac{\Delta \pi 2 \cos(\rho \theta_0)}{\sin(\pi \rho)} t^\rho, & t < 0, \end{cases}$$

где

$$I(t, \theta_0) = \int_0^\infty \frac{(n(x) - x^\rho \Delta)(t^2 - tx \cos \theta_0)}{x(t^2 - tx \cos \theta_0 + x^2)} dx. \quad (27)$$

Поступая, как и в книге [8, с. 127], примем

$$n(x) = \left[x^\rho \Delta + \frac{1}{2} \right], \quad r_k = \left(\frac{2k-1}{2\Delta} \right)^{1/\rho} \quad (28)$$

и рассмотрим интеграл

$$\int_0^\xi (n(x) - x^\rho \Delta) x^{\rho-1} dx \quad (29)$$

при $\xi > 0$, в котором полагаем $u = x^\rho \Delta$. Тогда

$$\int_0^\xi (n(x) - x^\rho \Delta) x^{\rho-1} dx = \frac{1}{\rho \Delta} \int_0^{\tilde{\xi}} (\tilde{n}(u) - u) du, \quad (30)$$

где $\tilde{\xi} = \xi^\rho \Delta$, $\tilde{n}(u) = n((u/\Delta)^{1/\rho}) = [u + 1/2]$.

Для целого числа $N > 0$ и $N - 1/2 < u < N + 1/2$ имеем $\tilde{n}(u) = N$,

$$\frac{1}{2} > \tilde{n}(u) - u > -\frac{1}{2}, \quad \int_{N-1/2}^{N+1/2} (\tilde{n}(u) - u) du = 0;$$

поэтому при любом целом $\tilde{N}$ для $\tilde{N} - 1/2 < \tilde{\xi} < \tilde{N} + 1/2$ будем иметь

$$\int_0^{\tilde{\xi}} (\tilde{n}(u) - u) du = \int_0^{1/2} (\tilde{n}(u) - u) du + \int_{\tilde{N}-1/2}^{\tilde{\xi}} (\tilde{n}(u) - u) du.$$

Отсюда и из формулы (30) видно, что интеграл (29) есть функция, ограниченная при $0 < \xi < \infty$, т.е.

$$\left| \int_0^\xi (n(x) - x^\rho \Delta) x^{\rho-1} dx \right| < C. \quad (31)$$

Для функции (27) будем иметь

$$I'_t(t, \theta_0) = \int_0^\xi (n(x) - x^\rho \Delta) x^{\rho-1} U(x) dx,$$

где

$$U(x) = \frac{x^{1-\rho}(2tx - t^2 \cos \theta_0 - x^2 \cos \theta_0)}{(t^2 - 2tx \cos \theta_0 + x^2)^2}. \quad (32)$$

Поскольку $U(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0$ и

$$U'(x) = \frac{x^{-\rho} t^4}{(t^2 - 2tx \cos \theta_0 + x^2)^3} [\tilde{x}^4(1 + \rho) \cos \theta_0 + \tilde{x}^3(-4 - 2\rho + (1 - \rho)2 \cos^2 \theta_0) + \tilde{x}^2 6\rho \cos \theta_0 + \tilde{x}(4 - 2\rho - 2(1 + \rho) \cos^2 \theta_0) - (1 - \rho) \cos \theta_0], \quad \tilde{x} = \frac{x}{t},$$

ясно, что в интервале $0 < x < \infty$ функция $U(x)$ имеет не более четырех и не менее одного экстремума. Ясно, что максимум $|U(x)|$ достигается в одной из указанных точек экстремума функции $U(x)$. Обозначим эту точку x_1 . Тогда $\tilde{x}_1 = x_1/t$ есть корень многочлена, стоящего в квадратных скобках последней формулы. Из (32) имеем

$$\max_{0 \leq x < \infty} |U(x)| = \frac{1}{t^{1+\rho}} \frac{\tilde{x}_1^{1-\rho} |2\tilde{x}_1 - 2 \cos \theta_0 - \tilde{x}_1^2 \cos \theta_0|}{(1 - 2\tilde{x}_1 \cos \theta_0 + \tilde{x}_1^2)^2}.$$

