Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Филиппов, О спектре Фучика и периодических решениях, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 6, 910–922

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm228>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 08:52:16

УДК 517.911

О СПЕКТРЕ ФУЧИКА И ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ

В. В. Филиппов

Продолжается распространение теории краевых задач на обыкновенные дифференциальные уравнения и включения с разрывными правыми частями, основанное на построении нового варианта метода сдвига вдоль траекторий. В заметке новый подход сопоставляется с результатами, использующими спектр Фучика.

Библиография: 15 названий.

Настоящая статья посвящена дальнейшей разработке варианта [1]–[3] метода сдвига вдоль траекторий, приспособленного, в частности, к работе с уравнениями и включениями с разрывными правыми частями.

В этой статье мы воспользуемся ситуациями, связанными со спектром Фучика, для введения новых элементов в метод [1]–[3], в частности, идеологии, наработанной в [4]–[7] в рамках использования метода Лерэ–Шаудера (см. [4]–[7], где можно найти дальнейшие ссылки, а также [8]).

Учитывая, что основная часть нашего изложения ведется на уровне аксиоматической теории [9]–[12], наши результаты ввиду развитой теории задачи Коши применимы в очень широких предположениях.

Как правило, терминологию и обозначения теории [9]–[12] мы будем использовать без дополнительных обсуждений.

1. Оценка асимптотических свойств пространства решений. Априорные оценки периодических решений уравнения $x'' + g(x) = h(t)$ получают обычно, исходя из асимптотики функции g , см. [4]–[7].

В [13] был предложен подход к получению априорных оценок, основанный на предельном переходе в пространстве пространств решений $R_{\text{сех}}(U)$, когда оценивается не асимптотика членов уравнения, а асимптотика строения пространств решений. Исследуя по этой схеме уравнение $x' = f(t, x)$, рассматриваем семейство замен переменных $(t, x) \rightarrow (t, \mu x)$ и оцениваем возможный предел (если он существует, он определен не однозначно, из всех возможных берем самый удобный) пространств решений уравнений $x' = \mu f(t, x/\mu)$ при $\mu \rightarrow 0$ в пространстве пространств решений $R_{\text{сех}}(U)$.

Пусть, например, оказывается, что при $\mu \rightarrow 0$ правые части уравнений $x' = \mu f(t, x/\mu)$ равномерно на компактах сходятся к правой части уравнения $x' = f_0(t, x)$. Мы можем рассмотреть гомотопию правой части, определив ее по формуле

$$F(t, x, \mu) = \begin{cases} \mu f(t, x/\mu) & \text{при } \mu \in (0, 1], \\ f_0(t, x) & \text{при } \mu = 0. \end{cases}$$

К этой гомотопии мы можем применять принцип продолжения по параметру. То есть в асимптотику правой части уже заложено использование вполне определенной гомотопии, и нет необходимости ради применения принципа продолжения по параметру подыскивать еще какую-то. Правда, ситуация, когда правые части уравнений $x' = \mu f(t, x/\mu)$ сходятся к правой части некоторого уравнения $x' = f_0(t, x)$, достаточно редка. Но довольно обычна ситуация, когда правые части уравнений $x' = \mu f(t, x/\mu)$ сходятся в смысле полунепрерывности сверху к правой части некоторого дифференциального включения $x' \in F_0(t, x)$, свойства решений которого легко устанавливаются. Тогда опять мы можем рассмотреть гомотопию (теперь многозначную) правой части, определив ее по формуле

$$F(t, x, \mu) = \begin{cases} \mu f(t, x/\mu) & \text{при } \mu \in (0, 1], \\ F_0(t, x) & \text{при } \mu = 0. \end{cases}$$

К этой гомотопии мы тоже можем применять принцип продолжения по параметру. Как и в предыдущем случае, в асимптотику правой части уже заложено использование вполне определенной гомотопии и нет необходимости ради применения принципа продолжения по параметру подыскивать еще какую-то. Этот случай уже оказывается достаточно общим.

Более того, обычно указывается асимптотика слагаемых уравнения. На самом деле, эта асимптотика обычно лишь указывает фигурировавшее в предыдущем абзаце предельное включение. Поэтому нет необходимости проявлять чудеса изобретательности, получая априорные оценки и готовя тем самым использование принципа продолжения по параметру, т.е. можно пользоваться уже заложеной в асимптотику гомотопией предыдущего абзаца.

На самом же деле, нет необходимости и рассматривать гомотопию. Вместо условия сходимости при $\mu \rightarrow 0$ достаточно предположить сходимость соответствующих пространств решений для некоторой последовательности $\mu_i \rightarrow 0$ к пространству решений дифференциального включения $x' \in F_0(t, x)$. При достаточно больших i топологические свойства пространства решений уравнения $x' = \mu_i f(t, x/\mu_i)$ в контексте рассматриваемых вопросов оказываются аналогичными свойствам пространства решений дифференциального включения $x' \in F_0(t, x)$. Поэтому принцип продолжения по параметру достаточно применить к гомотопии, когда μ меняется на отрезке $[\mu_i, 1]$. Но учитывая вполне конкретную связь уравнения $x' = \mu f(t, x/\mu)$ с исходным, можно вообще обойтись без принципа продолжения по параметру. Это было использовано уже в [14].

