Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Тимофеева, Многообразия полных пар нульмерных подсхем длины ≥ 2 и ≥ 4 алгебраической поверхности, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 743–752

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm224>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:12:35

УДК 517.2

МНОГООБРАЗИЯ ПОЛНЫХ ПАР НУЛЬМЕРНЫХ ПОДСХЕМ ДЛИНЫ ≥ 2 И ≥ 4 АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Н. В. Тимофеева

В статье доказано, что многообразия $X_{d_1 d_2}$ полных пар нульмерных подсхем длин $d_1 \geq 2$, $d_2 \geq 4$ на гладкой неприводимой проективной алгебраической поверхности являются особыми.

Библиография: 4 названия.

0. Введение. Целью настоящей заметки является изучение вопроса о гладкости (или особенности) при $d_1 \geq 2$, $d_2 \geq 4$ многообразий полных пар $X_{d_1 d_2}$ нульмерных подсхем гладкой неприводимой проективной алгебраической поверхности. Многообразие $X_{d_1 d_2}$ полных пар 0-подсхем длины d_1 и d_2 поверхности было построено А. С. Тихомировым в его работе [1].

Пусть S – гладкая неприводимая проективная алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики, и H_d – схема Гильберта нульмерных подсхем длины d в S , где длина нульмерной подсхемы Z определяется как эйлерова характеристика ее структурного пучка: $l(Z) = \chi(\mathcal{O}_Z)$. Образует произведение $H_{d_1} \times H_{d_2}$ и рассмотрим в нем график инцидентности

$$\Gamma_{d_1 d_2} = \{(z_1, z_2) \in H_{d_1} \times H_{d_2} \mid Z_{d_1} \cap Z_{d_2} \neq \emptyset\}$$

со структурой приведенной подсхемы. Здесь z_d означает точку в схеме Гильберта H_d , $d = d_1, d_2$, соответствующую подсхеме Z_d длины d на поверхности S .

Рассмотрим, следуя [1], бирациональный морфизм сложения наборов точек

$$\phi_{d_1 d_2} : H_{d_1} \times H_{d_2} \dashrightarrow H_{d_1 + d_2},$$

корректно определенный на открытых подмножествах схем Гильберта H_{d_1} и H_{d_2} . Если подсхемы длин d_1 и d_2 представлены соответственно непересекающимися наборами из d_1 и d_2 различных точек $Z_{d_1} = \{p_1, p_2, \dots, p_{d_1}\}$, $Z_{d_2} = \{q_1, q_2, \dots, q_{d_2}\}$, то образ $\phi_{d_1 d_2}(z_{d_1}, z_{d_2})$ представлен их теоретико-множественным объединением $\{p_1, p_2, \dots, p_{d_1}, q_1, q_2, \dots, q_{d_2}\}$.

Следуя [1], назовем *многообразием полных пар* $X_{d_1 d_2}$ раздутие $H_{d_1} \times H_{d_2}$ с центром $\Gamma_{d_1 d_2}$, и пусть $\sigma : X_{d_1 d_2} \rightarrow H_{d_1} \times H_{d_2}$ – соответствующий морфизм раздутия.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS, грант № INTAS-OPEN-2000-269.

Так как $\text{codim } \Gamma_{d_1 d_2} = 2$, то

$$D := \{(z_{d_1}, z_{d_2}) \in H_{d_1} \times H_{d_2} \mid \text{Supp } Z_{d_1} \cap \text{Supp } Z_{d_2} = \emptyset\}$$

– плотное открытое множество в $X_{d_1 d_2}$, и $\dim T_{(z_{d_1}, z_{d_2}, z_{d_1+d_2})} X_{d_1 d_2} = 2(d_1 + d_2)$ для $(z_{d_1}, z_{d_2}) \in D$.

