Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Табалдыев, Неинъективность предуального бимодуля алгебры мер бесконечных дискретных групп, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 735–742

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm223>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:51:18

НЕИНЪЕКТИВНОСТЬ ПРЕДУАЛЬНОГО БИМОДУЛЯ АЛГЕБРЫ МЕР БЕСКОНЕЧНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ГРУПП

С. Б. Табалдыев

В статье доказано, что предуальный бимодуль алгебры мер бесконечной дискретной группы не инъективен, несмотря на то, что в случае аменабельной группы алгебра мер аменабельна по Конну. Таким образом, известный результат А. Я. Хелемского об эквивалентности аменабельности по Конну и инъективности предуального бимодуля для алгебр фон Ноймана не переносится на алгебру мер. Кроме того, для дискретной аменабельной группы указана простая формула для нормальной виртуальной диагонали алгебры мер. Показано, что некоторый канонический бимодуль над алгеброй мер не является нормальным.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. В 1972 г. Б. Е. Джонсон ввел аменабельные банаховы алгебры [1]. Напомним его определение. Пусть A – банахова алгебра, X – банахов A -бимодуль. *Дифференцированием* называется линейный непрерывный оператор $D: A \rightarrow X$, удовлетворяющий тождеству Лейбница $D(ab) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$ для всех $a, b \in A$. Например, любое отображение вида $D: a \mapsto x \cdot a - a \cdot x$, где $x \in X$ – произвольный фиксированный элемент, является дифференцированием. Такое дифференцирование называется *внутренним*. *Дуальным* к X банаховым бимодулем называется сопряженное пространство X^* с внешними умножениями, определяемыми формулами $\langle a \cdot f, x \rangle = \langle f, x \cdot a \rangle$, $\langle f \cdot a, x \rangle = \langle f, a \cdot x \rangle$ для всех $f \in X^*$, $a \in A$ и $x \in X$. Наконец, банахова алгебра A называется *аменабельной*, или, более подробно, *аменабельной по Джонсону*, если любое дифференцирование $D: A \rightarrow X$ в любой дуальный банахов A -бимодуль X является внутренним.

По известной теореме Джонсона и Рингроуза групповая алгебра $L^1(G)$ аменабельна $\iff$ группа G аменабельна [1]. Этот результат показывает насколько естественно понятие аменабельности для банаховых алгебр. Условие аменабельности нередко оказывается содержательным и в других конкретных классах банаховых алгебр (см. [2]). Например, C^* -алгебра аменабельна $\iff$ она ядерна ([3]–[5] и др.).

В последнее время (см., напр., [6]–[9] и др.) стало популярным исследовать аменабельность так называемых дуальных банаховых алгебр. Напомним, что банахова алгебра A называется *дуальной*, если существует замкнутый по норме подбимодуль E дуального A -бимодуля A^* такой, что A -бимодуль A канонически изоморфен E^* . Бимодуль

E называется обычно *предуальным бимодулем* и обозначается A_* . Самые известные примеры дуальных алгебр – это алгебры фон Ноймана и алгебра мер $M(G)$ локально компактной группы G . Алгебра фон Ноймана аменабельна по Джонсону $\iff$ она субоднородна ([10]), т.е. она имеет вид $L^\infty(X_1, \mu_1) \otimes M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus L^\infty(X_2, \mu_2) \otimes M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus L^\infty(X_k, \mu_k) \otimes M_{n_k}(\mathbb{C})$, где $M_n(\mathbb{C})$ – алгебра матриц размера $n \times n$. Алгебра $M(G)$ аменабельна по Джонсону $\iff$ группа G дискретна и аменабельна ([9]). Таким образом, дуальных банаховых алгебр, аменабельных по Джонсону, очень мало. Поэтому для них предпочтительнее использовать более мягкое понятие аменабельности – так называемую *аменабельность по Конну*, учитывающее их дуальность как бимодулей над собой. Впервые этот вариант аменабельности для алгебр фон Ноймана введен в [11]. Случай общих дуальных банаховых алгебр рассматривался в [8], [6], [15]. Напомним определение. Пусть A – дуальная банахова алгебра, X – дуальный A -бимодуль. Бимодуль X называется *нормальным*, если операции внешнего умножения в нем раздельно слабо* непрерывны. Алгебра A называется *аменабельной по Конну* [6], [7], если любое слабо* непрерывное дифференцирование $D: A \rightarrow X$ из алгебры A в любой нормальный A -бимодуль X является внутренним. Любая гиперконечная алгебра фон Ноймана, т.е. алгебра фон Ноймана, совпадающая со слабым операторным замыканием некоторой возрастающей направленности своих конечномерных *-подалгебр, аменабельна по Конну [11]–[13]. Верно также обратное утверждение [3], [5], [10], [14], [15]. Недавно доказано, что алгебра мер $M(G)$ аменабельна по Конну $\iff$ группа G аменабельна [7].