Сказанное не покрывает все случаи, рассмотренные в [4]–[6]. Дело в том, что в [4]–[6] естественный кандидат на предельное дифференциальное включение $x' \in F_0(t, x)$ может обладать ненужными периодическими решениями. Поэтому мы не можем отслеживать требуемые степени и изложенная выше схема перестает работать.

Габдрахманов [8] увидел, что в предположениях [4]–[6], подобрав нужным образом последовательность $\mu_i \rightarrow 0$, можно сузить дифференциальное включение $x' \in F_0(t, x)$ до некоторого включения $x' \in G(t, x)$ (т.е. $G(t, x) \subseteq F_0(t, x)$), которое уже не обладает соответствующими периодическими решениями, но по-прежнему пространства решений уравнений $x' = \mu_i f(t, x/\mu_i)$, $\mu_i \rightarrow 0$, сходятся к пространству решений дифференциального включения $x' \in G(t, x)$. Мы дадим новую интерпретацию наблюдению Габдрахманова.

Пространство $C_s^+(U, t_0)$ максимально продолженных вправо от точки t_0 функций описано в [1].

Множество $M \subseteq C_s^+(U, t_0)$ назовем *ограниченным* на отрезке $[t_0, t_1]$, если найдется такое число r , что $\|z|_{[t_0, t_1] \cap \pi(z)}\| \leq r$. Ниже, когда $a < 0 < T < b$ и $U = (a, b) \times \mathbb{R}^n$, все функции из ограниченного на $[0, T]$ множества определены на всем отрезке $[0, T]$.

ТЕОРЕМА 1.1.¹ Пусть

- 1) $a < 0 < T < b$, $U = (a, b) \times \mathbb{R}^n$, $r > 0$ и W — открытое ограниченное на отрезке $[0, T]$ подмножество пространства $C_s^+(U, 0)$;
- 2) $Y, Y_0 \in R_{\text{ceh}}(U)$, $Y_0 \subseteq Y$ и, если $z \in Y^+ \cap \partial W$ и $z(0) = z(T)$, то $z|_I \notin Y_0$ для любого невырожденного отрезка $I \subseteq [0, T]$;
- 3) $\{Z_i : i = 1, 2, \dots\} \subseteq R_{\text{ceh}}(U)$, $Z_i \rightarrow Y$ при $i \rightarrow \infty$, и пространство

$$\left(\lim_{i \rightarrow \infty} \text{top sup } Z_i\right) \cap \partial W$$

не содержит функций z , удовлетворяющих условию $z(0) = z(T)$.

Тогда, начиная с некоторого $i = i_0$, выполнены условия

- а) пространство $Z_i \cap \partial W$ не содержит функций z , удовлетворяющих условию $z(0) = z(T)$,
- б) степень сдвига $z \rightarrow z(T) - z(0)$ пересечения $Z_i \cap \partial W$, $i = i_0, i_0 + 1, \dots$, совпадает со степенью сдвига пересечения $Y_0 \cap \partial W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Для $\lambda \in [0, T]$ и $i = 1, 2, \dots$ положим $Z_{i,\lambda} = Y_0 *_{\lambda} Z_i$.

Здесь $Z *_{\lambda} Y$ обозначает результат подклеивания пространства Y к пространству Z , причем в качестве вспомогательной функции h берется проектирование произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ на сомножитель $\mathbb{R}$, т.е. пространство $Z *_{\lambda} Y$ при $t \leq \lambda$ совпадает с пространством Z , а при $t \geq \lambda$ совпадает с пространством Y , см. [10, § VIII.7] или [11, § 11.5].

Имеем $(Z_{i,0})_{[0,T] \times \mathbb{R}^n} = (Z_i)_{[0,T] \times \mathbb{R}^n}$ и $(Z_{i,T})_{[0,T] \times \mathbb{R}^n} = (Y_0)_{[0,T] \times \mathbb{R}^n}$.

II. Покажем, что найдется такое число $i_0 = 1, 2, \dots$, что для любого $i = i_0, i_0 + 1, \dots$ ни при каком $\lambda \in [0, T]$ задача $z \in Z_{i,\lambda}^+ \cap \partial W$, $z(0) = z(T)$ не имеет решений.

Допустив противное, получаем существование таких чисел $\lambda_j \in [0, T]$, $j = 1, 2, \dots$, и функций $z_j \in Z_{i_j,\lambda_j}^+ \cap \partial W$, что $z_j(0) = z_j(T)$ и $i_1 < i_2 < \dots$.

Переходя, если нужно, к подпоследовательности, добиваемся в силу компактности отрезка $[0, T]$ выполнения дополнительного условия: последовательность $\{\lambda_j : j = 1, 2, \dots\}$ сходится к некоторому $\Lambda \in [0, T]$.

