Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ф. Шамоян, О действии операторов свертки и Теплица в пространствах типа ВМОА, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 759–772

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm222>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:15:24

УДК 517.53

О ДЕЙСТВИИ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ И ТЕПЛИЦА В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ВМОА

Р. Ф. Шамоян

В статье описаны коэффициентные мультипликаторы, исследованы действие дробной производной пространств типа ВМОА и действие операторов Теплица в этих же классах.

Библиография: 20 названий.

Введение. Основная цель данной заметки – распространить результаты работ [1]–[4], касающихся классов ВМОА, на более широкие шкалы.

Классы $\text{ВМОА}(U) = \text{ВМО}(T) \cap H^2(U)$ – аналитические подпространства классов функций с ограниченной средней осцилляцией – играют важную роль в различных вопросах теории пространств аналитических функций (см., например, [5]).

В работе автора [6] были введены и исследованы некоторые свойства классов типа ВМОА. Отправной точкой для определения этих пространств была известная норма Гарсия для $\text{ВМО}(T)$ (см., например, [5]).

В этой работе мы продолжим изучение пространств типа ВМОА в единичном круге U , при этом расширение шкалы классов ВМОА ниже “опирается” не только на выше упомянутую норму Гарсия, но и на следующий классический результат теории ограниченных аналитических функций (см. [5]): $f \in \text{ВМОА}$ в том и только в том случае, когда мера $\mu(z) = |f'(z)|^2(1 - |z|)$ является мерой Карлесона.

Для формулировки утверждений нам понадобится ряд стандартных обозначений.

Пусть U – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$; $U = \{z: |z| < 1\}$, $T = \{z: |z| = 1\}$ – его граница, $H(U)$ – класс всех голоморфных в U функций, $dm(\xi)$ и $dm_2(z)$ – нормированные меры Лебега на T и в U соответственно, $H^p(U)$ – классы Харди в круге U (см., например, [5]), $M_p^p(f, r) = \int_T |f(r\xi)|^p dm(\xi)$.

Введем пространства типа ВМОА: $F_s^{\infty, q}(U)$ (см. [7]) и $\text{ВМОА}_{\alpha, n, q, \beta}(U)$. Имеем

$$F_s^{\infty, q}(U) = \left\{ f \in H(U): \sup_{\omega \in U} \left(\int_U \frac{|\tilde{D}^k f(z)|^q (1 - |z|)^{(k-s)q-1}}{|1 - z\bar{\omega}|^{2+N}} dm_2(z) \right) (1 - |\omega|)^N < \infty, \right. \\ \left. \text{где } k \text{ любое, } k \in \mathbb{N}, k > s, s \in \mathbb{R}, q \in (0, \infty) \right\},$$

где $N \in \mathbb{N}$, N – некоторое фиксированное число,

$$\text{ВМОА}_{\alpha,n,q,\beta} = \left\{ f^{(n)} \in H^1(U) : \sup_{|z|<1} \int_T \frac{|\tilde{D}^\alpha f(\xi) - \tilde{D}^\alpha f(z)|}{|1 - \bar{\xi}z|^q} dm(\xi) (1 - |z|)^\beta < \infty, \right. \\ \left. \text{где } \alpha, \beta \geq 0, q \in (0, \infty), n \in \mathbb{N} \right\},$$

где $\tilde{D}^\alpha$ – дифференциальный оператор

$$\tilde{D}^\alpha : H(U) \rightarrow H(U) : (\tilde{D}^\alpha f)(z) = \sum_{k \geq 0} (k+1)^\alpha a_k z^k, \quad f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k \alpha \in \mathbb{R}.$$

Учитывая определения пространств ВМОА через норму Гарсия и через меры Карлесона легко видеть, что $F_0^{\infty,2}(U) = \text{ВМОА}_{0,0,2,1} = \text{ВМОА}$ (см. [5], [8]). Классы $\text{ВМОА}_{\alpha,n,q,\beta}$ были рассмотрены в [6] (см. также [9]). Пространства $F_s^{\infty,q}$ в единичном шаре B^n пространства C^n были введены, по-видимому, впервые в статье [7]. В $\mathbb{R}^n$ их аналоги изучены в монографии [10]. В [7] классы $F_s^{\infty,q}$ возникают при описании пространств линейных непрерывных функционалов голоморфных классов типа Лизоркина–Трибеля. Тем самым, классы $F^{\infty,q}$, с одной стороны, расширяют шкалу пространств ВМОА, а с другой – являются “предельной точкой” интенсивно изучающихся в настоящее время голоморфных классов типа Лизоркина–Трибеля (см. [7], [9], [11], [12]).

1. О действии операторов свертки в пространствах $F_s^{\infty,q}$. Всюду ниже в работе через $C, C', C(\alpha), C(\alpha, q)$ мы обозначаем различные положительные константы, зависящие от α, q и т.д., а запись $A \lesssim B$ означает, что существует положительная константа C такая, что $A \leq CB$. Все вспомогательные леммы, использующиеся при установлении результатов заметки, собраны в последнем третьем разделе работы.

Далее, как обычно (см., например, [1]), скажем, что последовательность (c_k) определяет ограниченный оператор свертки, действующий из X в Y (X, Y – подпространства $H(U)$) или является *мультипликатором* из X в Y , если для любой функции $f, f \in X, f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$, функция $g(z) = \sum_{k \geq 0} c_k a_k z^k$ лежит в Y . Множество всех таких $\{(c_k)\}$ мы обозначим через $\widetilde{M}_T(X, Y)$.

Введем еще один дифференциальный оператор, который потребуется нам в дальнейшем $D^\alpha : H(U) \rightarrow H(U)$,

$$(D^\alpha f)(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(k + 1)} a_k z^k, \quad f = \sum_{k \geq 0} a_k z^k, \quad \alpha > -1.$$

Легко видеть, что

$$D^\alpha \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1, \quad z \in U.$$

В дальнейшем $A_\alpha^p(U)$ – хорошо известные классы Бергмана в круге U (см. [13]).

ТЕОРЕМА 1. 1) Пусть $s > 0$, $q \geq 2$; тогда

$$\widetilde{M}_T(H^1(U), F_s^{\infty, q}(U)) = \left\{ g \in H(U) : \sup_{|z| < 1} M_\infty(\tilde{D}^k g, |z|)(1 - |z|)^{k-s} < \infty \right\} = H_{k, k-s}^{\infty, \infty},$$

где k любое, $k \in \mathbb{N}$, $k > s$, $g \sim (c_k)$.

