Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Е. Анно, Четырехмерные терминальные горенштейновы факторособенности, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 6, 813–820

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm226>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:28:17

УДК 512.5

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ТЕРМИНАЛЬНЫЕ ГОРЕНШТЕЙНОВЫ ФАКТОРОСОБЕННОСТИ

Р. Е. Анно

В настоящей работе классифицированы все конечные подгруппы $G \subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ такие, что фактор $\mathbb{C}^4$ по действию G имеет только изолированные терминальные горенштейновы особенности.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Пусть (X, p) – росток изолированной особенности. Говорят, что особенность *терминальна*, если mK_X является дивизором Картье для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и для любого разрешения $f: Y \rightarrow X$ выполнено

$$K_Y \equiv f^*K_X + \sum a_i E_i,$$

где E_i – исключительные дивизоры f , а все a_i больше 0 (см., например, [1]–[3]).

Многообразия с не более чем терминальными особенностями являются минимальным расширением класса гладких многообразий, замкнутым относительно программы минимальных моделей.

Терминальные факторособенности интенсивно изучались в работах [1], [3]–[5]. Трехмерные терминальные факторособенности полностью классифицированы (см. [1], [3]). В работе [4] классифицированы циклические терминальные горенштейновы факторособенности в размерности 4.

Терминальные факторособенности – достаточно узкий класс особенностей. Однако он довольно удобен для проверки различных гипотез (см. [5]).

В настоящей работе будет доказана (см. пп. 2–5) следующая

ТЕОРЕМА 1.1. *Если конечная подгруппа $G \subset \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ такова, что фактор $\mathbb{C}^4$ по ее действию имеет только терминальные горенштейновы особенности, то имеет место один из следующих случаев:*

- 1) группа G циклическая, и образующий элемент имеет собственные значения $\zeta, \zeta^{-1}, \zeta^a, \zeta^{-a}$, где a взаимно просто с порядком G (см. [4]);
- 2) группа G изоморфна одной из следующих подгрупп $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$: $\tilde{D}_n, \tilde{A}_4, \tilde{S}_4, \tilde{A}_5$, а представление есть сумма двух изоморфных неприводимых двумерных представлений;

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 02-01-00441, и гранта INTAS-OPEN-2000-269.

- 3) группа G изоморфна $(\mu_n \times G')/\{(1, 1); (-1, -1)\}$, где G' – одна из групп, перечисленных в предыдущих пунктах, n взаимно просто с порядком G' , представление есть сумма двух сопряженных неприводимых двумерных представлений;
- 4) группа G изоморфна расслоенному произведению $\tilde{D}_{3p}$, $p \in \mathbb{N}$, и $\tilde{S}_4$ (или $\tilde{A}_4$) над D_3 (см. пример 4.1).

СЛЕДСТВИЕ 1.2 ([1, раздел 6.4]). Пусть $X := \mathbb{C}^4/G$ – четырехмерная терминальная горюшительнова факторособенность. Тогда общий дивизор $F \in |-2K_X|$ имеет лишь горюшительновы канонические особенности.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть $X := \mathbb{C}^4/G$ – четырехмерная терминальная горюшительнова факторособенность. Тогда особенность X неисклЮчительна [6].

2. Предварительные сведения. Начнем доказательство теоремы 1.1 с некоторых вспомогательных утверждений.

ТЕОРЕМА 2.1 [4]. Пусть $G \subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ – конечная подгруппа, не содержащая отражений. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) факторособенность $X := \mathbb{C}^4/G$ терминальна и горюшительнова;
- 2) каждый элемент $g \in G$ имеет собственные значения вида $(\varepsilon, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^a, \varepsilon^{-a})$ для некоторых $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $\varepsilon^n = 1$, $\gcd(a, n) = 1$.

В случае 2) будем для краткости говорить, что группа $G \subset \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ удовлетворяет условию (*).

Всюду предполагается, что $G \subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ – конечная подгруппа, не содержащая отражений.

Тогда задача заключается в том, чтобы классифицировать все конечные подгруппы $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$, удовлетворяющие условию (*).

ПРИМЕР 2.2. Прямая сумма двух изоморфных представлений группы Клейна в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ удовлетворяет условию (*), так как любой элемент имеет собственные значения $(\varepsilon, \varepsilon^{-1}, \varepsilon, \varepsilon^{-1})$.

Пусть есть группа G , удовлетворяющая условию (*). Предположим, что ее представление в $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ приводимо.