Согласно [1] многообразие $X_{d_1 d_2}$ совпадает с замыканием в произведении $H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_{d_1+d_2}$ открытого множества

$$\{(z_{d_1}, z_{d_2}, z_{d_1+d_2}) \mid Z_{d_1} = \{p_1, p_2, \dots, p_{d_1}\}, Z_{d_2} = \{q_1, q_2, \dots, q_{d_2}\}, \\ z_{d_1+d_2} = \phi_{d_1 d_2}(z_{d_1}, z_{d_2})\},$$

причем проекция $p: H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_{d_1+d_2} \rightarrow H_{d_1} \times H_{d_2}$, ограниченная на подмногообразии $X_{d_1 d_2}$, совпадает с морфизмом стягивания σ . Многообразие $X_{d_1 d_2}$ вместе с морфизмом σ разрешает бирациональный морфизм $\phi_{d_1 d_2}$ в следующем смысле: это значит, что существует единственный морфизм $\tilde{\phi}: X_{d_1 d_2} \rightarrow H_{d_1+d_2}$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & X_{d_1 d_2} & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \tilde{\phi} \\ H_{d_1} \times H_{d_2} & \xrightarrow{\phi_{d_1 d_2}} & H_{d_1+d_2} \end{array}.$$

Чтобы проверить гладкость (или установить особость) исследуемого многообразия $X_{d_1 d_2}$, достаточно вычислить размерность его касательного пространства в наиболее специальных точках $(z_{d_1}, z_{d_2}, z_{d_1+d_2})$. Для этого применяется, с небольшими изменениями, техника, использованная автором этой статьи в работе [2] для доказательства гладкости многообразия X_{23} полных пар 0-подсхем гладкой поверхности. Базовый случай для настоящей работы – многообразие X_{24} .

1. Касательное пространство. Пусть Z_{d_1} задается в аффинной окрестности $U = \text{Spec } R \subset \mathcal{S}$ носителя $\text{Supp } Z_{d_1}$ идеалом I_{d_1} , Z_{d_2} – идеалом I_{d_2} , $Z_{d_1+d_2}$ – идеалом $I_{d_1+d_2}$. Имеют место следующие отношения включения [2]:

$$I_{d_1} I_{d_2} \subset I_{d_1+d_2} \subset I_{d_1} \cap I_{d_2}.$$

Искомое касательное пространство является подпространством в касательном пространстве к произведению

$$T_x(H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_{d_1+d_2}) = T_{z_{d_1}} H_{d_1} \oplus T_{z_{d_2}} H_{d_2} \oplus T_{z_{d_1+d_2}} H_{d_1+d_2}.$$

Касательное пространство $T_{z_d} H_d$ к схеме Гильберта изоморфно $\text{Hom}_R(I_d, R/I_d)$. Так как вопрос о гладкости локален, можно заменить поверхность $\mathcal{S}$ на аффинную окрестность $U \simeq \mathbf{A}^2 = \text{Spec } R$ носителя подсхем Z_{d_1} и Z_{d_2} на многообразии $\mathcal{S}$ и положить кольцо $R = \mathbb{C}[x, y]$, где x, y – локальные координаты в аффинной карте U . В дальнейшем будет удобно считать аффинное подмножество U вложенным в проективную плоскость $\mathbb{P}^2$.

Уравнения касательного пространства согласно рассуждениям в работе [2] задаются следующими условиями на элементы касательных пространств $T_{z_{d_1}}H_{d_1}$, $T_{z_{d_2}}H_{d_2}$, $T_{z_{d_1+d_2}}H_{d_1+d_2}$:

$$\begin{aligned} \forall \eta_{d_1+d_2} \in \text{Hom}_R(I_{d_1+d_2}, R/I_{d_1+d_2}), \quad \forall \eta_{d_1} \in \text{Hom}_R(I_{d_1}, R/I_{d_1}), \\ \forall \eta_{d_2} \in \text{Hom}_R(I_{d_2}, R/I_{d_2}), \quad \forall f \in I_{d_1+d_2}, \quad \forall f_{d_1} \in I_{d_1}, \quad \forall f_{d_2} \in I_{d_2}, \end{aligned}$$

$$\eta_{d_1+d_2}(f) - \eta_{d_1}(f) \equiv 0 \pmod{I_{d_1}}, \quad (1)$$

$$\eta_{d_1+d_2}(f) - \eta_{d_2}(f) \equiv 0 \pmod{I_{d_2}}, \quad (2)$$

$$f_{d_1}\eta_{d_2}(f_{d_2}) + \eta_{d_1}(f_{d_1})f_{d_2} - \eta_{d_1+d_2}(f_{d_1}f_{d_2}) \equiv 0 \pmod{I_{d_1+d_2}}. \quad (3)$$