2) Пусть $q \geq 1$, $\alpha > -1$; тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_T(A_\alpha^1(U), F_s^{\infty, q}(U)) &= \left\{ g \in H(U) : \sup_{|z| < 1} M_\infty(\tilde{D}^k g, |z|)(1 - |z|)^{k-s-(\alpha+1)} < \infty \right\} \\ &= H_{k, k-s-(\alpha+1)}^{\infty, \infty}, \end{aligned}$$

где k любое, $k \in \mathbb{N}$, $k > s + (\alpha + 1) + q$, $g \sim (c_k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Учитывая определение пространств ВМОА через меры Карлесона, имеем $F_0^{\infty, 2} = \text{ВМОА}$. Описание пространства $\widetilde{M}_T(H^1, F_0^{\infty, 2}) = \widetilde{M}_T(H^1, \text{ВМОА})$ получено в работе [1] и совпадает с описанием, приведенным в сформулированной выше теореме. Учитывая лемму 2 (см. п. 3), всюду в теореме 1 оператор $\tilde{D}^\alpha$ можно заменить оператором D^α .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Изучение пространств коэффициентных мультипликаторов ВМОА было, по-видимому, начато в работе [1]. В [14] дано описание классов $\widetilde{M}_T(B\ell, \text{ВМОА})$ и $\widetilde{M}_T(\Lambda_A^\alpha, \text{ВМОА})$, где $B\ell$ и Λ_A^α – известные классы Блоха и Липшица–Зигмунда соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем сначала включение $\widetilde{M}_T(H^1, F_s^{\infty, q}) \subset H_{k, k-s}^{\infty, \infty}(U)$. Для этого необходимо использовать стандартные рассуждения (см., например, [12], [11]), теорему о замкнутом графике и пробную функцию

$$f_r(z) = \frac{1}{(1 - rz)^{\ell+1}} = \sum_{k \geq 0} a_k z^k = D^\ell \left(\frac{1}{1 - rz} \right), \quad r \in I, \quad z \in U, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Имеем

$$\|D^\ell g_r\|_{F_s^{\infty, q}} \lesssim \left\| \frac{1}{(1 - rz)^{\ell+1}} \right\|_{H^1} \lesssim \frac{1}{(1 - r)^\ell},$$

где $g \in \widetilde{M}_T(H^1, F_s^{\infty, q})$.

Учтем, что из леммы 1 следует оценка

$$|D^\ell D^k g_r(z)|(1 - |z|)^{k-s} \lesssim \|D^\ell g_r\|_{F_s^{\infty, q}}, \quad 0 < q < \infty, \quad k > s, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad z \in U.$$

Положим $z = r\xi$; тогда $\sup_z |\tilde{D}^{\ell+k} g(z)|(1 - |z|)^{\ell+k-s} < \infty$; следовательно, $\sup_z |\tilde{D}^k g(z)|(1 - |z|)^{k-s} < \infty$, $k > s$.

Для доказательства обратного включения воспользуемся следующей оценкой, установленной в [7]:

$$\|f\|_{F_s^{\infty, q}} \lesssim \int_0^1 (M_\infty(D^{[s^+]} f, r))^q (1 - r)^{([s^+] - s)q - 1} dr, \quad (1)$$

где $[s^+] = [s + 1]$.

Оценка (1) установлена для дифференциальных операторов $\tilde{D}^\alpha$; в силу результатов работы [15] она остается справедливой и для операторов D^α .

Пусть $g \in H_{k, k-s}^{\infty, \infty}$, $g(z) = \sum_{k \geq 0} c_k z^k$, $f \in H^1$, $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$, $h(z) = \sum_{k \geq 0} c_k a_k z^k$. Тогда

$$|h(r^2 \xi)| = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \left| \int_T g(rt\xi) f(r\bar{t}) dm(t) \right|.$$

Отсюда, учитывая, что $g \in H_{k, k-s}^{\infty, \infty}$, где k подобрано так, что $s < k$, получаем

$$|\tilde{D}^{s+k} h(r^2 \xi)|^q (1-r)^{kq-1} \lesssim (M_1(\tilde{D}^s f, r))^q (1-r)^{(s-k)q} (1-r)^{kq-1}.$$

Следовательно, опираясь на легко выводимую оценку из леммы 1

$$\left(\int_0^1 M_1(G, R) (1-R)^\alpha dR \right)^p \leq \left(\int_0^1 (M_1(G, R))^p (1-R)^{\alpha p + p-1} dR \right),$$

$$0 < p \leq 1, \quad \alpha > -1, \quad G \in H(U),$$

выводим

$$\int_0^1 (M_\infty(\tilde{D}^{s+k} h, r))^q (1-r)^{kq-1} dr \lesssim \left(\int_0^1 (M_1(\tilde{D}^s f, r))^2 (1-r)^{2s-1} dr \right)^{\frac{q}{2}} \lesssim \|f\|_{H^1}^q.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались известной теоремой Харди–Литтлвуда (см. [15]). Остается еще раз использовать теорему Харди–Литтлвуда и оценки (1):

$$\|h\|_{F_s^{\infty, q}}^q \lesssim \int_0^1 (M_\infty(\tilde{D}^{s+1} h, r))^q (1-r)^{q-1} dr \lesssim \int_0^1 (M_\infty(\tilde{D}^{s+k} h, r))^q (1-r)^{kq-1} dr.$$

Докажем только включение $H_{k, k-s-(\alpha+1)}^{\infty, \infty} \subset \widetilde{M}_T(A_\alpha^1, F_s^{\infty, q})$. Обратное устанавливается совершенно аналогично предыдущему случаю.

Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, получаем по лемме 2

$$|D^{s+1} h|_{\tilde{\omega}}(z)| \lesssim \int_U |D^{1+s} D^\ell D^{-k} f(\tilde{z})| \cdot |D^k g|_{\tilde{\omega}}(\tilde{z}) |1 - |\tilde{z}||^{\ell-1} dm_2(\tilde{z}),$$

где $\max\{k - s - \alpha - 2, 1\} < \ell < (k - s - \alpha - 1)$.

Далее, $(1 - |\tilde{z}|)^{\ell-1} \leq (1 - |\tilde{z}| |\tilde{\omega}|)^{\ell-1}$, $(1 - |\tilde{z}| |\tilde{\omega}|)^{\ell-1} = (1 - |\tilde{z}| |\tilde{\omega}|)^{k-s-(\alpha+1)} \times (1 - |\tilde{z}| |\tilde{\omega}|)^{\alpha+s-k+\ell}$. Положим $z = \tilde{\omega}$.

