Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Ажгалиев, Н. Темиргалиев, Об информативной мощности линейных функционалов, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 6, 803–812

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:43:21

УДК 517

ОБ ИНФОРМАТИВНОЙ МОЩНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Ш. Ажгалиев, Н. Темиргалиев

В данной статье выясняется, насколько информативны линейные функционалы в задачах восстановления. Найдены точные порядки информативных мощностей всевозможных линейных функционалов в классах Бесова и Соболева W и SW .

Библиография: 14 названий.

1. Постановка задачи и основные результаты. Сформулируем общую задачу восстановления (в редакции из [1]). Пусть даны нормированные пространства X и Y комплекснозначных функций, определенных на множествах Ω и Ω_1 соответственно. Пусть $F \subset X$ и $Tf = u(y; f)$ есть отображение F в Y . Для каждого целого положительного N через $\{(l^{(N)}; \varphi_N)\}$ обозначим множество всевозможных пар $(l^{(N)}; \varphi_N)$, где $l^{(N)} = (l_1, \dots, l_N)$ есть набор функционалов $l_j(\cdot): F \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, N$, функция $\varphi_N = \varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y)$ действует из $\mathbb{C}^N \times \Omega_1$ в $\mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ – как обычно, поле комплексных чисел. Также предположим, что при произвольных фиксированных $\tau_1, \dots, \tau_N$ функция φ_N , рассматриваемая как функция от y , принадлежит Y . Положим для $(l^{(N)}; \varphi_N) \in \{(l^{(N)}; \varphi_N)\}$

$$\delta_N((l^{(N)}; \varphi_N); T, F)_Y = \sup_{f \in F} \|u(\cdot; f) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); \cdot)\|_Y \quad (1)$$

и для $D_N \subset \{(l^{(N)}; \varphi_N)\}$

$$\delta_N(D_N; T, F)_Y = \inf_{(l^{(N)}; \varphi_N) \in D_N} \delta_N((l^{(N)}; \varphi_N); T, F)_Y. \quad (2)$$

Задача заключается в получении оценок сверху и оценок снизу для величины (2) (желательно совпадающих с точностью до констант) и в указании пары $(l^{(N)}; \varphi_N)$, реализующей оценку сверху.

Конкретизируя в (1), (2) пространства X и Y , классы F , $F \subset X$, операторы T и множества D_N , получаем различные постановки задач (см., например, [1]–[12] и имеющуюся в них библиографию). Приведем некоторые из них. Пусть $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$. Тогда, положив

$$Tf = \int_{\Omega} f(x) dx, \quad l_k(f) = a_k f(\xi_k), \quad (3)$$

$$\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y) \equiv \varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N) = \sum_{k=1}^N \tau_k,$$

получаем постановку задачи приближенного интегрирования.

При $X = Y$ и $Tf = f(x)$ задача (1), (2) есть задача восстановления функций из класса F . Другой конкретизацией T в задаче (1), (2) является задача восстановления решений уравнения с частными производными, когда $Tf = u(y; f)$ есть решение этого уравнения с краевым или начальным условием или же с правой частью $f(x)$ (см., например, [2, с. 185–190], [3, с. 229–234], [1] и [12]).

Конкретизация в D_N набора функционалов $l^{(N)}$ и алгоритмов переработки числовой информации φ_N также порождает многочисленные постановки задач.

Здесь, по-видимому, наиболее изученным является случай функционалов вида $l_j(f) = f(\xi_j)$, $j = 1, \dots, N$, на языке которых ставятся задачи численного интегрирования (3) и восстановления функций по их значениям в узлах сетки, и тогда проблема заключается в построении сеток, оптимальных в том или ином смысле. К таковым относятся, например, сетки, предложенные Коробовым [2], [3], Смоляком [4] и Фроловым [5].

Шерниязовым [12] были определены сетки, являющиеся линейной комбинацией сеток Коробова; погрешности восстановления функций по их значениям в узлах таких сеток для широкого спектра классов F и метрик Y оптимальны или оптимальны в степенной шкале.

Разумеется, помимо значений функций в точках, можно привлекать и другие функционалы, например, значения коэффициентов Фурье по тем или иным ортонормированным системам: $l_k(f) = \int_{\Omega} f(x)\phi_k(x) dx$, где $\{\phi_k(x)\}$ – ортонормированная система на Ω .