2. Специализации. Будем считать, что многообразие S есть проективная плоскость $\mathbb{P}^2$. Если $(p_0 : p_1 : p_2)$ – однородные координаты в $\mathbb{P}^2$, то можно ввести в алгебре $\mathbb{C}[p_0 : p_1 : p_2]$ однородных многочленов действие одномерной группы тора, определяя его для любого элемента $\tau \in T$ на образующих p_0, p_1, p_2 следующим образом:

$$\tau * p_0 = p_0, \quad \tau * p_1 = tp_1, \quad \tau * p_2 = t^n p_2,$$

где n – параметр. Тогда имеется индуцированное действие тора T на множестве идеалов кольца $\mathbb{C}[p_0 : p_1 : p_2]$, и при $t \rightarrow 0$ произвольная тройка подсхем $(Z_{d_1}, Z_{d_2}, Z_{d_1+d_2})$ перейдет в тройку подсхем, заданных мономиальными идеалами, в силу следующего [2, лемма 1].

ЛЕММА. Пусть $I_1, I_2, \dots, I_l$ – набор идеалов, задающих подсхемы длины $d_1, d_2, \dots, d_l$ на проективной алгебраической поверхности S . Тогда существует (локально) такое действие одномерной диагональной подгруппы $T \simeq \mathbb{C}^*$ группы тора $\mathbb{C}^{*2} \subset \text{GL}(3)$ на S , что при индуцированном его действии на открытом подмножестве $H_{d_1} \times H_{d_2} \times \dots \times H_{d_l}$ предельная (неподвижная) точка соответствует набору подсхем, задаваемых мономиальными идеалами.

ПРИМЕР. В работе Ж. Бриансона [3] приведена аналитическая классификация нульмерных подсхем длин 4 и 6. Всякая 0-подсхема аналитически изоморфна подсхеме, задаваемой в аффинной карте U одним из следующих идеалов:

- идеалы подсхем длины 4:

$$(x^4, y), \quad (x^2, y^2), \quad (x^3, xy, y^2);$$

- идеалы подсхем длины 6:

$$\begin{aligned} (x^6, y), \quad (x^4 + y^2, xy), \quad (x^5, xy, y^2), \quad (x^2 + y^2, x^2y), \quad ((x+y)^2, x^2y), \\ (x^4, x^2y, y^2), \quad (x^4, x^2y, y^2 + xy), \quad (x^4, x^2y, x^3 + y^2), \quad (x^3, x^2y, xy^2, y^3). \end{aligned}$$

Все аналитические типы подсхем длины 4 задаются мономиальными подсхемами, которые, очевидно, неподвижны при действиях выбранного вида. Немономиальные аналитические типы подсхем длины 6 подходящим действием тора могут быть проспециализированы в мономиальные. В карте $p_0 \neq 0$, $x = p_1/p_0$, $y = p_2/p_0$ действие $x \mapsto x$, $y \mapsto ty$ при $t \rightarrow 0$ приводит к специализациям

$$(x^4 + y^2, xy) \rightarrow (x^4, xy, y^3), \quad (x^2 + y^2, x^2y) \rightarrow (x^2, y^3), \quad ((x + y)^2, x^2y) \rightarrow (x^2, xy^2, y^4), \\ (x^4, x^2y, y^2 + xy) \rightarrow (x^4, xy, y^3), \quad (x^4, x^2y, x^3 + y^2) \rightarrow (x^3, x^2y, xy^2, y^3).$$

Поэтому для анализа проблемы гладкости многообразия X_{24} надо обратиться к следующим тройкам подсхем:

