Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Н. Гарифьянов, Об одном разностном уравнении и его приложении к проблеме моментов, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 6, 821–826

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm229>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:13:41

УДК 517.96

ОБ ОДНОМ РАЗНОСТНОМ УРАВНЕНИИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИИ К ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Ф. Н. Гарифьянов

Исследовано разностное уравнение

$$\sum_{m_1, m_2} \Omega[\sigma_{m_1, m_2}(z)] = g(z), \quad z \in D,$$

где D – единичный квадрат, $g(z) \in A(D)$, $\sigma_{m_1, m_2}(z) = z + m_1 i + m_2$, $|m_1| + |m_2| = 2$, а неизвестная функция $\Omega(z) \in A(cD)$.

Библиография: 8 названий.

Введение. Пусть R – квадрат с вершинами $t_1 = -t_3 = (1+i)/2$, $t_2 = -t_4 = (1-i)/2$ и сторонами l_j , $j = \overline{1, 4}$, пронумерованными в порядке положительного обхода границы ∂R ($t \in l_1 \Rightarrow \operatorname{Im} t = -1/2$). Множество $\{\sigma_k(z)\}$: $\sigma_k(z) = z + i^k$, $k = \overline{1, 4}$, содержащее порождающие преобразования соответствующей двоякопериодической группы и преобразования, обратные к ним, обозначим через I . Эти преобразования переводят R в четыре конгруэнтных квадрата R_k , имеющих с R общую сторону. Квадраты R_k образуют “первое окаймление” R . Преобразования группы, переводящие R в конгруэнтные квадраты, которые имеют общие стороны уже не с R , а с квадратами из первого окаймления, обозначим через II . Совокупность таких квадратов назовем “вторым окаймлением” и т. д. Второе окаймление ограничивает конечную крестообразную область D , состоящую из исходного квадрата и его первого окаймления. Цель статьи – исследование линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами

$$(V\Omega)(z) \equiv \sum_{\sigma_k \in II} \Omega(\sigma_k(z)) = g(z), \quad z \in R. \quad (1)$$

Предполагаем, что функция $g(z) \in A(D)$ [1] и $g(z) \in H_\nu(\partial R)$, $0 < \nu \leq 1$ (т.е. удовлетворяет условию Гёльдера на ∂R). Решение ищется в классе четных функций, представимых в виде интеграла типа Коши

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \notin \overline{R}, \quad (2)$$

плотность которого $\varphi(\tau) \in H_\lambda(\partial R)$. Класс таких четных плотностей обозначим через B . Другими словами, функция $g(z)$ голоморфна в D , а решение $\Omega(z)$ – вне R , причем $\Omega(\infty) = 0$. Множество

$$A = C \setminus \bigcup \sigma_k(R) \quad (3)$$

не является связным. Уравнение (1) выполняется только на одной связной компоненте D , содержащей R , что не позволяет применить к нему классические методы исследования операторов свертки (см. [2] или [3]). При этом функция $g(z)$ не обязана быть аналитически продолжимой через какой-нибудь отрезок границы ∂D .

На стороне l_k введем функцию $\alpha(t) = \sigma_k(t)$, $k = \overline{1, 4}$. Получим сдвиг $\alpha(t): \partial R \rightarrow \partial R$, изменяющий ориентацию, причем $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$, $t \notin \{t_k\}$. Плотность интеграла (2) определена с точностью до слагаемого $a^+(\tau)$ и за счет подбора голоморфной в R функции $a(z)$ потребуем, чтобы

$$\varphi(\tau) + \varphi(\alpha(\tau)) = 0 \quad (4)$$

– см. теорию краевой задачи Карлемана [4]. Заметим, что уравнение (1) по первому окаймлению, т.е. в случае, когда сумма берется по четырем преобразованиям из I , было исследовано ранее автором в статье [5]. Его приложения к проблеме моментов Стиль-еса указаны в [6].

В п. 1 доказано, что однородное уравнение

$$(V\Omega)(z) = 0, \quad z \in R, \quad (5)$$

имеет только тривиальное решение. Найдены также условия разрешимости неоднородной задачи.

В п. 2 рассмотрена проблема моментов для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.)

$$\int_0^\infty F(x)x^{4k}e^{-x}(\cos x + e^{-x})dx = c_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

С помощью преобразования Бореля [7, гл. 1, § 1, п. 1] проблема моментов (6) сводится к исследованию разностного уравнения (1).