Из I и условия 3) следует, что $\Lambda \neq 0$, так как в случае $\Lambda = 0$ в силу сходимости $Z_{i_j,\lambda_j} \rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \text{top sup } Z_i$ (теорема VIII.7.1 в [10] или теорема 11.5.1 в [12]) получаем, что множество $(\lim_{i \rightarrow \infty} \text{top sup } Z_i) \cap \partial W$ содержит функцию z , для которой $z(0) = z(T)$ (предельную для функций z_j , $j = 1, 2, \dots$), что противоречит условию 3).

Если же $\Lambda \neq 0$, то в силу сходимости $Z_{i_j,\lambda_j} \rightarrow Y_0 *_{\Lambda} Y$ (теорема VIII.7.1 в [10] или теорема 11.5.1 в [12]) получаем аналогичное противоречие с условием 2).

III. Полагая в II $\lambda = 0$, получаем выполнение условия а). Требуемое в условии б) совпадение степеней следует, например, из леммы 2.7 в [3] или из результатов [2] при рассмотрении гомотопии $\lambda \rightarrow Z_{i,\lambda}$. Теорема доказана.

¹Назовем ее принципом Габдрахманова.

2. О сходимости последовательностей пространств решений. Дифференциальное включение

$$x'' \in F(t, x, x') \quad (2.1)$$

считаем равносильным системе

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' \in F(t, x, y) \end{cases} \quad (2.2)$$

или векторному уравнению

$$u' \in F_0(t, u), \quad (2.3)$$

где

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad F_0(t, u) = \begin{pmatrix} y \\ F(t, x, y) \end{pmatrix}.$$

Именно систему (2.2) или уравнение (2.3) мы будем иметь в виду, говоря о пространстве решений включения второго порядка (2.1). Это пространство решений будем обозначать через $D'(F)$. То есть $D'(F) = D(F_0)$.

Основным элементом при нашем подходе к теории задачи Коши [9]–[12] является умение доказывать сходимость последовательностей пространств решений.

Пусть

$$-\infty \leq a < b \leq \infty, \quad -\infty \leq c < d \leq \infty, \quad U = (a, b) \times ((c, d) \times \mathbb{R}),$$

$$F: U \rightarrow \mathbb{R} - \text{многозначное отображение}; \quad (2.4)$$

$$F_i: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, - \text{последовательность многозначных отображений}. \quad (2.5)$$

К анализу положения вещей вне множества

$$E = (a, b) \times ((c, d) \times \{0\}) \quad (2.6)$$

применимы методы общей теории [9]–[12]. Специального рассмотрения требует только анализ ситуации около множества E . В этом пункте мы внесем добавления в замечания, сделанные на эту тему в [13]. Обозначим

$$V = U \setminus E. \quad (2.7)$$

Рассмотрим

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Пусть в обозначениях (2.4)–(2.7) выполнены следующие условия:

- 1) $D'(F_i, V) \rightarrow D'(F, V)$;
- 2) если $(t, x, 0) \in U$, то $F(t, x, 0) \neq \emptyset$; если при этом $\inf F(t, x, 0) \leq 0$ и $\sup F(t, x, 0) \geq 0$, то $0 \in F(t, x, 0)$;
- 3) если $(t, x, 0) \in U$ и $\inf F(t, x, 0) > 0$, то найдутся такое число $\varepsilon > 0$ и такие интегрируемые функции $\varphi_i: [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots$, что $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$, $\inf F_i(s, u, v) \geq \varphi_i(s)$ при всех $(s, u, v) \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ и $i = 1, 2, \dots$, последовательность функций

$$\Phi_i(\xi) = \int_t^\xi \varphi_i(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots,$$

равномерно сходится к монотонно возрастающей функции Φ ;

- 4) если $(t, x, 0) \in U$ и $\sup F(t, x, 0) < 0$, то найдутся такое число $\varepsilon > 0$ и такие интегрируемые функции $\varphi_i: [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots$, что $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$, $\sup F_i(s, u, v) \leq -\varphi_i(s)$ при всех $(s, u, v) \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ и $i = 1, 2, \dots$, и последовательность функций

$$\Phi_i(\xi) = \int_t^\xi \varphi_i(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots,$$

равномерно сходится к монотонно возрастающей функции Φ .

Тогда $D'(F_i) \rightarrow D'(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Начнем с обсуждения выполнения условия равностепенной непрерывности

$$\{D'(F_i) : i = 1, 2, \dots\} \in s(U).$$

Здесь ситуация не отличается от разобранной в [13].

