Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Заболоцкий, Существование угловой плотности корней целых функций нулевого порядка, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 5, 698–703

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:50:09

УДК 517.53

СУЩЕСТВОВАНИЕ УГЛОВОЙ ПЛОТНОСТИ КОРНЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Н. В. Заболоцкий

Найдены достаточные условия при которых из сильной регулярности роста целых функций нулевого порядка вытекает существование угловой плотности их корней.

Библиография: 8 названий.

Пусть f – целая функция порядка ρ , $0 < \rho < \infty$, $f(0) = 1$, $\rho(r)$ – ее уточненный порядок, т.е.

- а) $\rho(r)$ – непрерывно дифференцируемая на $[0, +\infty)$ функция;
- б) $\rho(r) \rightarrow \rho$ при $r \rightarrow \infty$;
- в) $r\rho'(r) \ln r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$;
- г) $0 < \lim_{r \rightarrow \infty} T(r, f)/V(r) < +\infty$, где $V(r) = r^{\rho(r)}$.

Следуя Б. Я. Левину [1, с. 183], будем говорить, что функция f имеет *вполне регулярный рост* (ВРР) на луче $\arg z = \theta$, если существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty}^* \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{V(r)} = h_f(\theta),$$

где $\lim^*$ обозначает, что r стремится к бесконечности вне некоторого E^0 -множества. Под E^0 -множеством понимаем множество $E \subset \mathbb{R}$ такое, что $\text{mes}(E \cap [0, r]) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Функцию f будем называть *функцией ВРР*, если она является функцией ВРР во всей плоскости, т.е. при $0 \leq \theta < 2\pi$.

Пусть $n(r, \alpha, \beta)$ – число корней a_j функции f , лежащих в секторе $\{z : |z| \leq r, \alpha < \arg z \leq \beta\}$, $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$. Будем говорить [1, с. 118–119], что множество корней целой функции имеет *угловую плотность*, если величина

$$\Delta(\alpha, \beta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \alpha, \beta)}{V(r)} \quad (1)$$

существует для всех α, β за исключением, быть может, α или β , принадлежащих некоторому счетному множеству.

В [1, гл. 2, 3] дано полное описание целых функций ВРР. В частности, если ρ – нецелое число, то целая функция f является функцией ВРР тогда и только тогда, когда множество ее корней имеет угловую плотность. Более того, если f – функция ВРР, то можно установить асимптотическое поведение не только для функции $\ln |f(re^{i\theta})|$, но и для

функции $\arg f(z)$, т.е. можно получить асимптотическое представление функции $\ln f(z)$. Здесь и далее $\ln f$ однозначная ветвь $\operatorname{Ln} f$ в области $D = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \{z : |z| \geq |a_j|, \arg z = \arg a_j\}$, $\ln f(0) = 0$.

Если для целых функций нулевого порядка аналогично ввести понятие ВРР, то [2, с. 72] f является функцией ВРР тогда и только тогда, когда f имеет ВРР хотя бы на одном луче. Более того, тогда

$$h_f(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty}^* \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{V(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{V(r)} = K,$$

где

$$0 < K < +\infty, \quad N(r) = \int_1^r \frac{n(t, 0, 2\pi)}{t} dt.$$

Отсюда видим, что ВРР целой функции нулевого порядка не зависит от аргументов ее корней, а только от их модулей. Заметим [3, с. 228], что тогда величина $\Delta(\alpha, \beta) = 0$ для всех α и β , $0 < \alpha < \beta \leq 2\pi$.

В [4] введено новое понятие регулярности роста для целых функций нулевого порядка, которое обладает свойствами, похожими на те, которыми обладает понятие ВРР целых функций конечного ненулевого порядка.

Пусть f — целая функция нулевого порядка, $f(0) = 1$. Через $\lambda(r)$ обозначим уточненный порядок функции $n(r) = n(r, 0, 2\pi)$, т.е. функция $\lambda(r)$ удовлетворяет условиям а)–в) уточненного порядка с $\rho = 0$, и, кроме того:

- г) функция $v(r) = r^{\lambda(r)}$ не убывает и стремится к $+\infty$ при $r \rightarrow +\infty$;
- д) $0 < \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} n(r)/v(r) < +\infty$.

Не уменьшая общности, будем считать, что $v(r) = 0$ и $n(r) = 0$ для $0 \leq r \leq 1$. Назовем *обыкновенными* те лучи $\arg z = \theta$, которые удовлетворяют условию

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \theta - h, \theta + h)}{v(r)} \right\} = 0.$$

Все другие лучи мы будем называть *исключительными*. Из монотонности функции $\Delta(\theta)$ легко заключить, что если корни функции f имеют угловую плотность, то множество исключительных лучей не более чем счетно.

Определение угловой плотности корней целой функции f нулевого порядка вводим аналогично по формуле (1), где лишь вместо $V(r)$ ставим $v(r)$.