Однако для сохранения содержательности задачи восстановления, требуется наложить какие-либо ограничения на набор функционалов. А именно, если $\Omega = \Omega_1 = [0, 1]^s$, классы X и Y , где $X = Y$, содержатся в пространстве Лебега $L(0, 1)^s$, а D_N , $N = 1, 2, \dots$, есть множество всевозможных пар $\{(l^{(N)}; \varphi_N)\}$, то $\delta_N(D_N, X)_Y = 0$. Действительно, мощность множества всех восстанавливаемых функций $X \subset L(0, 1)^s$ не больше мощности континуума, поэтому можно установить взаимнооднозначное соответствие $X \ni f \leftrightarrow c_f \in \{c_f\} \subset \mathbb{R}^1$. Определим функционалы

$$l_1(f) = c_f, \quad l_2(f) \equiv \dots \equiv l_N(f) \equiv 0$$

и функцию $\overline{\varphi}_N(\tau_1, \dots, \tau_N; x)$ тождественно равную нулю, если $\tau_1 \notin \{c_f\}$, и равную $f(x)$, если $\tau_1 = c_f$. Тогда на X выполнено

$$\|f(x) - \overline{\varphi}_N(l_1(f), 0, \dots, 0; x)\|_Y \equiv 0,$$

и задача восстановления становится тривиальной: каждая функция f класса X оптимально приближается ею же самой.

Поэтому естественно возникает новая задача об *информативной мощности* определенного класса Λ наборов функционалов $l^{(N)}$ (см. [1]):

$$\delta_N(\Lambda; T, F)_Y = \inf_{(l^{(N)}; \varphi_N) \in \Lambda \times \{\varphi_N\}} \delta_N((l^{(N)}; \varphi_N); T, F)_Y. \quad (4)$$

Здесь изучается следующая конкретизация задачи (4):

$$\Omega = \Omega_1 = [0, 1]^s, \quad Y = L^q(0, 1)^s, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad Tf = f,$$

а F суть классы Соболева $W_p^r(0, 1)^s$, классы Никольского–Бесова $B_{p, \theta}^r(0, 1)^s$ (определения этих классов см., например, в [13]) и классы Соболева с доминирующей смешанной производной $SW_2^r(0, 1)^s$ (определение см., например, в [4]), а $\Lambda = L^N$, где L есть множество всех линейных функционалов на линейной оболочке F .

Нами доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть дано целое положительное число s .

а) Пусть $2 \leq p \leq q \leq \infty$ и целое $r > 0$ таковы, что

$$\frac{r}{s} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) > 0.$$

Тогда имеет место соотношение

$$\delta_N(L^N, W_p^r(0, 1)^s)_{L^q(0, 1)^s} \asymp N^{-(r/s - (1/p - 1/q))}, \quad N = 1, 2, \dots$$

б) Пусть $2 \leq p \leq q \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ и $r > 0$ таковы, что

$$\frac{r}{s} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) > 0.$$

Тогда имеет место соотношение

$$\delta_N(L^N, B_{p, \theta}^r(0, 1)^s)_{L^q(0, 1)^s} \asymp N^{-(r/s - (1/p - 1/q))}, \quad N = 1, 2, \dots$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть дано целое положительное число s .

а) Пусть дано действительное число $r > 1/2$. Тогда имеет место соотношение

$$\delta_N(L^N, SW_2^r(0, 1)^s)_{L^\infty(0, 1)^s} \asymp \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1/2}}, \quad N = 2, 3, \dots$$

б) Пусть дано положительное число r . Тогда имеет место соотношение

$$\delta_N(L^N, SW_2^r(0, 1)^s)_{L^2(0, 1)^s} \asymp \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r}, \quad N = 2, 3, \dots$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть даны целое положительное число s , $1 \leq q \leq p \leq 2$ и целое положительное число r . Тогда имеет место соотношение