ЛЕММА 2.3. Если представление группы G , удовлетворяющей условию (*), приводимо, то либо G циклическая, либо это представление есть прямая сумма двух двумерных представлений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если есть инвариантное одномерное подпредставление, то оно задает гомоморфизм G в циклическую подгруппу $\mathbb{C}^*$. Ядро этого гомоморфизма тривиально, так как в силу условия (*) неединичный элемент не может иметь собственное значение 1. Лемма доказана.

Разберем подробнее случай прямой суммы двух двумерных представлений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Если прямая сумма $\rho \oplus \rho'$ двух двумерных представлений группы G удовлетворяет условию (*), то возможны два варианта:

- 1) $G \simeq (\mu_{3p} \times \mu_3 \tilde{A}_4)/\{(1, 1); (-1, -1)\}$ (подробнее см. пример 4.1);
- 2) $G \simeq (\mu_n \times G')/\{(1, 1); (-1, -1)\}$, где G' – группа Клейна и n взаимно просто с порядком G' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию (*) оба представления ρ, ρ' точны, кроме того, для любого $g \in G$ из (*) имеем $\text{tr}(\rho \oplus \rho')(g) \in \mathbb{R}$, поэтому либо $\text{tr} \rho(g) = \text{tr} \rho'(g)$ и $\rho' \simeq \rho^\vee$, либо $\text{tr} \rho(g), \text{tr} \rho'(g) \in \mathbb{R}$. Во втором случае сразу получаем второй пункт предложения, так как $\rho: G \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})$ и можно выбрать $G' \simeq G$, $n = 2$. В первом случае исследуем, каким может быть представление $G \simeq \rho(G) \subset \text{GL}_2(\mathbb{C})$.

Имеем $\text{GL}_2(\mathbb{C}) = (\text{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*) / \{(1, 1); (-1, -1)\}$. Аналогично доказательству утверждения 4.2 ниже получаем, что либо для проекции прообраза $\rho(G)$ в $\text{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ на первый сомножитель имеет место один из следующих трех случаев:

- 1) μ_n ; тогда G – циклическая;
- 2) $\tilde{A}_4$, $G \cap \text{SL}_2 \simeq Q_8$; тогда G – подгруппа группы из примера 4.1,
 $G = (\mu_{3p} \times_{\mu_3} \tilde{A}_4) / \{(1, 1); (-1, -1)\}$;
- 3) $\tilde{S}_4$, $G \cap \text{SL}_2 \simeq \tilde{A}_4$; тогда $G \simeq \tilde{A}_4 \times \mu_n$,

либо прообраз $\rho(G)$ в $\text{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ – прямое произведение циклической группы и одной из групп Клейна.

В этом случае представление G в $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ можно продолжить до представления G в $\text{SL}_4(\mathbb{C})$, удовлетворяющего условию (*), если и только если

$$G = (\mu_n \times G') / \{(1, 1); (-1, -1)\}$$

и n взаимно просто с порядком группы Клейна G' . В этом случае ни один не единичный элемент G не имеет в $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ собственного значения равного 1 и прямая сумма представления в $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ и сопряженного к нему является представлением G в $\text{SL}_4(\mathbb{C})$, удовлетворяющим условию (*). Предложение доказано.

Пусть теперь представление G неприводимо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Если представление G неприводимо, то G сохраняет невырожденную билинейную форму, либо симметричную, либо кососимметричную.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматриваемое представление G имеет вещественный характер, значит, изоморфно своему сопряженному. Этот изоморфизм задает невырожденную билинейную форму $(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{C}^4$, а так как он коммутирует с действием G , эта форма G -инвариантна.

Рассмотрим симметричную и кососимметричную части формы $(\cdot, \cdot)$. Каждая из них либо невырождена, либо тождественно равна 0, так как иначе ее ядро – инвариантное подпредставление. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6 [7, п. 4.2.15]. Если конечная группа G лежит в $\text{SO}_n(\mathbb{C})$, то $G \subset \text{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \text{SO}_n(\mathbb{C})$ для некоторого вложения $\text{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \text{SO}_n(\mathbb{C})$.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Если конечная группа $G \subset \text{SL}_4(\mathbb{C})$ удовлетворяет условию (*), то либо $G \subset \text{SO}_4(\mathbb{R})$, либо $G \subset \text{Sp}_4(\mathbb{C})$.

Первый случай разбирается в п. 4, второй – в п. 5.