A. $I_2 = (x, y^2), I_4 = (x, y^4),$

1) $I_6 = (x, y^6),$ 2) $I_6 = (x^2, xy, y^5),$ 3) $I_6 = (x^2, xy^2, y^4);$

B. $I_2 = (x, y^2), I_4 = (x^4, y),$

1) $I_6 = (x^5, xy, y^2),$ 2) $I_6 = (x^4, xy, y^3);$

C. $I_2 = (x, y^2), I_4 = (x^2, y^2),$

1) $I_6 = (x^3, y^2),$ 2) $I_6 = (x^2, xy^2, y^4),$ 3) $I_6 = (x^3, x^2y, y^2, y^3);$

D. $I_2 = (x, y^2), I_4 = (x^2, xy, y^3),$

1) $I_6 = (x^2, xy, y^5),$ 2) $I_6 = (x^3, xy, y^4),$ 3) $I_6 = (x^2, xy^2, y^4),$

4) $I_6 = (x^3, x^2y, xy^2, y^2),$ 5) $I_6 = (x^2, y^3);$

E. $I_2 = (x, y^2), I_4 = (x^3, xy, y^2),$

1) $I_6 = (x^3, xy, y^4),$ 2) $I_6 = (x^4, xy, y^3),$

3) $I_6 = (x^4, x^2y, y^2),$ 4) $I_6 = (x^3, x^2y, xy^2, y^3).$

Аналитическая замена $x \rightarrow y^3 - tx$, примененная к A.1), приводит к следующему семейству:

$$\mathcal{A}_t^{(1)} = \{(x, y^2), (y^3 - tx, y^4), (y^3 - tx, y^6)\}.$$

При $t \rightarrow 0$ имеем специализацию в тройку

$$\mathcal{A}_0^{(1)} = \{(x, y^2), (x^2, xy, y^3), (x^2, y^3)\},$$

т.е. тройку типа D.5). Та же замена, примененная к A.2), приводит к семейству

$$\mathcal{A}_t^{(2)} = \{(x, y^2), (y^3 - tx, y^4), ((y^3 - tx)^2, y(y^3 - tx), y^5)\}.$$

При $t \rightarrow 0$ имеем специализацию в

$$\mathcal{A}_0^{(2)} = \{(x, y^2), (x^2, xy, y^3), (x^2, xy^2, y^4)\},$$

т.е. в тройку типа D.3). Наконец, та же замена, примененная к A.3), приводит к семейству

$$\mathcal{A}_t^{(3)} = \{(x, y^2), (y^3 - tx, y^4), ((y^3 - tx)^2, y^2(y^3 - tx), y^4)\}$$

и специализации в

$$\mathcal{A}_0^{(3)} = \{(x, y^2), (x^2, xy, y^3), (x^2, xy^2, y^4)\},$$

т.е. в D.3).

Аналитическая замена $y \rightarrow x^2 - ty$, примененная к B.1), приводит к семейству

$$\mathcal{B}_t^{(1)} = \{(x, y^2), (x^4, x^2 - ty), (x^5, x(x^2 - ty), (x^2 - ty)^2)\}$$

и специализации в

$$\mathcal{B}_0^{(1)} = \{(x, y^2), (x^2, y^2), (x^3, x^2y, xy^2, y^3)\},$$

т.е. в C.3). Такая же замена, примененная к B.2), приводит к семейству

$$\mathcal{B}_t^{(2)} = \{(x, y^2), (x^4, x^2 - ty), (x^4, x(x^2 - ty), (x^2 - ty)^3)\}$$

и специализации в тройку

$$\mathcal{B}_0^{(2)} = \{(x, y^2), (x^2, y^2), (x^3, x^2y, xy^2, y^3)\}$$

типа C.3).

Замена $x \rightarrow y - tx$, примененная к C.1), приводит к семейству

$$\mathcal{C}_t^{(1)} = \{(y - tx, y^2), ((y - tx)^2, y^2), ((y - tx)^3, y^2)\}$$

и специализации в точку типа D.3):

$$\mathcal{C}_0^{(1)} = \{(x^2, y), (x^3, xy, y^2), (x^4, x^2y, y^2)\}.$$

Та же самая замена, примененная к C.2), приводит к семейству

$$\mathcal{C}_t^{(2)} = \{(y - tx, y^2), ((y - tx)^2, y^2), ((y - tx)^2, y^2(y - tx), y^4)\}$$