$$\delta_N(L^N, W_p^r(0, 1)^s)_{L^q(0, 1)^s} \asymp N^{-r/s}, \quad N = 1, 2, \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Верхние оценки во всех теоремах достигаются на функционалах – тригонометрических коэффициентах Фурье (для каждого класса свой спектр коэффициентов).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценка снизу в теореме 1а) обобщает оценку снизу, полученную Кудрявцевым [10], в том смысле, что эта оценка снизу, полученная только для функционалов, являющихся значениями функции в точках, распространена на всевозможные линейные функционалы. Отметим также, что результат теоремы 2а) позволяет обобщить и улучшить полученную в [12] оценку снизу (с $N^{-(r-1/2)}$ до приведенного ниже) при восстановлении функций из класса $SW_2^r(0, 1)^s$ по их значениям в конечном числе точек: если s – целое положительное число и $r > 1/2$, то имеет место соотношение (здесь через P обозначено множество всех функционалов – значений в точках):

$$\begin{aligned} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1/2}} &\ll \delta_N(L^N, SW_2^r(0, 1)^s)_{L^\infty(0, 1)^s} \\ &\leq \delta_N(P^N, SW_2^r(0, 1)^s)_{L^\infty(0, 1)^s} \ll \frac{\ln^{(r+1/2)(s-1)} N}{N^{r-1/2}}, \quad N = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

2. Вспомогательные утверждения. Приведем обозначения и несколько утверждений, которыми мы будем пользоваться. Для 1-периодической по каждой из своих s переменных и суммируемой на кубе $[0, 1]^s$ функции $f(x)$, как обычно, через $\widehat{f}(m)$, $m \in \mathbb{Z}^s$ будем обозначать ее тригонометрические коэффициенты Фурье–Лебега.

Для целого положительного ρ под $I_\rho \equiv I_\rho^{(s)}$ всюду ниже будем понимать множество $I_\rho = [-\rho, \rho]^s \cap \mathbb{Z}^s$, а под $\Gamma_\rho \equiv \Gamma_\rho^{(s)}$ – множество

$$\Gamma_\rho = \{m = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s : \overline{m} \leq 2^\rho\},$$

где здесь и всюду ниже для всякого $y = (y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{Z}^s$ положено

$$\overline{y}_j = \max\{1; |y_j|\}, \quad \overline{y} = \prod_{j=1}^s \overline{y}_j.$$

Для конечного множества B через $|B|$ условимся обозначать число его элементов.

ЛЕММА А [13, с. 281]. Пусть даны целое положительное число s , целое неотрицательное число l , положительное число r , $1 \leq p$, $\theta \leq \infty$, целое положительное ρ , и пусть $T_\rho(x)$ является тригонометрическим многочленом порядка не выше ρ по каждой из своих s переменных. Тогда верны соотношения

$$\|T_\rho\|_{W_p^l} \ll \rho^l \|T_\rho\|_{L^p}, \quad \|T_\rho\|_{B_{p,\theta}^r} \ll \rho^r \|T_\rho\|_{L^p}.$$

Отметим, что константы в этих неравенствах не зависят от ρ .

ЛЕММА В. Пусть дано целое положительное число s . Тогда для каждого целого положительного N выполнено: для любой ортогональной на $[0, 1]^s$ системы функций $\psi \equiv \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{N'}$ и для любого множества $G \equiv \{m^{(1)}, \dots, m^{(N')}\} \subset \mathbb{Z}^s$ таких, что $N' = |G| \geq 3N$ и $|G| \asymp N$, и для произвольных линейных функционалов $l_1, \dots, l_N$, определенных, по крайней мере, на множестве всех многочленов по системе ψ и на множестве всех тригонометрических многочленов со спектром в G , найдутся комплексные числа $\{c_k\}_{k=1}^{N'}$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=1}^{N'} |c_k| \geq N, \quad \sum_{k=1}^{N'} |c_k|^2 = N;$$

причем если

$$\chi(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k e^{2\pi i(m^{(k)}, x)}, \quad \kappa(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k \psi_k(x),$$

то

$$l_1(\chi) = \dots = l_N(\chi) = l_1(\kappa) = \dots = l_N(\kappa) = 0, \quad (5)$$

$$\|\chi\|_{L^\infty} \geq N, \quad (6)$$

$$\|\chi\|_{L^2} = N^{1/2}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим комплексные числа $\{c_k\}_{k=1}^{N'}$ таким образом, чтобы для функций

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k e^{2\pi i(m^{(k)}, x)}, \quad h(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k \psi_k(x)$$

были выполнены равенства $l_1(g) = \dots = l_N(g) = l_1(h) = \dots = l_N(h) = 0$.