3. Группы Клейна. Разберем отдельно случай, когда G – группа Клейна, т.е. одна из следующих групп: μ_n , $\tilde{D}_n$, $\tilde{A}_4$, $\tilde{S}_4$, $\tilde{A}_5$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. У групп Клейна нет 4-мерных неприводимых представлений, удовлетворяющих условию (*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все неприводимые представления μ_n одномерны.

Группа $\tilde{D}_n$ порождается двумя элементами r, s с соотношениями $r^n = s^4 = 1$, $srs^{-1} = r^{-1}$. В любом представлении $\tilde{D}_n$ образ s переставляет собственные подпространства r с собственными значениями $\varepsilon, \varepsilon^{-1}$ (пусть $rv = \varepsilon v$, тогда $r(sv) = sr^{-1}v = s\varepsilon^{-1}v = \varepsilon^{-1}(sv)$). Элемент s^2 имеет порядок 2, поэтому в 4-мерном представлении, удовлетворяющем условию (*), он переходит в -1 ; значит, для любого вектора v , собственного для r , подпространство, натянутое на v и sv , будет инвариантно относительно действия r и s , а следовательно, и всей группы $\tilde{D}_n$.

Таким образом, у $\tilde{D}_n$ также нет 4-мерных неприводимых представлений.

Их нет и у $\tilde{A}_4$, это видно из подсчета размерностей неприводимых представлений: сумма квадратов этих размерностей должна быть равна порядку группы. Порядок $\tilde{A}_4$ равен 24, но только квадраты представлений A_4 уже дают 12, значит, 4-мерного представления нет.

Отсутствие неприводимого 4-мерного представления у $\tilde{S}_4$ и $\tilde{A}_5$ можно установить, вычисляя норму характера. Условие (*) однозначно задает значения характера для элементов порядка 2, 3, 4; вычисление показывает, что этих значений достаточно, чтобы норма оказалась больше единицы.

Предложение доказано.

4. Ортогональный случай. Пусть теперь $G \subset \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$.

Заметим, что условие (*) влечет следующие свойства:

1. Любая абелева подгруппа G циклическая.
2. Центр G либо тривиален, либо состоит из двух элементов $\{1, -1\}$, так как представление неприводимо, а -1 – единственный скаляр, согласно условию (*).

Таким образом, мы приходим к задаче классификации всех конечных подгрупп $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$, удовлетворяющих свойствам 1 и 2.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим группу Γ – расслоенное произведение $\tilde{D}_{3p}, p \in \mathbb{N}$, и $\tilde{S}_4$ над D_3 , которая является фактором $\tilde{D}_{3p}$ по μ_{2p} и $\tilde{S}_4$ по Q_8 – коммутанту $\tilde{A}_4 \subset \tilde{S}_4$. Оно лежит в $\tilde{D}_{3p} \times \tilde{S}_4$, а эта группа имеет представление в $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$, строящееся следующим образом: $\tilde{D}_{3p}$ представляется матрицами

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \cdot \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \cdot \mathrm{Id} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \cdot \mathrm{Id} \\ \varepsilon^{-1} \cdot \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix},$$

а $\tilde{S}_4$ – матрицами

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

как прямая сумма двух представлений $\tilde{S}_4$ в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Значит, Γ тоже имеет представление в $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$. Легко убедиться, что оно неприводимо.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. Если $G \subset \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию (*), то либо G – одна из групп Клейна, и представление – прямая сумма двух изоморфных неприводимых двумерных, либо G – группа, описанная в примере 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим H – прообраз G при накрытии $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \rightarrow \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$.

Все конечные подгруппы SU_2 известны – это группы Клейна $\mu_n, \tilde{D}_n, \tilde{A}_4, \tilde{S}_4, \tilde{A}_5$. Обозначим H_1 и H_2 проекции H на сомножители в $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2$; положим $B_i = H \cap H_i$. Тогда

$H \subset H_1 \times H_2$; очевидно, H_2 является ядром проекции $H_1 \times H_2$ на H_1 , поэтому B_2 является ядром проекции H на H_1 . Аналогично B_1 – ядро проекции H на H_2 . Группы B_i нормальны в H , следовательно, нормальны в H_i , так как при сюръективном гомоморфизме нормальные подгруппы переходят в нормальные.

Заметим, что если одна из B_i тривиальна или равна μ_2 , то $G = H/\{(1, 1), (-1, -1)\}$ изоморфна одной из групп Клейна; если $H_i = \mu_n$, то B_i лежит в центре H , и, следовательно, состоит не более, чем из двух элементов.