Пусть K – произвольное компактное подмножество области U . Рассмотрим проектирование φ компакта K на плоскость $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ переменных t и x . Абсолютные значения ординат точек компакта K ограничены сверху некоторым числом $m > 0$. Так как для любого решения $z = (x_z, y_z)$ любого из рассматриваемых включений выполнена оценка $|x'_z(t)| = |y_z(t)| \leq m$, то

семейство функций $\{x_z : z \in \bigcup \{D'(F_i, K) : i = 1, 2, \dots\}\}$ равностепенно непрерывно. (2.8)

В силу утверждения 1.1 из [13] для любой точки $(t_0, x_0, y_0) \in K$ множество

$$P = \bigcap \left\{ \left[\bigcup \{ \text{Im } z : z \in Z_j, j = k, k+1, \dots, \pi(z) \subseteq (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \right. \right. \\ \left. \left. \text{Im } z \cap O_\delta x_0 \neq \emptyset \} \right] : k = 1, 2, \dots, \varepsilon > 0, \delta > 0 \right\}$$

лежит² в множестве $\varphi^{-1}\varphi(t_0, x_0, y_0)$. В силу специального вида отображения φ (оно определено как проектирование) множество $\varphi^{-1}\varphi(t_0, x_0, y_0)$ есть пересечение компакта K с прямой $x = x_0, t = t_0$, т.е. $\varphi^{-1}\varphi(t_0, x_0, y_0) = \varphi^{-1}(t_0, x_0) \cap K$.

При фиксированном $t_0 \in \mathbb{R}$ это множество пересекается с множеством E_{t_0} всего лишь по одной точке $(t_0, x_0, 0)$, поэтому мы находимся в сфере действия следствия теоремы VI.3.1 в [10] (= следствие 1 теоремы 7.3.1 в [12]), что и дает выполнение условия равностепенной непрерывности $\{D'(F_i) : i = 1, 2, \dots\} \in s(U)$.

II. Пусть теперь $(t, x, 0) \in U, \varepsilon > 0, W = (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$ и интегрируемые функции $\varphi_i: [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots$, таковы, что

$$\inf F_i(s, u, v) \geq \varphi_i(s) \\ \text{при всех } (s, u, v) \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ и } i = 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

²На самом деле, из (2.8) легко вытекает, что множества

$$\bigcap \left\{ \left[\bigcup \{ \text{Im}(x) : z = (x, y) \in Z_j, j = k, k+1, \dots, \pi(z) \subseteq (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), \right. \right. \\ \left. \left. \text{Im}(x) \cap O_\delta x_0 \neq \emptyset \} \right] : k = 1, 2, \dots, \varepsilon > 0, \delta > 0 \right\}$$

одноточечны, что и дает требуемое.

и последовательность функций

$$\Phi_i(\xi) = \int_t^\xi \varphi_i(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots,$$

равномерно сходится к монотонно возрастающей функции Φ .

Если $z \in \lim \sup_{i \rightarrow \infty} D'(F_i, W)$, то существует последовательность $z_j = (x_j, y_j) \in D'(F_{i_j}, W)$, $i_1 < i_2 < \dots$, сходящаяся к z .

Если точки $s < t$ лежат внутри отрезка $\pi(z)$, то, начиная с некоторого $j = j_0$, эти точки $s < t$ лежат и внутри отрезка $\pi(z_j)$.

Имеем

$$y(t) - y(s) = \lim_{j \rightarrow \infty} (y_j(t) - y_j(s)), \quad (2.10)$$

$$y_j(t) - y_j(s) = \int_s^t y'_j(\xi) d\xi \geq \int_s^t \varphi_j(\xi) d\xi = \Phi_j(t) - \Phi_j(s) \rightarrow \Phi(t) - \Phi(s).$$

Сопоставляя это с (2.10), получаем $y(t) - y(s) \geq \Phi(t) - \Phi(s) > 0$, а это означает, что график функции z может иметь не более одной общей точки с множеством E . Таким образом, мы находимся в предположениях §§ VI.4 и VI.5 в [10] (= §§ 7.4 и 7.5 в [12]). В силу сделанных там замечаний $D'(F_i, W) \rightarrow D'(F, W)$.

Случай, когда вместо условия (2.9) выполнено условие

$$\sup F_i(s, u, v) \leq -\varphi_i(s) \quad (2.11)$$

при всех $(s, u, v) \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ и $i = 1, 2, \dots$,

рассматривается аналогично.

III. Пусть γ – семейство всех множеств W вида, указанного в II. В силу условий 2)–4) для любой точки $(t_0, x_0, 0)$ замкнутого множества $E_0 = E \setminus \bigcup \gamma$ мы имеем $0 \in F(t_0, x_0, 0)$.

IV. Завершающая часть рассуждения повторяет конец доказательства утверждения 2.1 в [13].

Рассмотрим произвольную функцию $z = (x, y) \in \lim \sup_{i \rightarrow \infty} D'(F_i)$. Пусть

$$M = \{t \in \pi(z) : (t, z(t)) \in E_0\}.$$

В силу условия 1) и II вне множества M функция x является решением включения $x'' \in F(t, x, x')$. Нам остается проверить, что

$$x''(t) \in F(t, x(t), x'(t)) \quad \text{при почти всех } t \in M. \quad (2.12)$$

Для этого заметим, что $y|_M \equiv 0$, и поэтому

$$y'(t) = 0 \quad \text{при почти всех } t \in M. \quad (2.13)$$

Но в силу III $0 \in F(t, x(t), 0)$, поэтому выполнение условия (2.13) означает выполнение (2.12).

Таким образом, $z \in D'(F)$, что и требовалось. Утверждение доказано.