Теперь, используя результаты Говорова [8, с. 127], будем иметь при $t > 0$

$$|I'_t(t, \theta_0)| \leq \frac{C}{t^{1+\rho}},$$

поэтому (см. [8, с. 127]) $I(t, \theta_0) \in H_{[d, \infty)}(\rho)$, $d > 0$. При $t < 0$ согласно (27) получим $I(t, \theta_0) = I(-t, \pi - \theta_0)$, значит $I(-t, \pi - \theta_0) \in H_{[-\infty, -d)}(\rho)$, $I(t, \theta_0) \in H_{[-\infty, -d)}(\rho)$.

Рассмотрим разность

$$I(t, \theta_0) - I(-t, \theta_0) = \left(\int_0^{r_1} + \int_{r_1}^{\infty} \right) \frac{(n(x) - x^\rho \Delta) 2t(t^2 - x^2) \cos \theta_0}{(t^2 - 2tx \cos \theta_0 + x^2)(t^2 + 2tx \cos \theta_0 + x^2)} dx.$$

Предел первого интеграла при $t \rightarrow \infty$ равен нулю, в чем убеждаемся непосредственно, учитывая законность предельного перехода под знаком интеграла, а второй интеграл оценим для фиксированного $t > 0$, используя результат Говорова и принимая во внимание (31):

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{\infty} \frac{[(n(x) - x^\rho \Delta) x^{\rho-1}] x^{1-\rho} t(t^2 - x^2)}{(t^2 - 2tx \cos \theta_0 + x^2)(t^2 + 2tx \cos \theta_0 + x^2)} dx \\ & \leq \frac{C t^{2-\rho} [(1 - \rho)/(1 + \rho)]^{(1-\rho)/2}}{(1 - |\cos \theta_0|)^2 t^2 (1 + (1 - \rho)/(1 + \rho))}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что рассматриваемый интеграл стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Итак, существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t, \theta_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} I(-t, \theta_0).$$

Поэтому $I(t, \theta)$ удовлетворяет условию $H(\rho)$ на L всюду вне интервала $(-d, d)$. Согласно (16) должно выполняться соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [Q(t) - \ln F_0(t)] = -\ln m,$$

поэтому с учетом формул (3), (26) необходимо потребовать выполнения условий

$$\Delta 2\pi \cos[(\theta_0 - \pi)\rho] = \nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+, \quad \Delta 2\pi \cos(\theta_0\rho) = \nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho),$$

которые можно представить так

$$\begin{aligned} \Delta 2\pi \sin(\theta_0\rho) &= -\nu^+ \sin(\pi\rho), & \Delta 2\pi \cos(\theta_0\rho) &= \nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho), \\ \Delta 2\pi \cos[(\theta_0 - \pi)\rho] &= \nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+, & \Delta 2\pi \sin[(\pi - \theta_0)\rho] &= \nu^- \sin(\pi\rho). \end{aligned} \quad (33)$$

Выполнения ограничений (33) добьемся подбором величин $\Delta, \theta_0, \Delta > 0, 0 < \theta_0 < \pi\rho < \pi$,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2\pi}(\nu^{-2} - 2\nu^- \nu^+ \cos(\pi\rho) + \nu^{+2})^{1/2}, \\ \theta_0\rho &= \arccos \frac{\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)}{2\pi\Delta}, \end{aligned} \quad (34)$$

при этом в силу первого уравнения (33) мы должны потребовать, чтобы было $\nu^+ < 0$. Согласно второму уравнению из (33) для обеспечения неравенства $\theta_0 < \pi$ необходимо потребовать выполнения условия $\nu^- > 0$.

Как видно из формул (3), функция $Q(t)$ удовлетворяет условию $H(\rho)$ на любой конечной части контура; этим же свойством обладает и отношение $e^{Q(t)}/F_0(t) = e^{-2I(t, \theta_0)}$, так как $F_0(t) \neq 0$ всюду на L .