Будем говорить, что целая функция f нулевого порядка имеет на обыкновенном луче $\arg z = \theta$ *сильно регулярный рост* (СРР), если существует предел

$$H_f(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty}^* \frac{\ln f(re^{i\theta}) - N(r)}{v(r)}.$$

Функция f называется *функцией СРР на некотором множестве R_M , $M \subset [0, 2\pi)$, обыкновенных лучей*, если величина $H_f(r, \theta) = (\ln f(re^{i\theta}) - N(r))/v(r)$ стремится к $H_f(\theta)$ при $\theta \in M$, $r \rightarrow \infty$, $r \notin E_M$, $E_M \subset E^0$. При этом на любом замкнутом подмножестве M_0 множества M стремление переменной $H_f(r, \theta)$ к пределу $H_f(\theta)$ равномерно относительно θ .

Если целая функция f нулевого порядка имеет СРР на всех обыкновенных лучах $\arg z = \theta$, $-\pi \leq \theta < \pi$, то f будем называть *функцией СРР*.

В [4] показано, если f – целая функция нулевого порядка, множество корней которой имеет угловую плотность относительно функции $v(r)$, то функция f имеет СРР. Наоборот, пусть f – целая функция нулевого порядка СРР, нули которой находятся на конечном числе лучей. Тогда множество ее корней имеет угловую плотность.

Условие размещения корней на конечной системе лучей в последнем утверждении существенно. В общем случае из СРР целой функции, вообще говоря, не следует существование угловой плотности ее корней. Так в [5] доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\alpha(r)$ – непрерывная положительная возрастающая $\kappa + \infty$ на $[0, +\infty)$ функция. Тогда для произвольной возрастающей $\kappa + \infty$ на $[0, +\infty)$ функции $\beta(r)$ существуют целая функция f нулевого порядка и E^0 -множество E такие, что для почти всех $\theta \in [0, 2\pi)$ выполняется

$$\ln f(re^{i\theta}) = N(r) + o(\beta(r)), \quad r \rightarrow \infty, \quad r \notin E, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{\alpha(r)} = 1$$

и корни f не имеют угловой плотности относительно функции $\alpha(r)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть f – целая функция из теоремы А, $\lambda(r)$ – уточненный порядок считающей функции ее корней. Положив $\alpha(r) = v(r)$ из теоремы А получаем, что для почти всех θ , $0 \leq \theta < 2\pi$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty}^* \frac{\ln f(re^{i\theta}) - N(r)}{v(r)} = 0,$$

а корни f не имеют угловой плотности. Заметим, что для функции f предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{v_0(r)}$$

не существует, где

$$v_0(r) = \int_0^r \frac{v(t)}{t} dt.$$

Пусть $\lambda(r)$ – уточненный порядок такой, что

$$\frac{dv(r)}{d \ln r} \uparrow +\infty, \quad \frac{d \ln v(r)}{d \ln r} \leq \frac{d \ln v_0(r)}{d \ln r}. \quad (2)$$

Следующая теорема дает достаточное условие существования угловой плотности корней целых функций нулевого порядка, уточненный порядок $\lambda(r)$ считающей функции корней которой удовлетворяет условию (2).

ТЕОРЕМА. Пусть f – целая функция нулевого порядка, $\lambda(r)$ – уточненный порядок функции $n(r)$, удовлетворяющий условию (2). Если для почти всех θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, существует равномерный относительно θ предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty}^* \frac{\ln f(re^{i\theta}) - N(r)}{v(r)},$$

и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{v_0(r)} = K, \quad 0 < K < +\infty, \quad (3)$$

то корни f имеют угловую плотность.

При доказательстве этой теоремы будем использовать следующие утверждения.

ЛЕММА 1 [6]. Пусть f – целая функция, $f(0) = 1$, a_j – корни f , $\alpha_j = \arg a_j$. Обозначим

$$l_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \ln f(re^{i\theta}) d\theta, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n_k(r, f) = \sum_{|a_j| \leq r} e^{-ik\alpha_j}, \quad N_k(r, f) = \int_0^r \frac{n_k(t, f)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$N_k(r, f) = l_k(r, f) - k \int_0^r \frac{l_k(t, f)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Мы будем использовать широко известную теорему Каратеодори–Леви (см., например, [7, с. 98]), которую сформулируем в виде следующей леммы.

ЛЕММА 2. Пусть (S_n) – последовательность мер на единичной окружности, которую мы будем отождествлять с последовательностью неубывающих непрерывных справа на $\mathbb{R}$ функций, $S_n(x+2\pi) - S_n(x) = S_n(2\pi) - S_n(0)$, $x \in \mathbb{R}$. Положим

$$\Delta_k^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} dS_n(x), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Последовательность мер (S_n) на единичной окружности сходится тогда и только тогда, когда для всех $k \in \mathbb{Z}$ существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_k^n = \Delta_k.$$

Из теорем 5 и 6 работы [8] вытекает следующая

ЛЕММА 3. Пусть g – непрерывно дифференцируемая выпуклая на $[a, b)$ функция такая, что $g'(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow b$ и $\ln g(x)$ вогнутая. Тогда для произвольной выпуклой функции f из существования предела

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad 0 < K < +\infty,$$

вытекает существование предела

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Из определения коэффициентов Фурье $l_k(r, f)$ и условий теоремы для $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln f(re^{i\theta}) - N(r)}{v(r)} e^{-ik\theta} d\theta = \frac{l_k(r, f)}{v(r)}$$