Для аменабельных по Конну алгебр фон Ноймана известен критерий на языке гомологии топологических алгебр. А именно, в [16] доказано, что алгебра фон Ноймана A аменабельна по Конну $\iff$ предуальный бимодуль A_* инъективен. Для произвольных дуальных банаховых алгебр до сих пор не было известно, верен ли такой критерий (см., например, [2, Problem 24. P. 225]). Чтобы сформулировать определение инъективного бимодуля, мы сначала напомним определение допустимого вложения бимодулей. Морфизм A -бимодулей $\varphi: X \rightarrow Y$ называется *допустимым вложением*, если существует непрерывный линейный оператор $s: Y \rightarrow X$ левый обратный к φ , т.е. такой, что $s \circ \varphi = 1_X$. Наконец, банахов A -бимодуль J называется *инъективным* (см. [17]), если для любого допустимого вложения $\varphi: J \rightarrow X$ в любой A -бимодуль X существует левый обратный морфизм бимодулей.

В данной работе начато исследование вопроса о гомологическом смысле аменабельности по Конну для алгебр $M(G)$. Показано, что названный выше критерий Хелемского, к сожалению, не переносится на эти алгебры. А именно, доказано, что для любой бесконечной (теорема 1) дискретной группы G , например, уже для $G = \mathbb{Z}$, предуальный бимодуль $c_0(G)$ алгебры мер $M(G) (= l_1(G)$ в случае дискретной группы) не инъективен, хотя (см. [6]) алгебра аменабельна по Конну в случае аменабельной G . Кроме того, для дискретной аменабельной группы G указана простая формула для нормальной виртуальной диагонали (определение см. в разделе 4). Эта формула предоставляет новое доказательство сильной аменабельности по Конну (определение см. там же) алгебры $l^1(G)$ для аменабельной дискретной группы G (см. [7, Corollary 5.4]). Интересно заметить, что в случае $G = \mathbb{Z}$ эта диагональ не является нормальным элементом некоторого канонического $l_1(\mathbb{Z})$ -бимодуля (теорема 3).

2. Умножение в некоторых $M(G)$ -бимодулях и морфизм π_* . Пусть A – дуальная банахова алгебра, $B^2(A)$ – пространство всех ограниченных билинейных функционалов на A . Множество тех $\varphi \in B^2(A)$, которые слабо* непрерывны по каждой переменной, обозначим через $B_*^2(A)$. Проективное тензорное произведение $A \hat{\otimes} A$ является бимодулем с внешними произведениями, корректно определенными формулами $a \cdot b \otimes c = ab \otimes c$ и $a \otimes b \cdot c = a \otimes bc$. Канонический морфизм умножения $\pi: A \hat{\otimes} A \rightarrow A$, корректно определенный формулой $\pi(a \otimes b) = ab$ является морфизмом A -бимодулей. Рассмотрим $\pi^*: A^* \rightarrow (A \hat{\otimes} A)^*$. В силу свойства универсальности тензорного произведения (см., например, [17]) можно отождествить $(A \hat{\otimes} A)^*$ с пространством $B^2(A)$. Нетрудно видеть, что $\pi^*(A_*) \subseteq B_*^2(A)$. Тогда π^* определяет морфизм бимодулей $\pi_*: A_* \rightarrow B_*^2(A)$ по формуле $\pi_*(f) = \pi^*(f)$ для всех $f \in A_*$.

Пусть G – локально компактная группа. Предуальным бимодулем для алгебры мер $M(G)$ служит пространство $C_0(G)$ непрерывных функций, стремящихся к 0 на бесконечности с внешними умножениями

$$a \cdot x(s) = \int_G x(st) da(t), \quad x \cdot a(s) = \int_G x(ts) da(t).$$

Как известно, $M(G)$ -бимодуль $B_*^2(M(G))$ изоморфен (см. [7]) банахову пространству $SC_0(G \times G)$ тех ограниченных функций, которые отдельно по каждой переменной принадлежат $C_0(G)$ с внешними умножениями

$$(a \cdot f)(s, t) = \int_G f(s, tg) da(g), \quad (f \cdot a)(s, t) = \int_G f(gs, t) da(g)$$