и специализации в точку типа D.3):

$$\mathcal{C}_0^{(2)} = \{(x^2, y), (x^3, xy, y^2), (x^4, x^2y, y^2)\}.$$

Такая же замена, примененная к C.3), приводит к семейству

$$\mathcal{C}_t^{(3)} = \{(y - tx, y^2), ((y - tx)^2, y^2), (x^3, x^2y, xy^2, y^3)\}$$

и специализации в точку типа D.4):

$$C_0^{(2)} = \{(x^2, y), (x^3, xy, y^2), (x^3, x^2y, xy^2, y^3)\}.$$

Аналитическая замена $y \rightarrow y^2 - tx$, примененная к D.1), приводит к семейству

$$D_t^{(1)} = \{(x, y^2), (x^2, xy, y^3), ((y^2 - tx)^2, y(y^2 - tx), y^5)\}$$

и специализации в

$$D_0^{(1)} = \{(x, y^2), (x^2, xy, y^3), (x^3, x^2y, xy^2, y^3)\}$$

(тип D.4)). Та же замена, примененная к D.2), порождает семейство

$$D_t^{(2)} = \{(x, y^2), (x^2, xy, y^3), ((y^2 - tx)^3, y(y^2 - tx), y^4)\}$$

и специализацию в

$$D_0^{(2)} = \{(x, y^2), (x^2, xy, y^3), (x^3, x^2y, xy^2, y^3)\}$$

(тип D.4)). Такая же замена, примененная к D.5), порождает семейство

$$D_t^{(5)} = \{(x, y^2), (x^2, xy, y^3), ((y^2 - tx)^2, y^3)\}$$

и специализацию в

$$D_0^{(5)} = \{(x, y^2), (x^2, xy, y^3), (x^3, x^2y, xy^2, y^3)\}$$

(тип D.4)).

Замена $x \rightarrow tx - y$, примененная к E.1), порождает семейство

$$\mathcal{E}_t^{(1)} = \{(tx - y, y^2), (x^3, xy, y^2), ((tx - y)^3, (tx - y)y, y^4)\}$$

и специализацию в

$$\mathcal{E}_0^{(1)} = \{(x^2, y), (x^3, xy, y^2), (x^4, x^2y, y^2)\}$$

(тип D.3)). Та же замена в E.2) и E.3) приводит к семействам

$$\mathcal{E}_t^{(2)} = \{(tx - y, y^2), (x^3, xy, y^2), ((tx - y)^4, (tx - y)y, y^3)\},$$

$$\mathcal{E}_t^{(3)} = \{(tx - y, y^2), (x^3, xy, y^2), ((tx - y)^4, (tx - y)^2y, y^2)\}$$

и специализации в ту же точку

$$\mathcal{E}_0^{(2)} = \mathcal{E}_0^{(3)} = \{(x^2, y), (x^3, xy, y^2), (x^4, x^2y, y^2)\}.$$

Наконец, такая же замена в E.4) порождает семейство

$$\mathcal{E}_t^{(4)} = \{(tx - y, y^2), (x^3, xy, y^2), (x^3, x^2y, xy^2, y^3)\}$$

и специализацию в точку D.4):

$$\mathcal{E}_0^{(4)} = \{(x^2, y), (x^3, xy, y^2), (x^3, x^2y, xy^2, y^3)\}.$$

Итак, для решения вопроса о гладкости (или особенности) многообразия пар X_{24} достаточно изучить точки типов D.3) и D.4). Для доказательства того, что исследуемое многообразие особо, достаточно доказать особость одной из этих точек.

3. Вычисление в точке D.4). Вычислим, пользуясь линейными условиями (1)–(3), уравнения касательного пространства к многообразию X_{24} в точке D.4). Для этого нам потребуются базисы касательных пространств T_2, T_4, T_6 к схемам Гильберта H_2, H_4, H_6 в точках, соответствующих точке D.4) многообразия X_{24} .