и, следовательно, существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty}^* \frac{l_k(r, f)}{v(r)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta,$$

где $H_f(\theta)$ – функция из определения СРР. Так как [7, с. 89] $l_0(r, f) = N(r)$, из (3) получаем существование предела

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{l_0(r, f)}{v_0(r)}.$$

Из теоремы Лопиталя следует, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty}^* \frac{1}{v_0(r)} \int_0^r \frac{l_k(t, f)}{t} dt = \lim_{r \rightarrow \infty}^* \frac{l_k(r, f)}{v(r)}. \quad (4)$$

По лемме 1 имеем

$$\frac{N_k(t, f)}{v_0(r)} = \frac{l_k(r, f)}{v_0(r)} - \frac{k}{v_0(r)} \int_0^r \frac{l_k(t, f)}{t} dt. \quad (5)$$

Учитывая, что $v(r)/v_0(r) = rv'(r)/v(r) \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ (так как функция $v(r)$ медленно возрастающая), из (4) и (5) получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty}^* \frac{N_k(t, f)}{v_0(r)} = -k \lim_{r \rightarrow \infty}^* \frac{1}{v_0(r)} \int_0^r \frac{l_k(t, f)}{t} dt.$$

Используя рассуждения из [7, с. 143–144], имеем, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ существуют пределы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_k(t, f)}{v_0(r)}. \quad (6)$$

Положим $\alpha_\nu^{(m)} = \alpha_\nu + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, $\alpha_\nu^{(0)} = \alpha_\nu$, где $\alpha_\nu = \arg a_\nu$, a_ν – корни f . Равенства

$$\begin{aligned} s(r, \varphi) - s(r, a) &= 2\pi \sum_{a < \alpha_\nu^{(m)} \leq \varphi, |a_\nu| \leq r} 1, \\ s(r, \varphi + 2\pi) - s(r, \varphi) &= s(r, a + 2\pi) - s(r, a) \end{aligned}$$

определяют при всевозможных наборах чисел $a \in \mathbb{R}$ и значений $s(r, a)$ семейство мер $(s(r, \varphi))$ на единичной окружности. Обозначим

$$S(r, \varphi) - S(r, a) = \int_0^r \frac{s(t, \varphi) - s(t, a)}{t} dt.$$

Тогда для каждого $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ верны равенства [7, с. 105]

$$S(r, \varphi_0 + 2\pi) - S(r, \varphi_0) = S(r, a + 2\pi) - S(r, a) = 2\pi N(r),$$

$$n_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} e^{-ik\varphi} ds(r, \varphi), \quad (7)$$

$$N_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} e^{-ik\varphi} dS(r, \varphi). \quad (8)$$

По теореме Каратеодори–Леви из (6) и (8) получаем, что последовательность мер $S_n = S(r_n, \varphi)/v_0(r_n)$, где (r_n) – произвольная последовательность положительных чисел,

$r_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$, сходится на единичной окружности, т.е. для почти всех φ и a существуют пределы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r, \varphi) - S(r, a)}{v_0(r)}. \quad (9)$$

Поскольку, учитывая (2),

$$\frac{d^2 \ln v_0(r)}{(d \ln r)^2} = \frac{d}{d \ln r} \frac{v(r)}{v_0(r)} = \frac{rv(r)}{v_0(r)} \left(\frac{v'(r)}{v(r)} - \frac{v'_0(r)}{v_0(r)} \right) \leq 0,$$

функция $\ln v_0(r)$ является вогнутой относительно логарифма. Так как функции $S(r, \varphi) - S(r, a)$ и $v_0(r)$ выпуклые относительно логарифма, из (9) и леммы 3 получаем, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ существуют пределы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_k(r, f)}{v(r)}. \quad (10)$$

Используя еще раз теорему Каратеодори–Леви, из (7) и (10) имеем, что почти для всех φ и a существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{s(r, \varphi) - s(r, a)}{v(r)},$$

что доказывает теорему.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [2] Гольдберг А. А., Островский И. В. О производных и первообразных целых функций вполне регулярного роста // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. 1973. № 18. С. 70–81.
- [3] Гольдберг А. А., Заболоцкий Н. В. Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Матем. заметки. 1983. Т. 34. № 2. С. 227–236.
- [4] Заболоцкий Н. В. Сильно регулярный рост целых функций нулевого порядка // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 2. С. 196–208.
- [5] Zabolotskii N. V. An example of an entire function of strongly regular growth // Math. Stud. 2000. V. 13. № 2. P. 145–148.
- [6] Калинець Р. З., Кондратюк А. А. Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $L^p_{[0, 2\pi]}$ -метриці // Укр. матем. ж. 1998. Т. 50. № 7. С. 889–896.
- [7] Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. Львов: Вища школа, 1988.
- [8] Братищев А. В. Об обращении правила Лопиталья // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. гос. ун-та, 1985. С. 28–42.

Львовский государственный университет, Украина
E-mail: ttj@franko.lviv.ua

Поступило
20.06.2001
Исправленный вариант
12.04.2002