Полагая $F_i \equiv F$, получаем

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия (2.4), (2.6), (2.7), условие 2) из утверждения 2.1, а также следующие условия:

- 1) $D'(F, V) \in R_{ce}(V)$;
- 2) если $(t, x, 0) \in U$ и $\inf F(t, x, 0) > 0$, то найдутся такое число $\varepsilon > 0$ и такая интегрируемая почти всюду положительная функция $\varphi: [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$, что $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$ и $\inf F(s, u, v) \geq \varphi(s)$ при всех $(s, u, v) \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$;
- 3) если $(t, x, 0) \in U$ и $\sup F(t, x, 0) < 0$, то найдутся такое число $\varepsilon > 0$ и такая интегрируемая почти всюду положительная функция $\varphi: [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$, что $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$ и $\sup F_i(s, u, v) \leq -\varphi_i(s)$ при всех $(s, u, v) \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Тогда $D'(F) \in R_c(U)$.

То есть в этих предположениях решения включения $x'' \in F(t, x, x')$ непрерывно зависят от начальных условий.

В соответствии с общим подходом (9)–(12) утверждения типа утверждения 2.1 плодотворно используются для доказательства существования решения задачи Коши для уравнений соответствующих типов. Но это уже выходит за рамки целей этой публикации, и эти возможности мы оставляем без рассмотрений; см. также [13], где рассматривались более узкие условия.

3. Спектр Фучика. В качестве примера приложения теоремы 1.1 воспроизведем рассуждение Габдрахманова из [8], внеся в него соответствующие изменения. В [8], как и в [4]–[6] для оценки асимптотики членов уравнения используется спектр Фучика.

Спектр Фучика – это подмножество S первой четверти евклидовой плоскости, которое определяется как объединение

$$S = \bigcup \{C_m : m \in \mathbb{N}\}, \quad \text{где } C_m = \left\{(\mu, \nu) : \frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} = \frac{2}{m}\right\}.$$

Роль спектра Фучика в связи с задачей о существовании периодических решений периода 2π можно проиллюстрировать следующим образом. Рассмотрим две пары чисел $0 < \alpha_1 \leq \beta_1$ и $0 < \alpha_2 \leq \beta_2$ и обозначим через $I_{\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2}(x)$ отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$ для $x \geq 0$ и отрезок $[\alpha_2, \beta_2]$ для $x < 0$.

Рассмотрим включение $x'' \in -I(x)x$ со следующими свойствами:

$$I(x) = I_{\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2}(x), \quad \text{где } 0 < \alpha_1 \leq \beta_1, \quad 0 < \alpha_2 \leq \beta_2; \quad (3.1)$$

точка (α_1, α_2) лежит на ветви C_m спектра Фучика,

$$\text{а точка } (\beta_1, \beta_2) \text{ лежит на ветви } C_{m+1}, \text{ где } m = 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

т.е.

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} = \frac{2}{m}, \quad \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} + \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} = \frac{2}{m+1}.$$

Как мы договорились в п. 3, дифференциальное включение $x'' \in -I(x)x$ при исследовании заменяется соответствующей системой первого порядка, пространство Z решений которого принадлежит классу $R_{ceh}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ и является коническим (т.е. инвариантно относительно замен переменных $(t, x) \rightarrow (t, \lambda x)$). Поэтому максимально продолженные решения этого включения определены на всей действительной прямой и, если решение в какой-то точке отлично от $\vec{0}$, то оно уже нигде не обращается в $\vec{0}$, см. [2] и [15].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Допустим, что в предположениях (3.1), (3.2) существует ненулевое периодическое решение $x(t)$ включения $x'' \in -I(x)x$ периода 2π . Нетрудно проверить, что функция $x(t)$ есть либо решение уравнения $x'' + g_{\alpha_1, \alpha_2}(x)x = 0$ с

$$g_{\alpha_1, \alpha_2}(x) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{при } x \geq 0, \\ \alpha_2 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

либо решение уравнения $x'' + g_{\beta_1, \beta_2}(x)x = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Пусть $m < \gamma < m + 1$, $m = 1, 2, \dots$, и

W – ограниченная окрестность тождественного нуля в пространстве $C_s^+(U, 0)$. (3.3)

Уравнение $x'' + g_{\gamma, \gamma}(x)x = 0$ имеет вид линейного уравнения $x'' + \gamma x = 0$. Нетрудно проверить, что уравнение $x'' + g_{\gamma, \gamma}(x)x = 0$ не имеет ненулевых 2π -периодических решений. Поэтому в силу линейности этого уравнения степень сдвига³ границы ∂W вдоль траекторий уравнения $x'' + \gamma x = 0$ на временном отрезке длиной 2π отлична от нуля.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Рассмотрим любую пару чисел α_1 и α_2 такую, что точка (α_1, α_2) лежит между ветвями C_m и C_{m+1} спектра Фучика, т.е.

$$\frac{2}{m+1} < \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} < \frac{2}{m}.$$

Заметим, что мы можем включить параметры α_1 и α_2 в семейства $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$, $0 \leq t \leq 1$, таким образом, что $\beta_1(1) = \alpha_1$, $\beta_2(1) = \alpha_2$, $\beta_1(0) = \beta_2(0)$ и

$$\frac{2}{m+1} < \frac{1}{\sqrt{\beta_1(t)}} + \frac{1}{\sqrt{\beta_2(t)}} < \frac{2}{m}$$

при всех $0 \leq t \leq 1$. В силу замечания 3.2 и сохранения степени при гомотопии, см. [2] или [3], мы получаем, что в обозначениях (3.3) степень сдвига границы ∂W вдоль траекторий уравнения $x'' + g_{\alpha_1, \alpha_2}(x)x = 0$ отлична от нуля.