Перебирая все (немногочисленные) нормальные подгруппы групп Клейна видим, что единственный вариант, кроме указанных выше, при котором в $B_1 \times B_2 \subset H$ не нарушается свойство 1 (что происходит, когда B_1 и B_2 содержат элементы одинакового порядка, отличные от $\{-1, -1\}$), есть вариант $H_i = D_n$, $B_i = \mu_p$.

Заметим, что $H_1/B_1 \simeq H_2/B_2 \simeq H/B_1 \times B_2$, поэтому остаются две возможности:

- 1) $H_1 = \tilde{D}_{pk}$, $H_2 = \tilde{D}_{qk}$, $B_1 = \mu_{2p}$, $B_2 = \mu_{2q}$, $(p, q) = 1$, тогда $H = \tilde{D}_{pqk}$;
- 2) $H_1 = \tilde{D}_{3p}$, $H_2 = \tilde{S}_4$, $B_1 = \mu_{2p}$, $B_2 = Q_8$; в этом случае G – группа из примера 4.1.

Утверждение доказано.

5. Симплектический случай. Пусть теперь $G \subset \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. *В этом случае G – группа Клейна и представление – сумма двух изоморфных представлений G в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.*

Имеется накрытие $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SO}_5(\mathbb{C})$ с ядром $\{1, -1\}$.

При этом по предложению 2.6 группа G отображается в $\mathrm{SO}_5(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SO}_5(\mathbb{C})$.

Сначала докажем несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА 5.2. *Если образ конечной подгруппы Sp_4 , удовлетворяющей условию (*), при отображении в SO_5 имеет инвариантный вектор, то эта подгруппа изоморфна какой-то группе Клейна, причем ее представление в Sp_4 изоморфно прямой сумме двух одинаковых представлений в SL_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $H \subset \mathrm{Sp}_4$ при накрытии $\mathrm{Sp}_4 \rightarrow \mathrm{SO}_5$ отображается в $H' \subset \mathrm{SO}_4$, это означает, что H сохраняет некий ненулевой вектор в $L^2\mathbb{C}^4$, помимо соответствующего основной симплектической форме. Тогда представление H в $\mathbb{C}^4$ не может быть неприводимым, так как оно сохраняет две линейно независимых симплектических формы, которым соответствуют два линейно независимых изоморфизма $\mathbb{C}^4$ и $(\mathbb{C}^4)^\vee$, а по лемме Шура любые два изоморфизма неприводимых представлений пропорциональны.

По лемме 2.3 либо группа H циклическая, и тогда все доказано, либо ее представление является суммой двух двумерных представлений, обозначим их V_1 и V_2 . Ограничение H на любое из этих пространств задает гомоморфизм H в GL_2 , который из-за условия (*) является вложением.

По доказанному выше H сохраняет две симплектические формы, обозначим их $(\cdot, \cdot)$ и $(\cdot, \cdot)'$. Если хотя бы одна из них невырождена на одном из V_1 , V_2 , то ограничение действия H на это подпространство задает вложение H в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Если ограничения обеих форм на оба подпространства вырождены, выберем базисы в V_1 и V_2 так, чтобы $(\cdot, \cdot)$ приобрела канонический вид

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{Id} \\ \hline -\mathrm{Id} & 0 \end{array} \right),$$

где Id – единичная матрица.

Тогда элементы H запишутся в виде

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & (A^T)^{-1} \end{array} \right),$$

а форма $(\cdot, \cdot)'$ – в виде

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & F \\ \hline -F & 0 \end{array} \right),$$

Группа H сохраняет $(\cdot, \cdot)'$; записав это условие явно, получаем, что F как матрица коммутирует с A , т.е. образы всех элементов при вложении H в GL_2 коммутируют с некоторой матрицей F . У F есть собственный вектор; тогда либо он является собственным и для всех элементов H , и тогда по лемме 2.3 группа H циклическая, либо F – скалярная матрица, и тогда формы $(\cdot, \cdot)$ и $(\cdot, \cdot)'$ линейно зависимы.