для всех $f \in SC_0(G \times G)$, $a \in M(G)$, причем норма в пространстве $SC_0(G \times G)$ равномерная. В случае дискретной группы G пространство $C_0(G)$ будем обозначать через $c_0(G)$, а пространство $SC_0(G \times G)$ через $sc_0(G \times G)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть G – локально компактная группа. Тогда морфизм $M(G)$ -бимодулей $\pi_*: C_0(G) \rightarrow SC_0(G \times G)$, $[\pi_*(a)](g, h) = a(gh)$ – допустимое вложение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко построить левый обратный непрерывный линейный оператор $s: SC_0(G \times G) \rightarrow C_0(G)$. Например, подойдет $[s(\varphi)](g) = \varphi(g, 1_G)$ или $[s(\varphi)](g) = \varphi(1_G, g)$, где 1_G – единица группы G , а $g \in G$ и $\varphi \in SC_0(G \times G)$ – произвольные элементы.

3. Неинъективность $l_1(G)(= M(G))$ -бимодуля $c_0(G)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – бесконечная дискретная группа. Тогда $l_1(G)$ -бимодуль $c_0(G)$ не инъективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – любая бесконечная счетная подгруппа группы G , например, подгруппа, порожденная любым бесконечным счетным подмножеством группы G . Выберем некоторое множество T представителей правых смежных классов G по H так, чтобы представителем класса H была единица 1_G группы G . Пусть $h_0 = 1_G$, а множество $H \setminus \{1_G\}$ занумеровано в последовательность $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$. Мы имеем следующие дизъюнктные разбиения:

$$G = \bigsqcup_{h \in H} hT = \bigsqcup_{h \in H} T^{-1}h = \bigsqcup_{t \in T} Ht = \bigsqcup_{t \in H} t^{-1}H.$$

Определим функцию $f: G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ условиями:

- 1) $f(g, h) = 0$, если $gh \notin H$;
- 2) если $gh = h_n$ и

$$g \in I_n = T \sqcup h_1T \sqcup h_2T \sqcup \dots \sqcup h_nT$$

или

$$h \in J_n = T^{-1} \sqcup T^{-1}h_1 \sqcup T^{-1}h_2 \sqcup \dots \sqcup T^{-1}h_n,$$

то $f(g, h) = 0$;

- 3) в противном случае $f(g, h) = 1$.

Пусть $E_1 \subset l^\infty(G \times G)$ – замкнутое подпространство таких ограниченных на декартовом произведении $G \times G$ функций $\varphi = \varphi(x, y)$, которые зависят только от произведения xy , причем $\varphi(x, y) = 0$, если $xy \notin H$. Тогда пространство E_1 изометрически изоморфно $l^\infty(H)$.

С помощью введенной выше функции f определим оператор умножения $\mu: \varphi \mapsto \varphi f$, действующий в пространстве $l^\infty(G \times G)$.

Проверим, что пространство $E = \mu(E_1)$ изометрически изоморфно E_1 и, следовательно, пространству $l^\infty(H)$. Действительно, пусть $\varphi \in E_1$; тогда $\|\mu(\varphi)\| = \|f\varphi\| \leq \|f\| \|\varphi\| = \|\varphi\|$. С другой стороны, легко проверить, что для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ найдутся такие натуральные $i(n), j(n) > n$, что $h_{i(n)}h_{j(n)} = h_n$.

Следовательно, для любого $\varphi \in E_1$ выполнено неравенство

$$\|\mu(\varphi)\| \geq \sup_{n \geq 0} |f(h_{i(n)}, h_{j(n)})\varphi(h_{i(n)}, h_{j(n)})| = \sup_{n \geq 0} |\varphi(h_{i(n)}, h_{j(n)})| = \|\varphi\|.$$

Теперь проверим, что $f \in sc_0(G \times G)$. Пусть $g \in G$ фиксировано. Тогда $g = h_it$ для некоторых $t \in T$ и $i \in \mathbb{Z}_+$. Если $gh \notin H$, то $f(g, h) = 0$. Пусть $gh \in H$. Тогда $gh = h_p$ для некоторого $p \in \mathbb{Z}_+$. Если $f(g, h) = 1$, то $p < i$ по определению f . Таким образом, $gh \in \{h_0, h_1, \dots, h_{i-1}\}$. Тогда $h \in \{g^{-1}h_0, g^{-1}h_1, \dots, g^{-1}h_{i-1}\}$. Поэтому $(f\varphi)(g, h)$ – финитная функция аргумента $h \in G$ при фиксированном $g \in G$. Для фиксированного $h \in G$ и переменного $g \in G$ аналогично. Следовательно, $f \in sc_0(G \times G)$.