Базис пространства T_2 образован гомоморфизмами $f_i^j: I_2 \rightarrow R/I_2$, заданными своими значениями на образующих идеала I_2 :

$$f_x^1: \begin{bmatrix} x \\ y^2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \quad f_x^y: \begin{bmatrix} x \\ y^2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \quad f_{y^2}^1: \begin{bmatrix} x \\ y^2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix}, \quad f_{y^2}^y: \begin{bmatrix} x \\ y^2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{y} \end{bmatrix}.$$

Произвольный вектор $\eta_2 \in T_2$ представлен линейной комбинацией

$$T_2 \ni \eta_2 = \sum z_i^j f_i^j, \quad z_i^j \in k, \quad i \in \{x, y^2\}, \quad j \in \{1, y\}.$$

Базис пространства T_4 образован следующими гомоморфизмами $g_i^j: I_4 \rightarrow R/I_4$:

$$\begin{aligned} g_{x^2}^x: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^3 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \quad g_{x^2}^{y^2}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \bar{y}^2 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \\ g_{xy}^x: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^3 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{x} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \quad g_{xy}^y: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{y} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \quad g_{xy}^{y^2}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{y}^2 \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \\ g_{y^3}^x: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^3 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{x} \end{bmatrix}, \quad g_{y^3}^y: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{y} \end{bmatrix}, \quad g_{y^3}^{y^2}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{y}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Произвольный вектор $\eta_4 \in T_4$ представлен линейной комбинацией

$$T_4 \ni \eta_4 = \sum b_i^j g_i^j, \quad b_i^j \in k, \quad i \in \{x^2, xy, y^2\}, \quad j \in \{x, y, y^2\}.$$

Базис пространства T_6 образован гомоморфизмами $\varphi_i^j: I_6 \rightarrow R/I_6$, определенными своими значениями на образующих $l \in \{x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$:

$$\varphi_i^j(l) = \begin{cases} \bar{j}, & \text{если } k = i, \\ \bar{0} & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad i \in \{x^3, x^2y, xy^2, y^3\}, \quad j \in \{x^2, xy, y^2\}.$$

Произвольный вектор $\eta_6 \in T_6$ представлен линейной комбинацией

$$T_6 \ni \eta_6 = \sum a_i^j \varphi_i^j, \quad a_i^j \in k.$$

Подстановка векторов η_2, η_4, η_6 в условия (1)–(3) приводит к одиннадцати линейно независимым уравнениям:

$$\begin{aligned} a_{x^3}^{y^2} &= 0, \quad a_{x^2y}^{y^2} = 0, \quad a_{xy^2}^{y^2} - b_{xy}^y = 0, \quad a_{y^3}^{y^2} - b_{y^3}^{y^2} = 0, \quad b_{y^3}^y = 0, \quad z_x^1 + b_{x^2}^x - a_{x^3}^{x^2} = 0, \\ a_{x^3}^{xy} &= 0, \quad z_{y^2}^1 = 0, \quad z_x^1 + b_{xy}^y - a_{x^2y}^{xy} = 0, \quad b_{xy}^x - a_{x^2y}^{x^2} = 0, \quad b_{y^3}^x = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Наличие одиннадцати (а не двенадцати) уравнений касательного пространства в данной точке означает, что либо полученная система неполна, и существует еще одно уравнение, либо многообразие в этой точке особо. Оказывается, имеет место второй случай.

Известно [4, добавление к лекции 4], что для всякой схемы X над полем k существует биекция

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Спес} D, X)|^x \simeq T_x X, \quad (5)$$

где $\mathrm{Hom}(\mathrm{Спес} D, X)|^x$ – подмножество, состоящее из морфизмов спектра кольца дуальных чисел $D = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ в схему X , образ которых есть точка $x \in X$, $T_x X$ – касательное пространство к схеме X в точке x . Множество $\mathrm{Hom}(\mathrm{Спес} D, X)|^x$ обладает структурой векторного пространства, и (5) – изоморфизм векторных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Деформация первого порядка* (или *инфинитезимальная деформация*) подсхемы Z – это семейство $Z_\varepsilon \subset U \times \mathrm{Спес} D$, плоское над $\mathrm{Спес} D$ и такое, что его слой над приведенной точкой $\mathrm{Спес} k \in \mathrm{Спес} D$ равен Z .