Обозначая в предположениях (3.1), (3.2) через Y пространство решений включения $x'' \in -I(x)x$, через Y_0 пространство решений уравнения

$$x'' + g_{(\alpha_1 + \beta_1)/2, (\alpha_2 + \beta_2)/2}(x)x = 0,$$

мы попадаем в силу сделанных замечаний в предположения теоремы 1.1. Из нее выводим

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $Z \in R_{\text{сех}}(U)$, пространство Z_λ получается из пространства Z при замене переменных $(t, x) \rightarrow (t, \lambda x)$, $\lambda_i \rightarrow 0$, в обозначениях (3.1), (3.2) последовательность Z_{λ_i} при $i \rightarrow \infty$ сходится к пространству решений включения $x'' \in -I(x)x$ и в обозначениях (3.3) пространство $(\lim \text{top sup}_{i \rightarrow \infty} Z_{\lambda_i}) \cap \partial W$ не содержит решений z , удовлетворяющих условию $z(0) = z(T)$. Тогда найдется такая функция $z \in Z^+$, что $z(0) = z(T)$.

В [6] доказана следующая теорема, подводящая итог развитию этой тематики, см. также [8].

³Здесь и в других аналогичных ситуациях под сдвигом границы ∂W вдоль решений из Y_1 понимается отображение $z \rightarrow z(0) - z(T)$ для $z \in \partial W \cap Y_1$. Некорректность речи допущена, чтобы вызвать ассоциацию с обычным методом сдвига.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть в обозначениях (3.1), (3.2) функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, функция $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, функция $h: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема, $\alpha_1 \leq g(x) \leq \beta_1$ при всех $x > 0$, $\alpha_2 \leq g(x) \leq \beta_2$ при всех $x < 0$, $g(0) = 0$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} r(x)/x = 0$. Пусть выполнено по крайней мере одно из следующих условий:

$$\alpha_1 < \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(s) ds \quad \text{и} \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(s) ds < \beta_1; \quad (3.4)$$

$$\alpha_2 < \limsup_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(s) ds \quad \text{и} \quad \liminf_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(s) ds < \beta_2; \quad (3.5)$$

$$\alpha_1 < \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(s) ds \quad \text{и} \quad \liminf_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(s) ds < \beta_2; \quad (3.6)$$

$$\alpha_2 < \limsup_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(s) ds \quad \text{и} \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(s) ds < \beta_1. \quad (3.7)$$

Тогда задача $x'' + g(x)x + r(x) = h(t)$, $x(0) = x(2\pi)$, $x'(0) = x'(2\pi)$ имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО не претендует на оригинальность. Оно опирается, в частности, на идеи, уже использованные в [8] и [6], хотя и содержит новые элементы. В частности, мы ссылаемся на нашу теорему 3.1.

I. Замена переменных $(t, x) \rightarrow (t, \lambda x)$ переводит уравнение $x'' + g(x)x + r(x) = h(t)$ в уравнение $x'' + g(x/\lambda)x + \lambda r(x/\lambda) = \lambda h(t)$. В силу утверждения 2.1 при $\lambda \rightarrow 0$ пространства Z_λ решений этих уравнений сходятся к пространству решений Z включения $x'' \in -I(x)x$ с $I(x) = I_{\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2}(x)$.

Для ссылки на теорему 3.1 нам осталось проверить, что пространство

$$\left(\lim_{i \rightarrow \infty} \text{top sup } Z_{\lambda_i} \right) \cap \partial W$$

не содержит решений z , удовлетворяющих условию $z(0) = z(T)$ (с $T = 2\pi$), для некоторой последовательности $\lambda_i \rightarrow 0$ и соответствующим образом подобранного множества W .

II. Пусть выполнено условие (3.4). Обозначим через m верхнюю грань значений $\sup\{|x(t)|, |x'(t)| : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ по всем решениям x включения $x'' \in -I(x)x$, удовлетворяющим условиям

$$\pi(x) = [0, 2\pi], \quad x(0) = x(2\pi) \leq 1, \quad x'(0) = x'(2\pi) = 0.$$

Обозначим через W множество функций $z = (x, y)$ пространства $C_s^+(U, 0)$, удовлетворяющих условиям

$$\sup\{x(t) : t \in [0, 2\pi] \cap \pi(z)\} < 1 \quad \text{и} \quad \sup\{|x(t)|, |y(t)| : t \in [0, 2\pi] \cap \pi(z)\} < 2m.$$

Множество W открыто в пространстве $C_s^+(U, 0)$.