Учитывая, что $g \in H_{k, k-s-(\alpha+1)}^{\infty, \infty}$, оценку

$$\int_0^1 (1 - |\tilde{z}| |\tilde{\omega}|)^{\alpha+s-k+\ell} (1 - |\tilde{\omega}|)^{v-1} d|\tilde{\omega}| \lesssim (1 - |\tilde{z}|)^{\alpha+s-k+\ell+v} \quad (2)$$

при $v = 1$, $k - s - \alpha - q > \ell > 1$, и (10), получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{F_s^{\infty,q}} &\lesssim \left(\int_0^1 (M_\infty(D^{s+1}h, |\tilde{\omega}|))^q (1 - |\tilde{\omega}|)^{q-1} d|\tilde{\omega}| \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \int_U |D^\ell D^{-k} D^{s+1} f(\tilde{z})| \int_0^1 (1 - |\tilde{\omega}|)^{\ell-1} (1 - |\tilde{z}| |\tilde{\omega}|)^{\alpha+s-k+\ell} d|\tilde{\omega}| dm_2(\tilde{z}) \\ &\lesssim \int_U |f(\tilde{z})| (1 - |\tilde{z}|)^\alpha dm_2(\tilde{z}), \quad q \geq 1; \end{aligned}$$

в последнем неравенстве мы использовали теорему Харди–Литтлвуда (см. [15]) и оценку (2).

Теорема 1 доказана полностью.

Нам потребуется следующее определение. Пусть X – некоторое подпространство $H(U)$. Скажем, что ряд Тейлора *сходится* в пространстве X , если для любой функции f из X : $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$, $\|S_n - f\|_X \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где $S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$.

Первая часть следующего утверждения установлена в [3] (см. также [16]), вторая доказана в [2].

ТЕОРЕМА А. 1) Пусть $p > 1$, $f' \in A_{p-2}^p$; тогда $f \in \text{ВМОА}$.

2) В пространстве ВМОА существует функция f такая, что ее ряд Тейлора не сходится по норме ВМОА.

Ниже мы приводим обобщение теоремы А в нескольких направлениях. Пусть

$$\begin{aligned} H_\gamma^{p,q,\alpha} = \left\{ f \in H(U): \int_0^1 M_p^q(\tilde{D}^\gamma f, r) (1-r)^{\alpha q-1} dr < \infty, \right. \\ \left. 0 < p, q \leq \infty, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in (0, \infty) \right\} \end{aligned}$$

(см. [17]), $H_0^{p,p,(\alpha+1)/p} = A_\alpha^p$.

ТЕОРЕМА 2. Если $g(z) \in H_{\alpha+1-s}^{q,\infty,(\alpha+1)/q}$, $q \in (1, \infty)$, $\alpha > -1$, $s \in \mathbb{R}$, $g(z) = \sum_{k \geq 0} c_k z^k$, то последовательность $\{(c_k)_{k \geq 0}\}$ – мультипликатор из A_α^p в $F_s^{\infty,\nu}$, где $1/p + 1/q = 1$, $1/\nu + 1/\ell = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Заметим сначала, что неравенство $\|f\|_{\text{ВМОА}} = \|f\|_{F_0^{\infty,2}} \lesssim \|f'\|_{A_{p-2}^p}$ равносильно оценке

$$\|\tilde{D}^{-1}f\|_{F_0^{\infty,2}} \lesssim \|f\|_{A_{p-2}^p}, \quad \text{где } (\tilde{D}^{-1}f)(z) = \sum_{k \geq 1} \left(\frac{a_k}{k+1} \right) z^k.$$

Нам понадобится следующее утверждение, установленное в работе [17]:

$$\widetilde{M_T}(H^{p,\nu,\alpha}, H^{q,q,\beta}) = H_{\alpha+\frac{1}{p}-1}^{q,\nu*q,\beta}, \quad \text{где } p \leq 1, \quad p \leq q \leq \infty, \quad 0 < \alpha, \quad \beta < \infty, \quad (2')$$

$(\nu * q)^{-1} = 1/q - 1/\nu$ при $q < \nu$ и $\nu * q = \infty$ при $\nu \leq q$.

Опираясь на это утверждение, несложно выписать достаточные условия для того, чтобы последовательность $\{(c_k)\} (g(z) = \sum_{k \geq 0} c_k z^k)$ была мультипликатором из $H_{[s^+]}^{1, \ell, [s^+] - s}$ в пространства $H_{\alpha+1}^{q, q, (\alpha+1)/q}$, где $[s^+]$ – целая часть числа $s+1$, $\ell, q \in (1, \infty)$, $\alpha > -1$.

Достаточно заметить, что если g – мультипликатор из X в Y ($X, Y \subset H(U)$ – некоторые подпространства), то $D^{-\alpha} D^\beta g$ – мультипликатор из $D^\alpha X$ в $D^\beta Y$, где $D^\alpha X = \{f \in H(U) : D^\alpha f \in X\}$.

Поэтому выводим

$$\widetilde{M}_T(H_{[s^+]}^{1, \ell, [s^+] - s}, H_{\alpha+1}^{q, q, (\alpha+1)/q}) = H_{\alpha+1-s}^{q, \infty, (\alpha+1)/q} \quad \text{при } \ell \leq q, \quad (3)$$

$$\widetilde{M}_T(H_{[s^+]}^{1, \ell, [s^+] - s}, H_{\alpha+1}^{q, q, (\alpha+1)/q}) = H_{\alpha+1-s}^{q, \ell * q, (\alpha+1)/q} \quad \text{при } \ell > q \quad (4)$$

(последнее равенство выписано для полноты изложения).

Далее, из неравенства Минковского следует, что

$$F_s^{1, \ell} \subset H_{[s^+]}^{1, \ell, [s^+] - s}, \quad \ell \in (1, \infty), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

где (см. [7])

$$F_s^{q, \ell} = \left\{ f \in H(U) : \int_T \left(\int_0^1 |\tilde{D}^{[s^+]} f(r\xi)|^\ell (1-r)^{\ell([s^+] - s) - 1} dr \right)^{q/\ell} dm(\xi) < \infty \right\},$$

$\ell, q \in (0, \infty)$, $s \in \mathbb{R}$.

Учитывая, что

$$(H_{\alpha+1}^{q, q, (\alpha+1)/q})^* = H_0^{p, p, (\alpha+1)/p} = A_\alpha^p, \quad (F_s^{1, \ell})^* = F_s^{\infty, \nu}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{1}{\ell} + \frac{1}{\nu} = 1$$

(см. [16] и [7] соответственно), X^* – сопряженное к X пространство, и опираясь на соображения двойственности, получаем, что условия, указанные в теореме, будут также достаточными для того, чтобы последовательность $\{(c_k)\} (g(z) = \sum_{k \geq 0} c_k z^k)$ была мультипликатором из $H_0^{p, p, \frac{\alpha+1}{p}}$ в $F_s^{\infty, \nu}$. Теорема установлена при $q \geq \ell$.