Тогда векторы касательного пространства к схеме Гильберта H_d в ее точке z естественно отождествить с деформациями первого порядка подсхемы Z , а векторы касательного пространства к многообразию пар X_{24} – с деформациями первого порядка тройки подсхем $\mathbb{Z} = (Z_2, Z_4, Z_6)$, отвечающей точке многообразия X_{24} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Инфинитезимальная деформация $\mathbb{Z}_\varepsilon \in T_{\mathbb{Z}}(H_2 \times H_4 \times H_6)$ *продолжаема в многообразии* $X_{d_1 d_2}$, если найдется такое семейство $\mathbb{Z}_t \subset U \times U \times U \times \mathrm{Спес} k[t]$, плоское над $\mathrm{Спес} k[t]$, что слой семейства $\mathbb{Z}_t$ над точкой $\mathrm{Спес} k(t) \in \mathrm{Спес} k[t]$ суть тройка подсхем $(Z_{d_1, t}, Z_{d_2, t}, Z_{d_1 + d_2, t})$, соответствующая точке многообразия $X_{d_1 d_2}$, и имеет место расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_\varepsilon & \hookrightarrow & U \times U \times U \times \mathrm{Спес} D \\ \phi_{\mathbb{Z}} \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbb{Z}_t & \hookrightarrow & U \times U \times U \times \mathrm{Спес} k[t] \end{array},$$

в котором вертикальные морфизмы индуцированы гомоморфизмом колец $\phi^\# : k[t] \rightarrow D$, $t \mapsto \varepsilon$. При этом будем называть семейство $\mathbb{Z}_\varepsilon$ *дифференциалом* семейства $\mathbb{Z}_t$.

Известно, что всякая инфинитезимальная деформация тройки $\mathbb{Z} \in H_2 \times H_4 \times H_6$, продолжаемая в многообразии X_{24} , лежит в касательном пространстве к X_{24} .

Для доказательства особенности многообразия в исследуемой точке надо проверить, продолжаема ли всякая инфинитезимальная деформация, удовлетворяющая полученной системе уравнений, т.е. указать набор деформаций с тринадцатью линейно независимыми дифференциалами:

1. $\mathbb{Z}_t = \{(x - t, y^2), (x^2, xy, y^3), (x^2(x - t), x^2y, xy^2, y^3)\},$
2. $\mathbb{Z}_t = \{(x, y^2), (x(x - t), xy, y^3), (x^2(x - t), x(x - t)y, xy^2, y^3)\},$
3. $\mathbb{Z}_t = \{(x - t, y(y - t)), (x^2 - ty^2, xy), ((x - t)(x^2 - ty^2), x(x - t)y, xy(y - t))\},$
4. $\mathbb{Z}_t = \{(x - ty, y^2), (x^2, xy, y^3), (x^3, x^2y, xy^2, y^3)\},$
5. $\mathbb{Z}_t = \{(x, y^2), (x^2, xy, y^2(y - t)), (x^3, x^2y, xy^2, y^2(y - t))\},$

6. $\mathbb{Z}_t = \{(x, y(y-t)), (x^2, x(y-t), y^2(y-t)), (x^3, x^2(y-t), xy(y-t), y^2(y-t))\},$
7. $\mathbb{Z}_t = \{(x, y^2), (x(x-t), (x-t)y, y^3), (x^2(x-t), x(x-t)y, (x-t)y^2, y^3)\},$
8. $\mathbb{Z}_t = \{(x, y^2), (x(x-ty), (x-ty)y, y^3), (x^2(x-ty), x(x-ty)y, (x-ty)y^2, y^3)\}$
 $= \{(x, y^2), (x^2 - t^2 y^2), (x-ty)y, y^3\}, (x^3, x^2 y, xy^2, y^3\},$
9. $\mathbb{Z}_t = \{(x, y^2), (x^2, xy, y^3 - tx^2), (x^3, x^2 y, xy^2, y^3 - tx^2)\}$
 $= \{(x, y^2), (x^2, xy, y^3), (x^3, x^2 y, xy^2, y^3 - tx^2)\}.$