Из условия (3.4) и непрерывности функции

$$\Phi(u) = \frac{1}{u} \int_0^u g(s) ds$$

вытекает существование такой последовательности $u_i \rightarrow \infty$, что предел $\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi(u_i)$ существует и лежит строго между числами α_1 и β_1 : $\alpha_1 < \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi(u_i) < \beta_1$. Положим $\lambda_i = 1/u_i$.

Производные функций

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{u_i} \int_0^{u_i x} g(s) ds = \lambda_i \int_0^{x/\lambda_i} g(s) ds = \int_0^x g\left(\frac{v}{\lambda_i}\right) dv$$

удовлетворяют неравенствам $\alpha_1 \leq |\varphi'_i| \leq \beta_1$ при $x \geq 0$ и $\alpha_2 \leq |\varphi'_i| \leq \beta_2$ при $x \leq 0$. Поэтому наш выбор последовательности $u_i \rightarrow \infty$ мы можем осуществить так, что функции φ'_i слабо сходятся к некоторой функции ψ , удовлетворяющей тем же неравенствам. В силу результатов [14] (или главы 13 в [12]) и п. 2 настоящей работы пространства решений уравнений

$$x'' + g\left(\frac{x}{\lambda_i}\right)x + \lambda_i r\left(\frac{x}{\lambda_i}\right) = \lambda_i h(t)$$

сходятся к пространству решений уравнения $x'' + \psi(x)x = 0$. При этом

$$\int_0^1 \psi(s) ds = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 g\left(\frac{v}{\lambda_i}\right) dv = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{u_i} \int_0^{u_i} g(s) ds = \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi(u_i).$$

Таким образом, $\alpha_1 < \int_0^1 \psi(s) ds < \beta_1$. Но тогда в силу замечания 3.1 среди решений уравнения $x'' + \psi(x)x = 0$ нет функций, удовлетворяющих условиям $x(0) = x(2\pi)$, $x'(0) = x'(2\pi)$ и $\sup\{x(t) : t \in [0, 2\pi] \cap \pi(z)\} = 1^4$. Ситуация здесь вполне аналогична рассмотренным в [6]. Поэтому мы можем применить теорему 3.1, что в данном случае и дает требуемое. В случае (3.4) теорема доказана.

III. Случай выполнения условия (3.5) рассматривается аналогично.

IV. Пусть выполнено условие (3.6). Если при этом

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(s) ds < \beta_1,$$

то мы попадаем в условия II, что и дает требуемое. Нам остается рассмотреть случай

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(s) ds = \beta_1. \quad (3.8)$$

Но

$$\beta_1 \geq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(s) ds,$$

поэтому (3.8) означает, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(s) ds = \beta_1. \quad (3.9)$$

Далее повторяем рассуждения II. Обозначим через m верхнюю грань значений

$$\sup\{|x(t)|, |x'(t)| : 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

⁴Функция ψ выражалась бы явно через решения $x = \cos(t\sqrt{\alpha_1} + t_0)$ или $x = \cos(t\sqrt{\beta_1} + t_0)$ при $x \geq 0$ указанных там уравнений.

по всем решениям x включения $x'' \in -I(x)x$, удовлетворяющим условиям

$$\pi(x) = [0, 2\pi], \quad x(0) = x(2\pi) \geq -1, \quad x'(0) = x'(2\pi) = 0.$$

Обозначим через W множество функций $z = (x, y)$ пространства $C_s^+(U, 0)$, удовлетворяющих условиям

$$\inf\{x(t) : t \in [0, 2\pi] \cap \pi(z)\} > -1 \quad \text{и} \quad \sup\{|x(t)|, |y(t)| : t \in [0, 2\pi] \cap \pi(z)\} < 2m.$$

Множество W открыто в пространстве $C_s^+(U, 0)$.

Из второй части условия (3.6) и непрерывности функции

$$\Phi(u) = \frac{1}{u} \int_0^u g(s) ds$$

вытекает существование такой последовательности $u_i \rightarrow -\infty$, что предел $\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi(u_i)$ существует и строго меньше β_2 : $\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi(u_i) < \beta_2$. Положим $\lambda_i = -1/u_i$.

Производные функций

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{-u_i} \int_0^{-u_i x} g(s) ds = \lambda_i \int_0^{x/\lambda_i} g(s) ds = \int_0^x g\left(\frac{v}{\lambda_i}\right) dv$$

удовлетворяют неравенствам $\alpha_1 \leq |\varphi'_i| \leq \beta_1$ при $x \geq 0$ и $\alpha_2 \leq |\varphi'_i| \leq \beta_2$ при $x \leq 0$. Поэтому наш выбор последовательности $u_i \rightarrow -\infty$ мы можем осуществить так, что функции φ'_i слабо сходятся к некоторой функции ψ , удовлетворяющей тем же неравенствам. В силу результатов [14] (или главы 13 в [12]) и п. 2 настоящей работы пространства решений уравнений

$$x'' + g\left(\frac{x}{\lambda_i}\right)x + \lambda_i r\left(\frac{x}{\lambda_i}\right) = \lambda_i h(t)$$

сходятся к пространству решений уравнения $x'' + \psi(x)x = 0$. При этом

$$-\int_0^{-1} \psi(s) ds = -\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^{-1} g\left(\frac{v}{\lambda_i}\right) dv = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{u_i} \int_0^{u_i} g(s) ds = \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi(u_i).$$

Таким образом, $-\int_0^{-1} \psi(s) ds < \beta_2$. В силу (3.9) $\int_0^1 \psi(s) ds = \beta_1$.