Получается, что H в любом случае вкладывается в $\text{SL}_2(\mathbb{C})$, и утверждение леммы следует теперь из предложения 3.1. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.3. *Все элементы G с собственными значениями вида $(\varepsilon, \varepsilon^{-1}, \varepsilon, \varepsilon^{-1})$ составляют подгруппу H , изоморфную одной из групп Клейна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти элементы при описанном отображении G в $\text{SO}_5(\mathbb{R})$ переходят в операторы с комплексными собственными значениями $(1, 1, 1, \varepsilon^2, \varepsilon^{-2})$, т.е. вращения в некоторой двумерной плоскости. По предыдущей лемме любые два таких оператора порождают некоторую группу Клейна, проецирующуюся в подгруппу $\text{SO}_3(\mathbb{R})$, т.е. сохраняющую двумерное подпространство $\mathbb{R}^5$. Значит, для любых двух таких операторов упомянутые двумерные плоскости имеют ненулевое пересечение. Значит, все эти плоскости лежат в одном трехмерном подпространстве: выберем из них две разные (они порождают трехмерное подпространство), тогда любая из остальных двумерных плоскостей натянута на свои пересечения с этими двумя выбранными, т.е. лежит в том же 3-мерном подпространстве. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Заметим, что либо группа H циклическая, либо образ H в $\text{SO}_5(\mathbb{R})$ сохраняет некоторое двумерное подпространство. Более того, в этом случае размерность инвариантного относительно элемента g подпространства в $\mathbb{R}^5$ является критерием принадлежности g к H : если размерность равна 3, то $g \in H$, если она равна 1, то нет.

ЛЕММА 5.5. *Если G , удовлетворяющая условию (*), при отображении $\text{Sp}_4 \rightarrow \text{SO}_5(\mathbb{R})$ переходит в подгруппу $\text{SO}_3(\mathbb{R}) \times \text{SO}_2(\mathbb{R})$, то G – группа Клейна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прообраз $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ – группа $\text{SU}_2(\mathbb{C})$, вложенная в $\text{Sp}_4(\mathbb{C})$ в виде прямой суммы двух одинаковых представлений $\text{SU}_2(\mathbb{C})$. Можно явно посчитать, что при этом $\text{SO}_2(\mathbb{R}) \subset \text{SU}_2(\mathbb{C})$ переходит в матрицы, коммутирующие с прообразом $\text{SO}_3(\mathbb{R})$. Рассматривая аналогично доказательству утверждения 4.2 прямое произведение какой-нибудь циклической подгруппы пересечения образа G в SO_5 и SO_3 на пересечение образа G и SO_2 , получаем, что это коммутативная подгруппа; ее прообраз в $\text{Sp}_4(\mathbb{C})$ коммутативен по написанному выше, но не циклический, если проекция на SO_3 имеет ядро, т.е. если G не является группой Клейна; противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.6. *В случае нециклической H если для элемента g выполнено $g^k \in H$, то либо $g \in H$, либо $g^k = \pm 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H \subset \mathrm{SO}(V_0)$, $\dim V_0 = 3$, действие g раскладывается в прямую сумму $V_1 \oplus V_2 \oplus \langle v \rangle$. Тогда g^k стабилизирует v и одно из V_1, V_2 . Пусть для определенности $V_1 \subset V_0$, действие g^k сохраняет $V_2 \oplus \langle v \rangle$. Тогда $V_2 \cap V_0^\perp \neq \emptyset$; если $V_2 \neq V_0^\perp$, обозначим $V_2 \cap V_0^\perp = \langle w \rangle$, тогда для любого $h \in H$ элемент $g^{-1}hg$ сохраняет $g^{-1}w$, значит, $g^{-1}Hg \subset H$. Отсюда $g^{-1}Hg = H$, поэтому H сохраняет $g^{-1}w$, тогда группа $H \subset \mathrm{SO}_2$ циклическая. Если же $V_2 = V_0^\perp$, то группа, порожденная H и g , лежит в $\mathrm{SO}_3 \times \mathrm{SO}_2$ и по предыдущей лемме является группой Клейна, значит, она либо циклическая (но она содержит нециклическую H), либо вкладывается в SO_3 , но тогда по замечанию все ее элементы принадлежат H . Лемма доказана.

ЛЕММА 5.7. *Если группа H из леммы 5.3 не циклическая, то имеет место разложение*

$$G = \left(\bigcup_{i=1}^k H_i \right) \cup H,$$

где H_i циклические, и любые две группы из H_i , H либо совпадают, либо пересекаются только по множеству $\{1, -1\}$; если же H циклическая, то имеет место разложение