Из того, что $f \in sc_0(G \times G)$, следует, что $E \subset sc_0(G \times G)$.

Легко проверить по определению f , что $\varphi_{h_k} = \mu(\pi_*(e_{h_k})) - \pi_*(e_{h_k})$ – характеристическая функция множества

$$\Delta_{h_k} = \{(g, h): gh = h_k\} \cap (I_n \times G) \cap (G \times J_n).$$

Пусть $\tau: sc_0(G \times G) \rightarrow c_0(G)$ – любой морфизм $l^1(G)$ -бимодулей. Предположим, что $g_0 \in H$. Докажем, что $\tau(\varphi_{h_k})(g_0) = 0$. Для произвольных $r_1, r_2, \dots, r_n \in H$ рассмотрим функцию

$$u = \sum_{i=1}^n e_{r_i^{-1}g_0} \cdot \varphi_{h_k} \cdot e_{r_i g_0^{-1}}.$$

Очевидно, мы имеем равенство

$$e_{r_i^{-1}g_0} \cdot \varphi_{h_k} \cdot e_{r_i g_0^{-1}}(g, h) = \varphi_{h_k}(r_i g_0^{-1}g, h r_i^{-1}g).$$

Непосредственно проверяется, что $e_{r_i^{-1}g_0} \cdot \varphi_{h_k} \cdot e_{r_i g_0^{-1}}$ – характеристическая функция множества пар $(g, h) \in G \times G$, удовлетворяющих условиям

- 1) $r_i g_0^{-1}g h r_i^{-1}g_0 = h_k$;
- 2) $r_i g_0^{-1}g \in I_n$ или $h r_i^{-1}g_0 \in J_n$.

Из этих условий следует, что $g = g_0 r_i^{-1}h_k g_0^{-1}r_i h^{-1}$. А следовательно, мы имеем, что

$$\begin{aligned} g \in & g_0 r_i^{-1}T \cup g_0 r_i^{-1}h_1 T \cup g_0 r_i^{-1}h_2 T \cup \dots \cup g_0 r_i^{-1}h_k T \\ & \cup g_0 r_i^{-1}h_k T \cup g_0 r_i^{-1}h_k h_1^{-1}T \cup \dots \cup g_0 r_i^{-1}h_k h_k^{-1}T. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что для любого натурального n найдутся такие $r_1, r_2, \dots, r_n \in H$, что множества

$$\{g_0 r_i^{-1}, g_0 r_i^{-1}h_1, \dots, g_0 r_i^{-1}h_k, g_0 r_i^{-1}h_k h_1^{-1}, \dots, g_0 r_i^{-1}h_k h_k^{-1}\}$$

попарно не пересекаются при разных $i = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, $\|u\| = 1$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \tau(u)(g_0) &= \sum_{i=1}^n e_{r_i^{-1}g_0} \cdot \tau(\varphi_{h_k}) \cdot e_{r_i g_0^{-1}}(g_0) \\ &= \sum_{i=1}^n \tau(\varphi_{h_k})(r_i g_0^{-1}g_0 r_i^{-1}g_0) = n\tau(\varphi_{h_k})(g_0). \end{aligned}$$

Следовательно, $\|\tau(\varphi_{h_k})(g_0)\| \leq \|\tau(u)\|/n \leq \|\tau\|\|u\|/n$ для любого n . Поэтому $\tau(\varphi_{h_k})(g_0) = 0$. Из этого следует, что $\tau(\mu(\pi_*(x)))(h) = \tau(\pi_*(x))(h)$ для всех $x \in c_0(H)$ и всех $h \in H$.

Предположим, что существует левый обратный морфизм бимодулей $\sigma: sc_0(G \times G) \rightarrow c_0(G)$ к морфизму π_* . Пусть $\mu_1: sc_0(G \times G) \rightarrow sc_0(G \times G)$ определен формулой $\mu_1(\varphi) = \mu(\varphi)$ для всех $\varphi \in sc_0(G \times G)$. Очевидно, что $\mu_1 \circ \pi_*$ осуществляет изометрический изоморфизм подпространства $c_0(H) \subset c_0(G)$ на подпространство $\mu_1 \circ \pi_*(c_0(H))$ пространства E .