Но тогда в силу замечания 3.1 среди решений уравнения $x'' + \psi(x)x = 0$ нет функций, удовлетворяющих условиям

$$x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi) \quad \text{и} \quad \sup\{x(t) : t \in [0, 2\pi] \cap \pi(z)\} = 1.$$

Поэтому мы можем применить теорему 3.1, что в данном случае и дает требуемое. В случае (3.6) теорема доказана.

V. Случай выполнения условия (3.7) рассматривается аналогично IV. Теорема доказана.

На самом деле, мы заложили в наш подготовительный материал бóльшие возможности и поэтому использованные в доказательстве теоремы 3.2 рассуждения могут давать и более сильные результаты. Так, применительно к дифференциальным неравенствам аналог теоремы 3.2 может быть сформулирован следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть в обозначениях (3.1), (3.2) функции $g_1, g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, функция $r: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ непрерывна, функция $h: [0, 2\pi] \rightarrow [0, \infty)$ интегрируема, $\alpha_1 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \beta_1$ при всех $x > 0$, $\alpha_2 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \beta_2$ при всех $x < 0$, $g_1(0) = g_2(0) = 0$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} r(x)/x = 0$. Пусть выполнено по крайней мере одно из следующих условий:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &< \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g_1(s) ds & \text{и} & \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g_2(s) ds < \beta_1; \\ \alpha_2 &< \limsup_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g_1(s) ds & \text{и} & \quad \liminf_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g_2(s) ds < \beta_2; \\ \alpha_1 &< \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g_1(s) ds & \text{и} & \quad \liminf_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g_2(s) ds < \beta_2; \\ \alpha_2 &< \limsup_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g_1(s) ds & \text{и} & \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g_2(s) ds < \beta_1. \end{aligned}$$

Пусть многозначное отображение $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $F(t, x, y) \subseteq [-g_1(x), g_2(x)]x + [-r(x) - h(t), r(x) + h(t)]$ при всех $(t, x, y) \in U$ и пространство решений включения $x'' \in F(t, x, x')$ принадлежит классу $R_{\text{сеп}}(U)$. Тогда задача $x'' \in F(t, x, x')$, $x(0) = x(2\pi)$, $x'(0) = x'(2\pi)$ имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство теоремы 3.2.

Теорема 3.3 сохраняет содержательность и когда функция F является однозначной, т.е. когда речь идет о дифференциальном уравнении $x'' + F(t, x, x') = 0$, где функция F может быть и разрывной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Филиппов В. В. О гомологических свойствах множеств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 6. С. 139–160.
- [2] Филиппов В. В. Смесь методов Лерэ–Шаудера и Пуанкаре–Андроннова в задаче о периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 12. С. 1709–1711.
- [3] Filippov V. V. Remarks on periodic solutions of ordinary differential equations // J. Dynamical and Control Systems. 2000. V. 6. № 3. P. 431–451.
- [4] Gossez J.-P., Omari P. Nonresonance with respect to the Fučík spectrum for periodic solutions of second order ordinary differential equations // Nonlinear Anal. Th. Methods Appl. 1990. V. 14. P. 1079–1104.
- [5] Gossez J.-P., Omari P. Periodic solutions of a second order ordinary differential equation: a necessary and sufficient condition for nonresonance // J. of Differential Equations. 1991. V. 94. № 1. P. 67–82.
- [6] Habets P., Omari P., Zanolin F. Nonresonance conditions on the potential with respect to the Fučík spectrum for the boundary value problem // Rocky Mountain J. Math. 1995. V. 25. № 4. P. 1305–1340.
- [7] Mawhin J. Continuation theorems and periodic solutions of ordinary differential equations // Topological Methods in Differential Equations and Inclusions. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1995. P. 291–376.
- [8] Габдрахманов С. Р. Пространства решений и спектр Фучика // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 3. С. 291–298.
- [9] Филиппов В. В. Топологическое строение пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1993. Т. 48. № 1. С. 103–154.
- [10] Филиппов В. В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1993.

- [11] Filippov V. V. Basic topological structures of the theory of ordinary differential equations // Topology in Nonlinear Analysis. V. 35. Warsaw: Banach Center Publications, 1996. P. 171–192.
- [12] Filippov V. V. Basic Topological Structures of Ordinary Differential Equations. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [13] Филиппов В. В. О дифференциальных включениях второго порядка // Фундаментальная и прикладная матем. 1997. Т. 3. № 2. С. 587–623.
- [14] Филиппов В. В. О существовании периодических решений // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 5. С. 769–784.
- [15] Филиппов В. В. О теореме единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 6. С. 1005–1009.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vvfil@mech.math.msu.su

Поступило
20.06.2001