В силу линейности функционалов $l_1, \dots, l_N$ эта задача сводится к системе однородных линейных уравнений с числом уравнений $2N$ и числом неизвестных $N' \geq 3N$:

$$\begin{aligned} 0 = l_j(g) &= \sum_{k=1}^{N'} c_k l_j(e^{2\pi i(m^{(k)}, x)}) = \sum_{k=1}^{N'} c_k l_{j, m^{(k)}} = l_j(h) \\ &= \sum_{k=1}^{N'} c_k l_j(\psi_k(x)) = \sum_{k=1}^{N'} c_k l_{j, \psi_k}, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку матрица системы линейных однородных уравнений (8) состоит из $2N$ строк и N' столбцов, то ее ранг $r \leq 2N$, в то время как $N' \geq 3N$, поэтому фундаментальная система решений системы (8) состоит из $(N' - r) \geq N$ векторов, т.е. множество всевозможных решений $(c_1, \dots, c_{N'})$ образует линейное пространство размерности $(N' - r) \geq N$ (см., например, [14, с. 85]). Стало быть, найдутся вектора

$$(c_1^{(1)}, \dots, c_{N'}^{(1)}), \dots, (c_1^{(N)}, \dots, c_{N'}^{(N)}),$$

составляющие линейно независимую систему решений исходной системы (8).

Легко видеть, что функции

$$g_1(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k^{(1)} e^{2\pi i(m^{(k)}, x)}, \dots, g_N(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k^{(N)} e^{2\pi i(m^{(k)}, x)}$$

линейно независимы на $[0, 1]^s$.

В силу теоремы об ортогонализации системы независимых функций, найдутся числа $\{b_{k,j}\}_{k,j=1}^N$ такие, что функции $\phi_j(x) = \sum_{k=1}^N b_{k,j} g_k(x)$, $j = 1, \dots, N$, образуют ортонормированную последовательность на $[0, 1]^s$.

Далее, применяя к функции $\Phi(x) = \sum_{j=1}^N |\phi_j(x)|^2$ теорему о среднем, получим, что найдется точка $\xi \in [0, 1]^s$ такая, что

$$N = \int_{[0,1]^s} \Phi(x) dx = \Phi(\xi) = \sum_{j=1}^N |\phi_j(\xi)|^2. \quad (9)$$

Тогда если положить

$$\chi(x) = \sum_{j=1}^N \overline{\phi_j(\xi)} \phi_j(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k e^{2\pi i(m^{(k)}, x)},$$

то числа $\{c_k\}_{k=1}^{N'}$ искомые (для комплексного числа ω через $\bar{\omega}$, как обычно, обозначено комплексно-сопряженное к ω число). Действительно, выполнение равенств (5) очевидно. А из того, что $\phi_1(x), \dots, \phi_N(x)$ образуют ортонормированную последовательность на $[0, 1]^s$, и из равенства (9), получаем (7). Для доказательства неравенства (6) достаточно воспользоваться определением нормы в $L^\infty(0, 1)^s$, определением функции $\chi(x)$ и равенством (9). Далее, имеем

$$\sum_{k=1}^{N'} |c_k| \geq \|\chi\|_{L^\infty} \geq N \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{N'} |c_k|^2 = \|\chi\|_{L^2}^2 = N.$$

Лемма полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $\psi \equiv \{e^{2\pi i(m, x)}\}_{m \in G}$, то, как видно из доказательства леммы, можно считать, что $N' \geq 2N$.

3. Доказательства основных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Поскольку верны вложения [13, с. 230]

$$W_p^r(0, 1)^s \subset H_p^r(0, 1)^s, \quad B_{p,1}^r(0, 1)^s \subset B_{p,\theta}^r(0, 1)^s \subset B_{p,\infty}^r(0, 1)^s \equiv H_p^r(0, 1)^s,$$

то в обоих случаях достаточно оценку сверху доказать для класса $H_p^r(0, 1)^s$, а оценку снизу в пункте б) – для класса $B_{p,1}^r(0, 1)^s$.