Для того чтобы доказать, что всякий член этого семейства лежит в многообразии X_{24} , достаточно рассмотреть семейство

$$\{(x-ay, (y-A)y), ((x-ay)(x+ay), (y-A)(x-ay), y^3 - tx^2),$$

$$((x-ay)^2(x+ay), (x-ay)^2(y-A), (x-ay)y(y-A), y^3 - tx^2)\}, \quad A = ta^2.$$

При $a \rightarrow 0$ указанное семейство, каждый член которого принадлежит многообразию X_{24} , специализируется в семейство $\mathbb{Z}_t$. Далее,

10. $\mathbb{Z}_t = \{(x, y^2), (x^2, xy, y^3), (x(y^2 - tx), y^3)\},$
11. $\mathbb{Z}_t = \{(x, y^2), (x^2, xy, y^3), (x^3, x^2 y, xy^2, y(y^2 - tx))\}.$

Эта тройка при всех значениях t лежит в многообразии X_{24} , потому что является специализацией при $a \rightarrow 0$ семейства

$$\{(x, y^2), ((x-a)^2, (x-a)y, y(y-A)(y+A)),$$

$$(x(x-a)^2, x(x-a)y, (x-a)y^2, y(y^2 - tx))\}, \quad A^2 = at.$$

Наконец,

12. $\mathbb{Z}_t = \{(x, y^2), (x^2, xy, y^2(y-t)), (x^3, x^2 y, xy(y-t), y^2(y-t))\},$
13. $\mathbb{Z}_t = \{(x, y(y-t)), (x^2, xy, y^2(y-t)), (x^3, x^2 y, xy(y-t), y^2(y-t))\}.$

Выберем в качестве свободных переменных системы (4) следующие параметры:

$$z_x^1, z_x^y, z_{y^2}^y, b_{x^2}^x, b_{x^2}^{y^2}, b_{xy}^x, b_{xy}^y, b_{xy}^{y^2}, b_{y^3}^{y^2}, a_{xy^2}^x, a_{xy^2}^{xy}, a_{y^3}^x, a_{y^3}^{xy}. \quad (6)$$

Вычисляя дифференциалы семейств 1–13, нетрудно убедиться в том, что ранг матрицы их коэффициентов

$$\begin{bmatrix} z_x^1 & z_x^y & z_{y^2}^y & b_{x^2}^x & b_{x^2}^{y^2} & b_{xy}^x & b_{xy}^y & b_{xy}^{y^2} & b_{y^3}^{y^2} & a_{xy^2}^x & a_{xy^2}^{xy} & a_{y^3}^x & a_{y^3}^{xy} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

относительно выбранной системы параметров (6) равен 13. Тем самым, доказано, что многообразие пар X_{24} является особым. Принимая во внимание, что многообразия пар $X_{d_1 d_2}$ при $d_1 \geq 2$, $d_2 \geq 4$ содержат точки, отвечающие тройкам подсхем вида

$$\begin{aligned} Z_{d_1} &= \{(x, y^2)\} \cup \{p_3, \dots, p_{d_1}\}, & Z_{d_2} &= \{(x^2, xy, y^3)\} \cup \{q_5, \dots, q_{d_2}\}, \\ Z_{d_1+d_2} &= \{(x^3, x^2y, xy^2, y^3)\} \cup \{p_3, \dots, p_{d_1}\} \cup \{q_5, \dots, q_{d_2}\} \end{aligned}$$

имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА. *Многообразия полных пар $X_{d_1 d_2}$ нульмерных подсхем длины $d_1 \geq 2$, $d_2 \geq 4$ гладкой проективной алгебраической поверхности особы.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихомиров А. С. Многообразие полных пар нульмерных подсхем алгебраической поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 6. С. 153–180.
- [2] Тимофеева Н. В. Гладкость и эйлерова характеристика многообразия полных пар X_{23} нульмерных подсхем длины 2 и 3 алгебраической поверхности // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 2. С. 276–287.
- [3] Briançon J. Description de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$ // Invent. Math. 1977. V. 41. P. 45–89.
- [4] Мамфорд Д. Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М.: Мир, 1968.

Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского
E-mail: timof@yspu.yar.ru

Поступило
27.03.2002