Для доказательства теоремы 2 при $q < \ell$ проводим аналогичные рассуждения. Вместо вложения (5) используем вложение $F_s^{1, \ell} \subset H_{[t^+]}^{r, 1, [t^+] - t}$ (см. [7]), $s - 1 = t - 1/r$, $\ell, r > 1$.

Далее, из равенства (2') получаем достаточное условие на последовательность $\{(c_k)\}$ такую, что $\{(c_k)\} (g(z) = \sum_{k \geq 0} c_k z^k)$ – мультипликатор из $H_{[t^+]}^{r, 1, [t^+] - t}$ в $H_{\alpha+1}^{q, q, (\alpha+1)/q}$, а значит, $\{(c_k)\} \in \widetilde{M}_T(F_s^{1, \ell}, H_{\alpha+1}^{q, q, (\alpha+1)/q}) \subset \widetilde{M}_T(A_\alpha^p, F_s^{\infty, \nu})$, $1/\nu + 1/\ell = 1$, т.е. $g(z) \in H_{\alpha+1-s}^{q, \infty, (\alpha+1)/q}$. Теорема установлена.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Легко видеть, что для получения утверждения п. 1, содержащегося в теореме А, необходимо положить $\ell = 2$, $s = 0$, $\alpha = p - 2$ в теореме 2, учесть, что $F_0^{\infty, 2} = \text{ВМОА}$, и заметить, что при вышеуказанных ℓ , s и α функция $g(z) = \sum_{k \geq 0} z^k / (k + 1)$ по лемме 1 из класса $H_{p-1}^{q, \infty, (p-1)/q}$, $1/p + 1/q = 1$, т.е. мультипликатор.

ТЕОРЕМА 3. 1) При $t < 0$, $\ell \in (0, \infty)$ ряды Тейлора сходятся по норме в пространстве $F_t^{\infty, \ell}$.

2) Для любой функции f , $f(z) = \sum_{k \geq 0} f_k z^k$, $f \in F_t^{\infty, \ell}$, имеют место соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| D^{-\alpha} \sum_{k=n}^{\infty} f_k z^k \right\|_{F_t^{\infty, \ell}} = 0 \quad \text{при любом } \ell \geq 1, \quad \alpha > 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| D^{-\alpha} \sum_{k=n}^{\infty} f_k z^k \right\|_{F_t^{\infty, \ell}} = 0 \quad \text{при любом } \ell < 1, \quad \alpha > \frac{1}{\ell} - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Легко видеть, что утверждения теоремы 3 распространяют результат п. 2) теоремы А. Это следует сразу из равенства $F_0^{\infty, 2} = \text{ВМОА}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В пространствах A_p^α , $p \in (1, \infty)$, $\alpha \in (-1, \infty)$, ряды Тейлора сходятся по норме. Это установлено в [2].

Заметим, что (см. [7])

$$\|f_n - f\|_{F_t^{\infty, \ell}} \leq \|f_n - f\|_{F_s^{p, p}}, \quad p < \infty, \quad s - \frac{1}{p} = t, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \ell \in (0, \infty).$$

Из этого соотношения и теоремы Харди–Литтлвуда (см. [15]) выводим

$$\|f_n - f\|_{F_t^{\infty, \ell}} \lesssim \int_U |(f_n - f)(z)|^p (1 - |z|)^{-(t + \frac{1}{p})p - 1} dm_2(z), \quad \ell \in (0, \infty),$$

$$p \in (1, \infty), \quad t \in \mathbb{R}, \quad t + \frac{1}{p} < 0.$$

Следовательно, если $t < -1/p$ (т.е. $t < 0$), то при любом $\ell \in (0, \infty)$ ряды Тейлора сходятся по норме в $F_t^{\infty, \ell}$. При $\ell > 1$ это можно показать также следующим образом:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{F_t^{\infty, \ell}} &\lesssim \|f_n - f\|_{H_{[t+]}^{\infty, \ell, [t+]-1}} \lesssim \|f_n - f\|_{H_{[s+]}^{\ell, \ell, [s+]-s}} \\ &\lesssim \int_U |(f_n - f)(z)|^\ell (1 - |z|)^{-s\ell - 1} dm_2(z), \\ s - \frac{1}{\ell} &= t, \quad \ell \in (1, \infty), \quad s < 0; \end{aligned}$$

первые вложения установлены в [7], последнее – следствие теоремы Харди–Литтлвуда.

Поэтому при $t + 1/\ell < 0$, $\ell > 1$ (т.е. при $t < -1/\ell$, $\ell > 1$) в $F_t^{\infty, \ell}$ ряды Тейлора сходятся по норме. Отметим также, что можно опереться на соображения двойственности, используемые в [2] и вывести сходимость рядов Тейлора при $\ell > 1$, $s < 0$ в $F_s^{\infty, \ell}$ из равенства $(F_s^{1, q})^* = F_s^{\infty, \ell}$, $s \in \mathbb{R}$, $1/\ell + 1/q = 1$ и оценок

$$\|f_n - f\|_{F_s^{1, q}} \lesssim I(n) = \int_T \int_0^1 |(f_n - f)(z)|^q (1 - |z|)^{-qs - 1} d|z| dm(\xi), \quad s < 0$$

(см. [7]). Далее, учитываем, что $I = I(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (см. [2]).

Займемся доказательством второго утверждения в теореме. Из леммы 2 (п. 1) выводим

$$|\tilde{D}^k D^{-\alpha} h(z)| \lesssim \int_U |\tilde{D}^k f_z(\bar{\varphi})| |D^\alpha D^{-\alpha} g|_{|\tilde{\omega}|}(\tilde{\omega}) |(1 - |\tilde{\omega}|)^{\alpha-1} dm_2(\tilde{\omega}), \quad (6)$$

$\tilde{\omega} = \varphi|\tilde{\omega}|$, где

$$g(\tilde{\omega}) = g(n, \tilde{\omega}) = \tilde{\omega}^{n+1}(1 - \tilde{\omega}), \quad h(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \hat{f}(k)z^k,$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)z^k, \quad f \in F_s^{\infty, \ell},$$

$$h(zr^2, n) = h(zr^2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_T f_z(r\bar{t})((rt)^{n+1} + (rt)^{n+2} + \dots) dm(t),$$

$f_z(\omega) = f(z\omega)$, $z, \omega \in U$, $\alpha > 0$, $r > 1/2$.