Оценка сверху. Пусть дано целое положительное число N . Без ограничения общности можно считать, что $N = |I_{2^n}| \asymp 2^{sn}$. Определим линейные функционалы $l_1(f) = \hat{f}(m^{(1)}), \dots, l_N(f) = \hat{f}(m^{(N)})$, где $\{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}\}$ есть некоторое упорядочение множества I_{2^n} . Функцию $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; x)$ определим таким образом, чтобы для каждой функции $g \in L^1(0, 1)^s$ было выполнено равенство

$$\varphi_N(l_1(g), \dots, l_N(g); x) = V_{2^n}(g; x) = \sum_{k=0}^n q_k(g; x),$$

где [13, с. 295–300] $V_{2^k}(g; x)$ – средние Валле-Пуссена функции $g(x)$ порядка 2^k по каждой переменной, а $q_0 = V_{2^0}$, $q_k = V_{2^k} - V_{2^{k-1}}$, $k \geq 1$.

Пусть $f \in H_p^r(0, 1)^s$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f - \varphi_N\|_{L^q} &\equiv \|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)\|_{L^q} \\ &= \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k \right\|_{L^q} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|q_k\|_{L^q}. \end{aligned} \quad (10)$$

Применим к q_k неравенство разных метрик [13, с. 133]:

$$\|q_k\|_{L^q} \ll 2^{sk(1/p-1/q)} \|q_k\|_{L^p}. \quad (11)$$

Средние Валле-Пуссена функций из класса $H_p^r(0, 1)^s$ удовлетворяют неравенству (см., например, [13, с. 305])

$$\sup_{k=0,1,\dots} 2^{kr} \|q_k\|_{L^p} \leq c(s, p, r). \quad (12)$$

С учетом (11) и (12) продолжим оценку (10):

$$\|f - \varphi_N\|_{L^q} \ll \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k(r-s(1/p-1/q))}.$$

Отсюда получаем требуемую оценку сверху.

Оценка снизу. Пусть дано целое положительное число N , даны N линейных функционалов $l_1, \dots, l_N$ и функция $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; x)$. Определим целое положительное число $n = n(s, N)$ из условий $|I_n| \geq 2N$ и $|I_n| \asymp N$.

Пусть функция $\chi(x)$ определена как в лемме В при $G = I_n$ (см. также замечание 3 к лемме В) и данных функционалах $l_1, \dots, l_N$. Оценим нормы $\|\chi\|_{W_p^r}$ и $\|\chi\|_{B_{p,1}^r}$ при $p \geq 2$. Для этого последовательно применим к $\chi(x)$ лемму А и неравенство разных метрик:

$$\begin{aligned} \|\chi\|_{W_p^r} &\ll n^r \|\chi\|_{L^p} \ll n^r n^{s(1/2-1/p)} N^{1/2} \ll N^{r/s+1-1/p}, \\ \|\chi\|_{B_{p,1}^r} &\ll n^r \|\chi\|_{L^p} \ll n^r n^{s(1/2-1/p)} N^{1/2} \ll N^{r/s+1-1/p}. \end{aligned}$$

Поэтому найдется такое число $c = c(s, p, r)$, что функция

$$f(x) = f_{l_1, \dots, l_N}(x) = cN^{-r/s-1+1/p} \chi(x) \in W_p^r(0, 1)^s \cap B_{p,1}^r(0, 1)^s.$$

Оценим снизу $\|f\|_{L^q}$ при $q \geq p$. Для этого применим неравенство разных метрик к $f(x)$, воспользуемся определением нормы в L^∞ , определением функции $f(x)$ и свойством (6) функции $\chi(x)$:

$$\|f\|_{L^q} \gg (n^s)^{-1/q} \|f\|_{L^\infty} = n^{-s/q} c N^{-r/s-1+1/p} \|\chi\|_{L^\infty} \gg N^{-r/s+1/p-1/q}.$$

Заметим, что выполнены соотношения $l_1(f) = \dots = l_N(f) = 0$. Следовательно, в силу произвольности $l_1, \dots, l_N$ и φ_N получим требуемые оценки сверху.

Теорема 1 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как это видно из хода доказательства, оценка сверху справедлива при всех $1 \leq p \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Оценка сверху. Пусть дано целое положительное число N . Без ограничения общности можно считать, что $N = |\Gamma_n|$. Отсюда следует, что $N \asymp 2^n n^{s-1}$. Определим линейные функционалы $l_1(f) = \widehat{f}(m^{(1)}), \dots, l_N(f) = \widehat{f}(m^{(N)})$, где $\{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}\}$ есть некоторое упорядочение множества Γ_n . Определим функцию $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; x)$ следующим образом:

$$\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; x) = \sum_{k=1}^N \tau_k e^{2\pi i(m^{(k)}, x)}.$$

Пусть $f \in SW_2^r(0, 1)^s$.