$$G = \left(\bigcup_{i=1}^k H_i \right),$$

где H_i циклические, $H_i \cap H_j = \{1, -1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выделим $H \subset G$ по лемме 5.3. Для каждого $x \notin H$ возьмем максимальную циклическую подгруппу, содержащую x . Если H не циклическая, то эти подгруппы, во-первых, пересекаются с H только по $\{1, -1\}$ по лемме 5.6, а во-вторых, для разных x либо совпадают, либо пересекаются также по $\{1, -1\}$. (Заметим, что $\{1, -1\}$ действительно принадлежит всем построенным H_i , так как иначе группа, порожденная какой-то из H_i и -1 , была бы абелевой, но не циклической.) Каждая циклическая подгруппа H_i характеризуется тем, что сохраняет определенный вектор в $\mathbb{R}^5$, единственный, иначе образующая H_i лежит в H . Пересечение двух таких подгрупп сохраняет вектора их обеих (они разные, так как иначе обе подгруппы лежат в одном экземпляре SO_4 и либо лежат в H , либо совпадают, так как по построению они максимальные), значит, сохраняет некоторое 3-мерное подпространство, следовательно, лежит в H . Но мы уже доказали, что H_i и H пересекаются только по $\{1, -1\}$.

Если H циклическая, то она принадлежит только одной из H_i , так как иначе группа, порожденная H_i, H_j такими, что $H_i \cap H_j = H$, принадлежит $\mathrm{SO}_3 \times \mathrm{SO}_2$ и по лемме 5.5 является группой Клейна, т.е. либо циклической, что противоречит построению H_i, H_j , либо подгруппой SO_3 и, следовательно, совпадает с H .

Лемма доказана.

Теперь докажем собственно предложение 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.1. Вычислим скалярный квадрат характера нашего 4-мерного представления, пользуясь разложением из леммы 4.7. Если представ-

ление неприводимо, он должен быть равен 1. Итак, имеем

$$\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi(g)} = \frac{1}{\#G} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{g \in H_i} \chi(g) \overline{\chi(g)} + \sum_{g \in H} \chi(g) \overline{\chi(g)} - k(\chi(1) \overline{\chi(1)} + \chi(-1) \overline{\chi(-1)}) \right).$$

Вычисляем $\sum_{g \in H_i} \chi(g) \overline{\chi(g)} = 4\#H_i$, так как в ограничении на H_i наше представление дает 4 разных одномерных представления; далее, $\sum_{g \in H} \chi(g) \overline{\chi(g)} = 8\#H$, если H циклическая, так как в ограничении на H наше представление дает 2 пары одинаковых одномерных, и $\sum_{g \in H} \chi(g) \overline{\chi(g)} = 4\#H$, если H не циклическая, так как тогда получается 2 одинаковых неприводимых двумерных.

Заметим, что $\#G = \sum_{i=1}^k \#H_i + \#H - 2k$. Порядок H_i не меньше 10, так как он должен быть четным, поскольку H_i содержит -1 , а любой элемент порядка 4 по условию (*) лежит в H , поэтому элементы порядка 8, если они есть, тоже лежат в H .

Скалярный квадрат характера неприводимого представления равен 1, отсюда получаем, что

$$\frac{1}{\#G} \left(4 \sum_{i=1}^k \#H_i + C \cdot \#H - 32k \right) = 1,$$

где $C = 4$ или 8 ; поэтому

$$4 \sum_{i=1}^k \#H_i + C \cdot \#H - 32k = \#G = \sum_{i=1}^k \#H_i + \#H - 2k.$$

Вычтем правую часть равенства из левой; используя оценку $\sum_{i=1}^k \#H_i \geq 10k$, получаем

$$3 \sum_{i=1}^k \#H_i + (C - 1)\#H - 30k \geq (C - 1)\#H > 0,$$

что противоречит предыдущему равенству.

Предложение доказано. Доказательство теоремы 1.1 завершено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Reid M. Young person's guide to canonical singularities // Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math. V. 46, Part 1. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1987. P. 345–414.
- [2] Reid M. Canonical 3-folds // Journées de Géometrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979. Algebraic Geometry, Angers: Sijthoff & Noordhoff, 1979. P. 273–310.
- [3] Mori S. On 3-dimensional terminal singularities // Nagoya Math. J. 1985. V. 98. P. 43–66.
- [4] Morrison D., Stevens G. Terminal quotient singularities in dimensions three and four // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 90. № 1. P. 15–20.
- [5] Mori S., Morrison D., Morrison I. On four-dimensional terminal quotient singularities // Math. Comp. 1988. V. 51. № 184. P. 769–786.
- [6] Markushevich D., Prokhorov Yu. G. Exceptional quotient singularities // Amer. J. Math. 1999. V. 121. № 6. P. 1179–1189.
- [7] Спрингер Т. Теория инвариантов. М.: Мир, 1981.