Этот изоморфизм согласован с изоморфизмом $l^\infty(H) \cong E$ и с вложением $c_0(H) \subset l^\infty(H)$. Пусть оператор $S: E \rightarrow c_0(H)$ определен формулой $S(\varphi)(h) = \sigma(\varphi)(h)$ для всех $\varphi \in E$. Тогда для всех $x \in c_0(H)$

$$S(\mu_1 \circ \pi_*(x)) = \sigma \circ \pi_*(x) = x.$$

Поэтому получаем, что $c_0(H)$ – дополняемое подпространство $l^\infty(H)$, что противоречит теореме Филлипса ([18]). Следовательно, морфизм π_* не имеет левого обратного морфизма бимодулей, и бимодуль $c_0(G)$ не инъективен.

ПРИМЕР. Для $G = \mathbb{Z}$ доказательство можно провести более просто и естественно, причем главная идея проявляется уже в этом случае. Вместо функции $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ из доказательства предыдущей теоремы можно взять $f(i, j) = 0$, если $|i| > j^2 + 1$ или $|j| > i^2 + 1$, и $f(i, j) = 1$ в противном случае. Очевидно, $f \in sc_0(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$. Множество Δ_r здесь – это множество точек прямой $i + j = r$, лежащих внутри какой-либо параболы $i = j^2 + 1$, $-i = j^2 + 1$, $j = i^2 + 1$ или $-j = i^2 + 1$ (см. рис.).

4. Некоторая нормальная виртуальная диагональ для алгебры $M(G)$ ($= l_1(G)$) для дискретной аменабельной группы G . Рассмотрим еще один вариант аменабельности дуальных банаховых алгебр. Пусть A – дуальная банахова алгебра, X – дуальный банахов A -модуль. Элемент $x \in X$ называется *нормальным*, если слабо* непрерывны отображения $A \rightarrow X: a \mapsto a \cdot x, x \cdot a$. Дуальная банахова алгебра A называется *сильно аменабельной по Конну* [6], если любое слабо* непрерывное дифференцирование A в любой дуальный бимодуль, образ которого состоит из нормальных элементов, является внутренним. Очевидно, сильно аменабельная по Конну алгебра является аменабельной по Конну. Дуальное отображение $(\pi_*)^*: B_*^2(A)^* \rightarrow A$ обозначим через π_0 . Элемент $M \in B_*^2(A)^*$ называется *нормальной виртуальной диагональю* [6], если

- 1) $\pi_0(M)$ – единица алгебры A ;
- 2) $M \cdot a = a \cdot M$ для всех $a \in A$.

Наличие нормальной виртуальной диагонали означает в точности, что в A есть единица и π_0 имеет правый обратный морфизм бимодулей. Известно, что дуальная банахова алгебра сильно аменабельна по Конну $\iff$ она имеет нормальную виртуальную диагональ ([8, с. 90], [6]). Алгебра, аменабельная по Конну, всегда имеет единицу (см. [6]).

Очевидно, что если A имеет единицу и предуальный бимодуль A_* инъективен, то A сильно аменабельна по Конну. Хорошо известно, что аменабельная по Конну алгебра фон Ноймана имеет нормальную виртуальную диагональ [4], [19]. Недавно доказано, что аменабельная по Конну алгебра мер $M(G)$ также имеет нормальную виртуальную диагональ [20]. Ни одного примера аменабельной по Конну, но не сильно аменабельной по Конну алгебры не известно. Ниже дано новое простое доказательство теоремы о том, что для дискретных аменабельных групп алгебра мер аменабельна по Конну (оригинальное доказательство [7, Corollary 5.4] использует сильное средство – теорему Джонсона–Рингроуза).

ТЕОРЕМА 2 (Рунде). *Если G – дискретная аменабельная группа, то алгебра $M(G) (= l_1(G))$ имеет нормальную виртуальную диагональ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На пространстве $l^\infty(G)$ всех ограниченных функций на группе G существует левое инвариантное среднее m . Рассмотрим оператор $P: sc_0(G \times G) \rightarrow l^\infty(G)$, определенный формулой $[P(\varphi)](g) = \varphi(g, g^{-1})$. Пусть $M = m \circ P$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle e_g * M, \varphi \rangle &= \langle M, \varphi * e_g \rangle = \langle m, P(\varphi * e_g) \rangle = \langle m, P(e_g * \varphi) \rangle \\ &= \langle M, e_g * \varphi \rangle = \langle M * e_g, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Кроме того, $\langle \pi_0(M), e_g \rangle = \langle M, \pi_*(e_g) \rangle = 1$, если $g = 1_G$, где 1_G – единица группы G , и 0, если $g \neq 1_G$. Поэтому $\pi_0(M) = e$ – единица алгебры $M(G)$, а M – нормальная виртуальная диагональ.