а) При условии $r > 1/2$ имеем

$$\begin{aligned} \|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)\|_{L^\infty} &= \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus \Gamma_n} \widehat{f}(m) e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^\infty} \\ &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus \Gamma_n} |\widehat{f}(m)|. \end{aligned}$$

Применив неравенство Гёльдера, получим требуемую оценку сверху:

$$\|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)\|_{L^\infty} \ll \sqrt{\sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus \Gamma_n} \frac{1}{(\overline{m})^{2r}}} \ll \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1/2}}.$$

б) Используя определение функции $\varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)$, в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)\|_{L^2} = \sqrt{\sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus \Gamma_n} |\widehat{f}(m)|^2} \ll \frac{1}{2^{nr}}.$$

Отсюда и следует оценка сверху в данном случае.

Оценка снизу. Пусть дано целое положительное число N , даны N линейных функционалов $l_1, \dots, l_N$ и функция $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; x)$. Определим целое положительное число $n = n(s, N)$ из условий $|\Gamma_n| \geq 2N$ и $|\Gamma_n| \asymp N$.

Пусть функция $\chi(x)$ определена как в лемме В при $G = \Gamma_n$ (см. также замечание 3 к лемме В) и данных функционалах $l_1, \dots, l_N$.

Покажем, что при некотором $c = c(s, r) > 0$ функция

$$f(x) = \frac{c}{2^{nr} \|\chi\|_{L^2}} \chi(x) \in SW_2^r(0, 1)^s.$$

Действительно,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |\widehat{f}(m)|^2 (\overline{m})^{2r} \leq 2^{2nr} \sum_{m \in \Gamma_n} |\widehat{f}(m)|^2 = 2^{2nr} \|f\|_{L^2}^2 = c^2.$$

Далее, используя (6), имеем

$$\|f\|_{L^\infty} = \frac{c}{2^{nr} \|\chi\|_{L^2}} \|\chi\|_{L^\infty} \gg \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1/2}}$$

и

$$\|f\|_{L^2} = \frac{c}{2^{nr}} \gg \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r}.$$

Заметим еще, что $l_1(f) = \dots = l_N(f) = 0$. В итоге в силу произвольности $l_1, \dots, l_N$ и φ_N получим требуемые оценки снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Оценка сверху очевидным образом следует из замечания 4 к доказательству теоремы 1.

Оценка снизу. Пусть дано целое положительное число N , даны N линейных функционалов $l_1, \dots, l_N$ и функция $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; x)$. Определим целое положительное число $n = n(s, N)$ из условий $3N \leq n^s$ и $n^s \asymp N$.

Пусть функция $\omega(z) \in C^\infty(-\infty, +\infty)$ такова, что $\text{supp } \omega \subset (0, 1)$. Для $k = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{Z}^s$, $0 \leq k_j \leq (n-1)$, $j = 1, \dots, s$, положим

$$\psi_k(x) = \omega(nx_1 - k_1) \cdots \omega(nx_s - k_s).$$

Применяя лемму В при данной системе $\{\psi_k\}$ и данных функционалах $l_1, \dots, l_N$ (и при произвольном множестве $G \in \mathbb{Z}^s$ для определенности можно взять $G = [0, n-1]^s \cap \mathbb{Z}^s$), получим, что существует функция

$$\kappa(x) = \sum_{0 \leq k_j \leq n-1} c_k \psi_k(x)$$

такая, что

$$\sum_{0 \leq k_j \leq (n-1)} |c_k| \geq N, \quad (13)$$

$$\sum_{0 \leq k_j \leq (n-1)} |c_k|^2 = N. \quad (14)$$

Для $l = 0, 1, \dots, t = 1, \dots, s$ и $1 \leq \nu < \infty$ найдем (для любой функции g полагаем $g^{(0)} \equiv g$)