Далее, учитывая вид “нормы” в классах $F_s^{\infty, \ell}$, из (6) нетрудно получить оценку

$$\|D^{-\alpha} h(z)\|_{F_s^{\infty, \ell}}^{\ell} \lesssim \|f\|_{F_s^{\infty, \ell}}^{\ell} \left(\int_U |g(n, \tilde{\omega})| (1 - |\tilde{\omega}|)^{\alpha-1} dm_2(\tilde{\omega}) \right)^{\ell}, \quad \ell > 1,$$

и из леммы 1 (п. 4)

$$\|D^{-\alpha} h(z)\|_{F_s^{\infty, \ell}}^{\ell} \lesssim \|f\|_{F_s^{\infty, \ell}}^{\ell} \int_U |g(n, \tilde{\omega})|^{\ell} (1 - |\tilde{\omega}|)^{\alpha\ell + \ell - 2} dm_2(\tilde{\omega}), \quad \ell \leq 1.$$

Остальное ясно. Теорема 3 доказана.

2. Операторы Теплица и деление на внутреннюю функцию в классах типа ВМОА. В этом разделе мы установим утверждение о делении на внутренний множитель в пространствах типа ВМОА. Напомним следующее определение (см. [18]).

Пусть X – подкласс класса $H^1(U)$. Скажем, что в X *возможно деление на внутренний множитель*, если для любой функции $g \in X$ и для любой внутренней функции f (см. [5]) имеет место импликация $B_g S_g f^{-1} \in H^{\infty} \Rightarrow gf^{-1} \in X$, где B_g, S_g – соответственно произведение Бляшке и сингулярная внутренняя функция, соответствующая функции g (см. [5]).

Деление на внутренний множитель в различных пространствах голоморфных в U функций устанавливалось в ряде работ различных авторов (см. [18] и указанную там литературу). В ВМОА это сделать нельзя, однако, как было установлено в [4], в пространствах $\text{ВМОА}_n = \{f \in H(U) : \tilde{D}^n f \in \text{ВМОА}, n \in \mathbb{N}\}$ функции делятся на свою внутреннюю часть. Доказательство этого факта было основано на соображениях двойственности и на одной новой характеристике ВМОА, вывод которой, в свою очередь, существенным образом опирался на “представление Фейффермана” классов ВМО (см. [5]).

Для получения обобщения этого результата на гладкостные аналоги пространств типа ВМОА, мы предложим подход, в котором основную роль будет играть характеристика пространств ВМОА через норму Гарсия (см. [8], [5]):

$$\text{ВМОА} = \left\{ f \in H^1(U) : \sup_{|z| < 1} \int_T \frac{|f(\xi) - f(z)|^s}{|1 - \bar{\xi}z|^2} dm(\xi)(1 - |z|) < \infty, \quad 1 \leq s < \infty \right\}.$$

Напомним, что

$$\text{ВМОА}_{\alpha,n,q,\beta} = \left\{ f^{(n)} \in H^1: \sup_{|z|<1} \int_T \frac{|\tilde{D}^\alpha f(\xi) - \tilde{D}^\alpha f(z)|}{|1 - \bar{\xi}z|^q} (1 - |z|)^\beta d\xi < \infty \right\},$$

где $0 \leq \alpha, q, \beta < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнена цепочка неравенств $\beta + 1 < q < \beta + 2$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$, $\alpha \geq 0$. Тогда в классах $\text{ВМОА}_{\alpha,n,q,\beta}(U)$ возможно деление на внутреннюю функцию.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $q = 2$, $\beta = 1$ этот результат, и об этом было упомянуто выше, был установлен в [4]; при $\alpha = n = 0$, $q = 2$, $\beta = 1$ теорема не верна (см. [4]).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Действие оператора Теплица и неразрывно связанных с ним операторов Ганкеля в классах ВМОА изучалось в [19], [20] (см., также [11]).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Из теоремы 4 следует, что эффект деления на внутренний множитель может быть сохранен и при устранении гладкости, но за счет “деформации” ядра Пуассона (случай $\alpha = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 основано на привлечении соображений, связанных с действием операторов Теплица $T_{\bar{h}}$. Достаточно (и это несложно показать, см., например, [18]) установить, что оператор Теплица

$$(T_{\bar{h}}f)(z) = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_T \frac{\overline{h(t)}f(t)}{1 - \bar{t}z} dm(t)$$

действует из $\text{ВМОА}_{\alpha,n,q,\beta}(U)$ в $\text{ВМОА}_{\alpha,n,q,\beta}(U)$ при $h \in H^\infty(U)$.

Заметим, что часть намеченной программы уже выполнена; если $D^n f \in H^1(U)$, то $D^n(T_{\bar{h}}f)(z) \in H^1(U)$, $n \in \mathbb{N}$, $h \in H^\infty$.

Этот результат приведен в работе [4].

Далее, тригонометрические полиномы, как легко видеть, при $q \leq 2$, $\beta \in (0, \infty)$ или при $q > 2$, $\beta > q - 2$ принадлежат пространствам $\text{ВМОА}_{\alpha,n,q,\beta}$.

Заметим также, что при $\alpha > n$ конечность “нормы” $\|f\|_{\text{ВМОА}_{\alpha,n,q,\beta}} < \infty$ обеспечивает включение $f^{(n)} \in H^1$.

Для доказательства теоремы проведем оценку величины

$$\left(\int_T \frac{|(\tilde{D}^\alpha F)(\xi) - (\tilde{D}^\alpha F)(z)|}{|1 - \bar{\xi}z|^q} dm(\xi) \right) (1 - |z|)^\beta,$$

где $z \in U$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $q \in (0, \infty)$,

$$F(z) = (T_{\bar{h}}f)(z), \quad f - \text{полином}, \quad f \in \text{ВМОА}_{\alpha,n,q,\beta}.$$

Для этого нам понадобится следующая оценка. Ее доказательство проводится стандартным образом и содержится, например, в [8]. Имеем

$$\int_U \frac{(1 - |\xi|^2)^s dm_2(\xi)}{|1 - \bar{\xi}z|^r |1 - \bar{\xi}\omega|^\nu} \lesssim \frac{C_1}{|1 - \bar{z}\omega|^{r+\nu-s-2}}, \quad (7)$$

$r - s, \nu - s < 2, s > -1, r, \nu \geq 0, r + \nu - s > 2.$

Нам потребуется также следующее очевидное неравенство:

$$|(1 - \xi z)^\alpha - (1 - \xi \omega)^\alpha| \leq C(|1 - z\bar{\omega}|(|1 - \xi z|^{\alpha-1} + |1 - z\bar{\omega}|^{\alpha-1}))$$