Доказательство Рунде [7] аменабельности группы G из аменабельности по Конну алгебры $M(G)$ было бы заметно проще, если бы бимодуль $B_*^2(M(G))$ был нормальным (ср. [16, замечание на с. 1688], для случая алгебр фон Ноймана). Однако это не всегда так, как показывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. $l_1(\mathbb{Z})$ -бимодуль $sc_0(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^*$ не является нормальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $f \in sc_0(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ определена условиями $f(i, j) = 0$, если $|j| > i^2 + 1$ или $|i| > j^2 + 1$ и $f(i, j) = 1$ в противном случае. Пусть оператор $P: sc_0(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow l^\infty(\mathbb{Z})$ определен по формуле $[P(\varphi)](i) = \varphi(i, -i)$, а функционал $m: l^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$ – инвариантное среднее. Тогда $M = m \circ P \in sc_0(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^*$ – нормальная виртуальная диагональ из доказательства предыдущей теоремы.

Пусть $e_n \in l_1(\mathbb{Z})$. Тогда e_n слабо* сходится к нулю. С другой стороны, $\langle e_n \cdot M, f \rangle = \langle M, f \cdot e_n \rangle = 1$ для всех n . Поэтому $e_n \cdot M$ не сходится к нулю в слабой* топологии $sc_0(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^*$, т.е. M не будет нормальным элементом бимодуля $sc_0(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^*$. Следовательно, этот бимодуль не является нормальным.

Автор благодарен А. Я. Хелемскому за интерес к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Johnson B. E. Cohomology in Banach algebras // Mem. Amer. Math. Soc. 1972. V. 127.
- [2] Runde V. Lectures on Amenability. Lecture Notes in Math. V. 1774. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- [3] Connes A. On the Cohomology of Operator Algebras // J. Funct. Anal. 1978. V. 28. P. 248–253.
- [4] Haagerup U. All nuclear algebras are amenable // Invent. Math. 1985. V. 74. P. 305–316.
- [5] Bunce J. W., Paschke W. L. Quasi-expectations and amenable von Neumann algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. V. 71. P. 232–236.
- [6] Runde V. Amenability for dual Banach algebras // Studia Math. 2001. V. 148. P. 47–66.
- [7] Runde V. Connes-amenability and normal, virtual diagonals for measure algebras. Pdf-file, 2001.
- [8] Corach G., Galé J. E. Averaging with virtual diagonals and geometry of representations // Banach Algebras '97 / ed. E. Albrecht, M. Mathieu: Walter de Gruyter, 1998. P. 87–100.
- [9] Dales H. G., Ghahramani F., Helemskii A. Ya. The amenability of measure algebras // J. London Math. Soc. (2). 2002. V. 66. № 1. P. 213–226.
- [10] Wassermann S. On Tensor products of certain group C^* -algebras // J. Funct. Anal. 1976. V. 23. P. 239–254.
- [11] Johnson B. E., Kadison R. V., Ringrose J. Cohomology of operator algebras. III // Bull. Soc. Math. France. 1972. V. 100. P. 73–96.
- [12] Johnson B. E., Kadison R. V., Ringrose J. Cohomology of operator algebras. I. Type I von Neumann algebras // Acta Math. 1976. V. 126. P. 227–243.
- [13] Johnson B. E., Kadison R. V., Ringrose J. Cohomology of operator algebras. II // Ark. Math. 1971. V. 9. P. 55–63.
- [14] Elliott G. A. On approximately finite-dimensional von Neumann algebras. II // Canad. Math. Bull. 1978. V. 21. P. 415–418.
- [15] Connes A. Classification of injective factors // Ann. of Math. 1976. V. 104. № 1. P. 73–115.
- [16] Хелемский А. Я. Гомологическая сущность аменабельности по Конну – инъективность предуального бимодуля // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 12. С. 1680–1690.
- [17] Хелемский А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: Изд. МГУ, 1986.
- [18] Phillips R. S. On linear transformations // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. V. 48. P. 516–541.
- [19] Effros E. G. Amenability and virtual diagonals for von Neumann algebras // J. Funct. Anal. 1988. V. 78. P. 137–153.
- [20] Runde V. Connes-amenability and normal, virtual diagonals for measure algebras. II. Pdf-file, 2001.