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^l \kappa}{\partial x_t^l} \right\|_{L^\nu}^\nu &= n^{l\nu} \int_{[0,1]^s} \left| \sum_{0 \leq k_j \leq (n-1)} c_k \omega(nx_1 - k_1) \cdots \omega^{(l)}(nx_t - k_t) \cdots \omega(nx_s - k_s) \right|^\nu dx \\ &= n^{l\nu} \sum_{0 \leq m_j \leq (n-1)} \int_{\left[\frac{m_1}{n}, \frac{m_1+1}{n}\right] \times \dots \times \left[\frac{m_s}{n}, \frac{m_s+1}{n}\right]} \left| \sum_{0 \leq k_j \leq (n-1)} c_k \omega(nx_1 - k_1) \cdots \omega^{(l)}(nx_t - k_t) \cdots \omega(nx_s - k_s) \right|^\nu dx \\ &= n^{l\nu} \sum_{0 \leq m_j \leq (n-1)} \int_{\left[\frac{m_1}{n}, \frac{m_1+1}{n}\right] \times \dots \times \left[\frac{m_s}{n}, \frac{m_s+1}{n}\right]} \left| c_m \omega(nx_1 - m_1) \cdots \omega^{(l)}(nx_t - m_t) \cdots \omega(nx_s - m_s) \right|^\nu dx \\ &= n^{l\nu} \sum_{0 \leq m_j \leq (n-1)} |c_m|^\nu \prod_{j=1}^s \int_{m_j/n}^{(m_j+1)/n} |\omega^{(\lambda_j)}(nx_j - m_j)|^\nu dx_j, \end{aligned}$$

где $\lambda_j = 0$, если $j \neq t$, и $\lambda_j = l$, если $j = t$.

Подсчитаем отдельно

$$\int_{m_j/n}^{(m_j+1)/n} |\omega^{(\lambda_j)}(nx_j - m_j)|^\nu dx_j = n^{-1} \int_0^1 |\omega^{(\lambda_j)}(z)|^\nu dz = n^{-1} c_1(\lambda_j, \nu, \omega).$$

Стало быть,

$$\left\| \frac{\partial^l \kappa}{\partial x_t^l} \right\|_{L^\nu}^\nu = c_2(s, l, \nu, \omega) n^{l-s/\nu} \left(\sum_{0 \leq m_j \leq n-1} |c_m|^\nu \right)^{1/\nu}. \quad (15)$$

Следовательно, при некотором $c = c(s, r, \omega)$ функция

$$f(x) = \frac{cn^{-r+s/2}}{(\sum_{0 \leq m_j \leq (n-1)} |c_m|^2)^{1/2}} \kappa(x) \in W_2^r(0, 1)^s \subset W_p^r(0, 1)^s.$$

С другой стороны, используя соотношение (15) при $l = 0$ и $\nu = 1$, с учетом (13) и (14) получим, что

$$\|f\|_{L^q} \geq \|f\|_{L^1} \asymp n^{-r-s/2} N^{1/2} \asymp N^{-r/s}.$$

Оценка снизу, а вместе с ней и теорема 3, доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразование рядов Фурье // Вестн. Евразийского университета. 1997. № 3. С. 90–144.
- [2] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
- [3] Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.
- [4] Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045.
- [5] Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.
- [6] Hua Loo Keng, Wang Yang. Application of Number Theory to Numerical Analysis. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1981.
- [7] Темляков В. Н. Приближенное восстановление функций многих переменных // Матем. сб. 1985. Т. 228. № 2. С. 256–268.
- [8] Скриганов М. М. О решетках в полях алгебраических чисел // Докл. АН СССР. 1980. Т. 306. № 3. С. 353–355.
- [9] Воронин С. М. Об интерполяционных формулах для класса полиномов Фурье // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 4. С. 19–35.
- [10] Кудрявцев С. Н. Наилучшая точность восстановления функций конечной гладкости по их значениям в заданном числе точек // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 21–58.
- [11] Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к приближенному восстановлению и интегрированию периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 5. С. 1050–1054.
- [12] Шерниязов К. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E , SW и B // Дисс. . . канд. физ.-матем. наук. Алматы: КазГУ им. аль-Фараби, 1998.
- [13] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- [14] Курош С. В. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1978.

Евразийский национальный университет
им. Л. Н. Гумилева, г. Астана, Республика Казахстан
E-mail: ntmath@mail.ru (Н. Темиргалиев)

Поступило
19.02.2001
Исправленный вариант
20.01.2003