при $\alpha \geq 1, \xi, \omega \in U, z \in T.$

Действительно, легко видеть, что для любой точки $\tilde{\omega}$, лежащей между z и ω , имеем

$$\begin{aligned} f(\tilde{\omega}) &= (1 - \xi \tilde{\omega})^\alpha, \quad \alpha \geq 1, \\ |f'(\tilde{\omega})| &\leq \alpha |1 - \xi \tilde{\omega}|^{\alpha-1} \leq \alpha (|1 - \xi z|^{\alpha-1} + |z - \tilde{\omega}|^{\alpha-1}) \leq \alpha (|1 - \xi z|^{\alpha-1} + |1 - \bar{z}\omega|^{\alpha-1}), \\ |(1 - \xi z)^\alpha - (1 - \xi \omega)^\alpha| &\leq |f'(\tilde{\omega})| |1 - \bar{z}\omega| \lesssim |1 - \bar{z}\omega| (|1 - \bar{z}\omega|^{\alpha-1} + |1 - \xi z|^{\alpha-1}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|(1 - z\omega)^{\alpha+1} - (1 - z\xi)^{\alpha+1}| \lesssim |1 - \omega\bar{\xi}|^{\alpha+1} + |1 - \omega\bar{\xi}| |1 - \bar{\xi}z|^\alpha, \quad \omega, z \in U, \quad \xi \in T, \quad \alpha \geq 0. \quad (8)$$

Учитывая тот факт, что f – полином, выводим $(F(\omega) = (T_{\bar{\varphi}}f)(\omega))$

$$\begin{aligned} J(\omega) &= \int_T \frac{|\tilde{D}^\alpha F(\xi) - \tilde{D}^\alpha F(\omega)|}{|1 - \xi\bar{\omega}|^q} dm(\xi) (1 - |\omega|)^\beta \lesssim \lim_{R \rightarrow 1} J_R(\omega) \\ &= \lim_{R \rightarrow 1} \left(\int_T \left| \int_T \frac{\overline{\varphi(t)} f(t) dm(t)}{(1 - \bar{t}R\xi)^{\alpha+1}} - \int_T \frac{\overline{\varphi(t)} f(t) dm(t)}{(1 - \bar{t}R\omega)^{\alpha+1}} \right| \frac{(1 - |\omega|)^\beta}{|1 - \bar{\omega}\xi|^q} dm(\xi) \right) \\ &= \int_T \left| \lim_{R \rightarrow 1} \int_T \frac{\overline{\varphi(Rt)} f(Rt) (1 - tR\bar{\omega})^{\alpha+1} - (1 - tR\bar{\xi})^{\alpha+1}}{(1 - tR\bar{\xi})^{\alpha+1} (1 - tR\bar{\omega})^{\alpha+1}} dm(t) \right| \times \frac{(1 - |\omega|)^\beta}{|1 - \bar{\omega}\xi|^q} d\xi. \end{aligned}$$

Учитывая лемму 2, получим

$$\begin{aligned} J(\omega) &\lesssim \int_T \int_U \frac{|\varphi(z)| |\tilde{D}^k f(z)| (1 - |z|)^{k-1} |1 - z\bar{\omega}|^{\alpha+1} - (1 - z\bar{\xi})^{\alpha+1}}{|1 - z\bar{\xi}|^{\alpha+1} |1 - z\bar{\omega}|^{\alpha+1}} dm_2(z) \\ &\quad \times \frac{(1 - |\omega|)^\beta}{|1 - \bar{\omega}\xi|^q} dm(\xi). \end{aligned}$$

Из оценки (8) выводим $J(\omega) \leq (\sup_{z \in U} |\varphi(z)|) (J_1 + J_2).$

Оценим каждое слагаемое в отдельности.

Имеем

$$\begin{aligned} J_1 &\lesssim \int_T \int_U \frac{|\tilde{D}^k f(z)| (1 - |z|)^{k-1} |1 - \omega\bar{\xi}|^{\alpha+1} (1 - |\omega|)^\beta}{|1 - z\bar{\xi}|^{\alpha+1} |1 - z\bar{\omega}|^{\alpha+1} |1 - \bar{\omega}\xi|^q} dm(\xi) dm_2(z) \\ &\lesssim \left[\sup_{|z| < 1} (|\tilde{D}^k f(z)| (1 - |z|)^\beta) \right] * \tilde{J}'_1 = \tilde{J}_1 * \tilde{J}'_1, \quad \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

Учтем, что

$$\tilde{J}_1 = \sup_{|z| < 1} |\tilde{D}^k f(z)| (1 - |z|)^\beta \lesssim \sup_{|z| < 1} |\tilde{D}^\alpha D^{q-1} f(z)| (1 - |z|)^\beta$$

при $k = \alpha + q - 1$, $q > 1$, $\alpha \geq 0$.

Поэтому из интегральной формулы Коши выводим

$$\tilde{J}_1 \lesssim \sup_{|z| < 1} \int_T \frac{|\tilde{D}^\alpha f(\xi) - \tilde{D}^\alpha f(z)|}{|1 - \bar{\xi}z|^q} dm(\xi)(1 - |z|)^\beta,$$

где f – полином.

Учитывая оценку (7), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{J}'_1 &= \int_T \int_U \frac{(1 - |z|)^{k-1-\beta} (1 - |\omega|)^\beta dm(\xi) dm_2(z)}{|1 - \bar{\xi}z|^{\alpha+1} |1 - z\bar{\omega}|^{\alpha+1} |1 - \bar{\omega}\xi|^{-\alpha-1+q}} \\ &\leq \int_T \int_U \frac{(1 - |z|)^{\alpha+q-2-\beta} (1 - |\omega|)^\beta dm(\xi) dm_2(z)}{|1 - \bar{\xi}z|^{\alpha+1} |1 - z\bar{\omega}|^{\alpha+1} |1 - \bar{\omega}\xi|^{q-\alpha-1}} \\ &\lesssim \begin{cases} \int_T \frac{(1 - |\omega|)^\beta dm(\xi)}{|1 - \bar{\omega}\xi|^{\beta+1}} \leq C \\ \quad \text{при } \beta > 0, \quad \beta + 1 < q < \alpha + \beta + 2, \\ \int_T \frac{dm(\xi)}{|1 - \bar{\omega}\xi|^{q-\alpha-1}} \left(\int_0^1 \frac{(1 - |z|)^{q-3-\beta} d|z|}{(1 - |z||\omega|)^\alpha} \right) (1 - |\omega|)^\beta \leq C \\ \quad \text{при } (\alpha + 2, \beta + 2) < q < \alpha + \beta + 2, \quad \alpha > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

При получении последней оценки мы учли неравенство (2) и неравенство $|1 - \bar{\xi}z|^{\alpha+1} \geq (1 - |z|)^{\alpha+1}$, $\alpha > -1$.