Таким образом, построенная функция (25) удовлетворяет всем указанным выше условиям. Запишем, наконец, индикатор роста этой функции

$$h_0(\theta) = h_0(-\theta) = h_0(2\pi - \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |F_0(re^{i\theta})|}{r\rho}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (35)$$

Первые два слагаемых правой части формулы (26) есть величины $o(r^\rho)$; поэтому формулу (35) с учетом (26), (33) перепишем так

$$h_0(\theta) = \begin{cases} \frac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)} \cos(\rho\theta), & 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \frac{\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)} \cos[\rho(\theta - \pi)], & \theta_0 \leq \theta < \pi. \end{cases}$$

4. Перейдем к решению неоднородной краевой задачи (4). Пусть $\nu^- > 0, \nu^+ < 0$. По известным значениям ν^-, ν^+, ρ на основании формул (34) вычислим Δ, θ_0 , затем по формуле (28) определим $r_k, k = 1, 2, \dots$, и найдем функцию $F_0(z)$ согласно (25); тогда из формулы (6) находится

$$\Phi_0(z) = -ie^{\Gamma(z)} e^{iIe^{i\alpha} z^\rho} F_0(z)$$

– решение с условием (10) соответствующей однородной краевой задачи.

Краевое условие (4) разделим почленно на соответствующие части соотношения (6), записанного для $z = t$, и получим

$$\operatorname{Re} \left[-i \frac{\Phi(t)}{\Phi_0(t)} \right] = c_1(t), \quad (36)$$

где

$$c_1(t) = \frac{C(t)|G(t)|^{-1}e^{-\Gamma_0(t)}e^{Q(t)}}{F_0(t)}.$$

Будем считать, что функция $\Phi(z)$ имеет те же нули, что и функции $\Phi_0(z)$, $F_0(z)$. Тогда $\Phi(z)/\Phi_0(z)$ является аналитической в области D ; примем, что она является ограниченной в этой области. Правая часть формулы (36) есть функция, удовлетворяющая условию H_L , поэтому функция $-i\Phi(z)/\Phi_0(z)$ выражается интегралом Шварца для полуплоскости и

$$\Phi(z) = \frac{-ie^{\Gamma(z)}e^{ile^{i\alpha}z^\rho}F_0(z)}{\pi} \int_L \frac{c_1(t)dt}{t-z}. \quad (37)$$

Эта формула дает частное решение неоднородной краевой задачи (4). Общее решение последней задачи представляется как сумма этого частного решения и общего решения соответствующей однородной задачи.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\nu^- > 0$, $\nu^+ < 0$. Тогда общее решение неоднородной краевой задачи (4) представляется как сумма функций (37) и (9).

В рассматриваемом здесь случае ($\nu^- > 0$, $\nu^+ < 0$) при $\rho \leq 1/2$ неравенства (11) выполняются автоматически, поэтому общее решение (9) однородной краевой задачи определяется, как указано в теореме 5, а при $\rho > 1/2$ это решение определяется, как указано в теореме 6.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сандрыгайло И. Е. О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ. -матем. наук. 1974. № 6. С. 16–23.
- [2] Алекна П. Ю. Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости // Лит. матем. сб. 1977. № 1. С. 5–12.
- [3] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
- [4] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
- [5] Чибрикова Л. И. Основные граничные задачи для аналитических функций. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1977.
- [6] Чибрикова Л. И., Салехов Л. Г. К решению краевой задачи Гильберта // Труды семинара по краевым задачам. № 8. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1971. С. 155–175.
- [7] Салимов Р. Б., Селезнев В. В. К решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами // Труды семинара по краевым задачам. № 16. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1979. С. 149–162.
- [8] Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М.: Наука, 1986.
- [9] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
- [10] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968.

Казанская инженерно-строительная академия
E-mail: shabalin@ksaba.ru

Поступило
20.03.2001
Исправленный вариант
08.04.2002