Оценим далее слагаемое J_2 . Имеем ($k = \alpha + q - 1$)

$$\begin{aligned} J_2 &\lesssim \int_T \int_U \frac{|\tilde{D}^k f(z)|(1 - |z|)^{k-1} |1 - \bar{\omega}\xi| |1 - \bar{\xi}z|^\alpha (1 - |\omega|)^\beta dm(\xi) dm_2(z)}{|1 - \bar{\xi}z|^{\alpha+1} |1 - z\bar{\omega}|^{\alpha+1} |1 - \bar{\omega}\xi|^q} \\ &\lesssim \int_T \int_U \frac{(1 - |z|)^{\alpha+q-2-\beta} (1 - |\omega|)^\beta dm(\xi) dm_2(z)}{|1 - \bar{\omega}\xi|^{q-1} |1 - z\bar{\omega}| |1 - \bar{\omega}\xi|^{\alpha+1}} = \tilde{J}_2. \end{aligned}$$

Далее, учитывая оценку (7), выводим

$$\int_U \frac{(1 - |z|)^{\alpha+q-2-\beta} dm_2(z)}{|1 - z\bar{\omega}|^{1+\alpha} |1 - \bar{\xi}z|} \lesssim \frac{1}{|1 - \bar{\omega}\xi|^{\beta+2-q}} \quad \text{при } q > \beta + 1 - \alpha, \quad q - 2 < \beta < q - 1$$

и поэтому

$$\tilde{J}_2 \lesssim \int_T \frac{(1 - |\omega|)^\beta dm(\xi)}{|1 - \bar{\xi}\omega|^{\beta+1}} \leq C$$

или, учитывая оценку $|1 - z\bar{\xi}|^{-1} \leq (1 - |z|)^{-1}$, имеем

$$\tilde{J}_2 \lesssim \int_0^1 \frac{(1 - |z|)^{\alpha+q-3-\beta} d|z|}{(1 - |z||\omega|)^\alpha} (1 - |\omega|)^{\beta-q+2} \leq C$$

при $\alpha > 0$, $q > 2$, $-\alpha + \beta + 2 < q < \beta + 2$.

Заметим теперь, что в ходе доказательства теоремы, мы установили, что пространства $\text{ВМОА}_{\alpha, n, q, \beta}$ вкладываются в аналитические пространства Бесова

$$H_\beta^\infty(U) = \{f \in H(U): \sup_{|z| < 1} |\tilde{D}^k f(z)|(1 - |z|)^\beta < \infty\}$$

при $k = \alpha + q - 1$, в которых многочлены образуют всюду плотное множество (см., например, [19]). Поэтому T_φ при $\varphi \in H^\infty$ – ограниченный оператор из H_β^∞ в $\text{ВМОА}_{\alpha, n, q, \beta}$. Остается еще раз учесть, что $\text{ВМОА}_{\alpha, n, q, \beta} \subset H_\beta^\infty$. Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Вышеустановленная теорема 4 распространяет результат о делении в классах ВМОА_n , $n \in \mathbb{N}$, сразу в нескольких направлениях. Рассмотрим, например, случай $\beta = 1$, $\alpha = n \in \mathbb{N}$. Тогда $\text{ВМОА}_{n,n,q,1} = \text{ВМОА}_{n,q}$ и деление на внутренний множитель в этих классах (и об этом было упомянуто выше) было установлено в [4] при $q = 2$.

Из теоремы 4 следует, к примеру, что это верно также при $2 < q < 3$ (см. первую группу неравенств в условиях теоремы).

3. Доказательство вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *имеем*

$$\sup_{|z| < 1} |D^k g(z)| (1 - |z|)^{k-s} \lesssim \|g\|_{F_s^{\infty,q}}, \quad k > s, \quad s \in \mathbb{R}, \quad q \in (0, \infty); \quad (9)$$

2) *имеем*

$$\left(\int_0^1 M_s(G, R) (1 - R)^\alpha dR \right)^p \lesssim \int_0^1 (M_s(G, R))^p (1 - R)^{\alpha p + p - 1} dR, \quad (10)$$

$p \leq 1$, $\alpha > -1$, $G \in H(U)$, $s \in (0, \infty]$;

3) *функция* g , $g(z) = \sum_{k \geq 0} z^k / (k + 1)$, *лежит в пространстве* $H_{p-1}^{q, \infty, (p-1)/q}$, $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$;

4) *имеем*

$$\left(\int_U |f(z)| (1 - |z|)^\alpha dm_2(z) \right)^p \lesssim \int_U |f(z)|^p (1 - |z|)^{\alpha p + 2p - 2} dm_2(z),$$

$0 < p \leq 1$, $f \in H(U)$, $(\alpha + 2)p > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (9) установлена в [7], неравенство из п. 4 в [16]. Докажем вторую оценку в лемме.

Имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 M_s(G, R) (1 - R)^\alpha dR \right)^p &\lesssim \sum_{k \geq 0} \left(\int_{1-2^{-k}}^{1-2^{-k-1}} (M_s(G, R)) dR \right)^p 2^{-k\alpha p} \\ &\lesssim \sum_{k \geq 0} (M_s(G, 1 - 2^{-k-1}))^p 2^{-kp(\alpha+1)} \\ &\lesssim \sum_{k \geq 0} \left(\int_{1-2^{-k-1}}^{1-2^{-k-2}} (M_s(G, r))^p dr \right) 2^{-k(\alpha p + p)} 2^k \\ &\lesssim \int_0^1 (M_s(G, r))^p (1 - r)^{\alpha p + p - 1} dr. \end{aligned}$$

Покажем справедливость утверждения, содержащегося в п. 3) вышеприведенной леммы.

Имеем

$$\begin{aligned} \|g\|_{H_{p-1}^{q, \infty, \frac{p-1}{q}}} &= \sup_r M_q(D^{p-1}g, r) (1 - r)^{\frac{p-1}{q}} \lesssim (z = r\xi) \\ &\lesssim \left(\sup_r \int_T \left| \frac{1}{(1 - z)^{(p-1)q}} \right| dm(\xi) \right)^{\frac{1}{q}} (1 - r)^{\frac{p-1}{q}} \lesssim \text{const}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. 1) Пусть $\alpha > 0$, $f, g \in H(U)$; тогда

$$\left| \int_T f(rt) \overline{g(r\bar{t})} dm(t) \right| \leq C(\alpha) \int_U |f(\omega)| |\tilde{D}^\alpha g(\omega)| (1 - |\omega|)^{\alpha-1} dm_2(\omega), \quad \frac{1}{2} < r < 1,$$

$$\left| \int_T f(rt) g(r\bar{t}) dm(t) \right| \leq C(\alpha) \int_U |f(\omega)| |D^\alpha g(\bar{\omega})| (1 - |\omega|)^{\alpha-1} dm_2(\omega), \quad \frac{1}{2} < r < 1.$$

2) Если $D^\gamma f \in H_0^{p,q,\alpha}$, то $\tilde{D}^\gamma f \in H_0^{p,q,\alpha}$, $0 < p, q \leq \infty$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, причем справедливо и обратное утверждение.

3) Имеет место оценка

$$M = \int_T \frac{dm(\xi)}{|1 - \bar{z}\xi|^{\gamma_1} |1 - \omega\bar{\xi}|^{\gamma_2}} \leq \frac{C_1(1 - |\omega|)^{1-\gamma_2}}{|1 - z\bar{\omega}|^{\gamma_1}} + \frac{C_2(1 - |z|)^{1-\gamma_1}}{|1 - z\bar{\omega}|^{\gamma_2}},$$

$\gamma_1, \gamma_2 > 1$, $z, \omega \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки в п. 1) следствия равенств

$$\frac{1}{2\pi} \int_T f(r\xi) \overline{g(r\bar{\xi})} dm(\xi) = \left(\frac{2^{\alpha-1}}{r^{2(\alpha-1)} \pi} \right) \times \int_0^r \int_0^{2\pi} f(\omega) \overline{D^\alpha g(\omega)} \left(\log \frac{r}{|\omega|} \right)^{\alpha-1} dm_2(\omega), \quad \alpha > 1,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_T f(r\xi) g(r\bar{\xi}) dm(\xi) = r^{-2(\alpha+2)} \left(\frac{\alpha+2}{\pi} \right) \int_0^r \int_{-\pi}^\pi g(\rho\bar{\xi}) D^{\alpha+2} f(\rho\xi) \times (r^2 - \rho^2)^{\alpha+1} \rho d\rho dm(\varphi), \quad \alpha > -2,$$

которые легко можно проверить почленным интегрированием (см., например, [6], [11]).

2) Это утверждение установлено в [15].

3) Имеем

$$\overline{M} = \int_{\xi: |1 - \bar{\xi}z| \geq \sigma |1 - z\bar{\omega}|} (\dots) dm(\xi) + \int_{\xi: |1 - \bar{\xi}z| < \sigma |1 - z\bar{\omega}|} (\dots) dm(\xi) = \overline{M}_1 + \overline{M}_2.$$

Далее, легко видеть, что если число σ выбрать достаточно близким к нулю, то в силу неравенства $|1 - \bar{\xi}z| < \sigma |1 - z\bar{\omega}|$ будем иметь $C_2 |1 - \omega\bar{z}| < |1 - \omega\bar{\xi}| < C_1 |1 - \omega\bar{z}|$, $\xi \in T$, $\omega, z \in U$.

Поэтому

$$\overline{M}_1 \leq C_3 \frac{(1 - |\omega|)^{1-\gamma_2}}{|1 - \omega\bar{z}|^{\gamma_1}}, \quad \overline{M}_2 \leq C_4 \frac{(1 - |z|)^{1-\gamma_1}}{|1 - \omega\bar{z}|^{\gamma_2}}.$$

Лемма 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mateleviĉ M., Pavloviĉ M. Multipliers of H^p and BMOA // Pacific J. Math. 1990. V. 146. P. 71–84.
- [2] Kehe Zhu. Duality of Bloch spaces and norm convergence of Taylor series // Michigan Math. J. 1991. V. 38. P. 89–101.
- [3] Zabulionis A. On the differential operator in the analytic function spaces // Litovsk. Mat. Sb. 1984. V. 24. № 1. P. 53–59.
- [4] Шамоян Р. Ф. Теплицевы операторы в некоторых пространствах голоморфных функций и новая характеристика классов BMOA // Изв. АН. АрмССР. 1987. № 2. С. 122–132.
- [5] Гарнетт Д. Ж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
- [6] Шамоян Р. Ф. Обобщенное преобразование Харди и операторы Теплица в пространствах типа BMOA // Укр. матем. ж. 2001. Т. 53. № 9. С. 1260–1271.
- [7] Ortega J. M., Fabrega J. Hardy inequality and embeddings in holomorphic Triebel–Lizorkin spaces // Illinois Math. J. 1999. V. 43. № 4. P. 733–751.
- [8] Ortega J. M., Fabrega J. Pointwise multipliers and corona-type decomposition in BMOA // Ann Inst. Four. Gren. 1996. V. 46. № 1. P. 111–137.
- [9] Шамоян Р. Ф. Мультипликаторы степенных рядов, операторы Теплица и двойственность в некоторых пространствах голоморфных в поликруге функций. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М., 2001.
- [10] Трибель Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.
- [11] Шамоян Р. Ф. О мультипликаторах из пространств типа Бергмана в пространства Харди в поликруге // Укр. матем. ж. 2000. Т. 10. С. 405–415.
- [12] Шамоян Р. Ф. Мультипликаторы степенных рядов, операторы Теплица и теоретико-множественные вложения пространств Харди–Соболева–Джрбашяна // Изв. АН Респ. Армения. 1999. № 4. С. 43–59.
- [13] Шведенко С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге и шаре // Итоги науки и техники. Т. 23. Сер. матем. анализ. М., 1985. С. 3–123.
- [14] Шамоян Р. Ф. О характеристиках типа BMO одного класса голоморфных в круге функций // Сиб. матем. ж. 2002 (принято к печати).
- [15] Buckley S. M., Koskela P., Vukotiĉ D. Fractional integration, differentiation, and weighted Bergman spaces // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1999. № 2. P. 377–385.
- [16] Djrbashian A., Shamoyan F. Topics in the theory of A^p_α spaces // Teubner Texte zur Math. 1988. V. 105. P. 1–199.
- [17] Yevtiĉ M., Pavloviĉ M. Coefficient multipliers on spaces of analytic functions // Acta Sci. Math. 1998. V. 64. P. 531–545.
- [18] Shirokov N. K. Analytic Functions Smooth up to the Boundary // Lecture Notes in Math.: Springer, 1988.
- [19] Janson S., Petre J. Semmes, Hankel, and Toeplitz operators on some spaces of analytic functions // Duke Math. J. 1983. P. 936–957.
- [20] Aleksandrov A. B., Peller V. V. Hankel operators and similarity to a contraction // Intern. Math. Res. Notes. 1996. № 9. P. 263–275.