1. Введем еще один сдвиг, определив его на стороне l_k формулой $\alpha_1(t) = t - i^k$, $k = \overline{1, 4}$. Ясно, что $\alpha_1(t): \partial R \rightarrow \partial D$. Для интеграла

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\partial R} \varphi(\tau) E(\tau - z) d\tau$$

с ядерной функцией

$$E(z) = \sum_{\sigma \in II} (\sigma(z))^{-1} \quad (7)$$

справедлив аналог формулы Сохоцкого $\Phi^+(\alpha_1(t)) = -\varphi(\alpha(t)) + \Phi(t)$, если только $z \rightarrow \alpha_1(t)$, $z \in D$, $t \in \partial R$. С помощью интегрального представления (2) разностное уравнение (1) запишется в виде функционального уравнения

$$\Phi^+(\alpha_1(t)) = g^+(\alpha_1(t)), \quad t \in \partial R. \quad (8)$$

Заменим в соотношении (8) t на $\alpha(t)$ и полученное равенство вычтем из исходного. Получим интегральное уравнение

$$(T\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = g^+(\alpha_1(t)) - g^+(\alpha_1(\alpha(t))) \quad (9)$$

с ядром

$$K(t, \tau) \equiv E(\tau - \alpha_1(t)) - E(\alpha(\tau) - \alpha_1(\alpha(t))). \quad (10)$$

Сразу отметим два обстоятельства. Первое состоит в том, что ядро (10) ограничено на ∂R , т.е. уравнение (9) – это уравнение Фредгольма второго рода. Ограниченность ядра непосредственно проверяется перебором различных вариантов взаимного расположения точек τ и t на сторонах квадрата. Второе обстоятельство заключается в том, что если доопределить сдвиг $\alpha(t)$, формально определенный пока только на ∂R , в квадратах из первого окаймления аналитическим продолжением с соответствующей стороны ∂R и получить кусочно-линейную функцию $\alpha(z)$, то $\alpha_1(\alpha(t)) \neq \alpha(\alpha_1(t))$. Кроме того, $\alpha(\alpha_1(t)) \equiv t$, $\alpha_1(it) = i\alpha_1(t)$, $\alpha(it) = i\alpha(t)$.

Займемся исследованием однородного уравнения Фредгольма

$$(T\varphi)(t) = 0. \quad (11)$$

Для этого введем банахово пространство $\tilde{C}(\partial R)$ – множество четных функций $\varphi(t) \in C(\bar{l}_k)$, $k = \overline{1, 4}$, с нормой $\|\varphi\| = \max |\varphi(t)|$, $t \in \partial R$. Очевидно, что $T: \tilde{C}(\partial R) \rightarrow \tilde{C}(\partial R)$. В силу четности $\varphi(t)$ ядро (10) можно заменить новым ядром

$$\tilde{K}(t, \tau) = 2^{-1}(K(t, \tau) - K(t, -\alpha(\tau))). \quad (12)$$

Оценим модуль ядра (12), причем в силу симметрии считаем без ограничения общности, что $t \in l_1$. Возможны три варианта.

а) *Случай* $\tau \in l_1$. Тогда, вводя обозначение $w = \tau - t$, имеем

$$\tau - \alpha_1(t) = w + i, \quad \alpha(\tau) - \alpha(\alpha_1(t)) = w - i, \quad w \in [-1; 1].$$

Ядро (10) запишется в виде $K(t, \tau) = 2if(w^2)$, где

$$f(x) = 2 \left\{ \frac{3-x}{(x+1)(x+9)} - \frac{x+5}{x^2-6x+25} - \frac{2(x+5)}{x^2+6x+(-25)} \right\}.$$

Так как $f'(x) < 0$ при $x \in [0; 1]$, то

$$|\tilde{K}(t, \tau)| \leq f(0) - f(1) \leq \frac{37}{60}.$$

б) *Случай* $\tau \in l_3$. В данном случае

$$\tau - \alpha_1(t) = w + i, \quad \alpha(\tau) - \alpha(\alpha_1(t)) = w - 3i, \quad w = i + \vartheta, \quad \vartheta \in [-1; 1].$$

Поэтому при вычислении ядра (10) получим $K(t, \tau) = -2if(\vartheta^2)$. Далее,

$$f(x) = \frac{4}{x+16} + \frac{4(x+8)}{x^2+64} + \frac{2(x+2)}{x^2+4} + \frac{6(x+10)}{x^2+16x+100}, \quad x \in [0; 1]. \quad (13)$$

Правая часть формулы (13) представляет собой сумму четырех слагаемых, которые обозначим соответственно через $b_j(x)$, $j = \overline{1, 4}$. При $x_1 \in [0; 1]$ имеем $|b_j(x) - b_j(x_1)| \leq b_j$; $b_1 = 1/68$, $b_2 = 7/130$, $b_3 = 1/4$, $b_4 = 7/185$, т.е.

$$|\tilde{K}(t, \tau)| \leq 0.363.$$

в) Случай $\tau \in l_4$. Тогда

$$\tau = i\nu - \frac{1}{2}, \quad \nu \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \quad t = \mu - \frac{i}{2}, \quad \mu \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right],$$

$$\tau - \alpha_1(t) = \tau - t + i, \quad \alpha(\tau) - \alpha(\alpha_1(t)) = \tau - t + 1 - 2i.$$

Введя обозначение $\gamma = i\nu - \mu$, запишем ядро (10) в виде

$$K(t, \tau) = \frac{1 - 7i}{\gamma^2 + 12 + 7i/2} + \frac{5 - 3i}{\gamma^2 - 4 + 15i/2} - \frac{3(1 + i)}{\gamma^2 - 9i/2} + \frac{3 - i}{\gamma^2 - 2 + 3i/2} - \frac{1 + 5i}{\gamma^2 + 6 - 5i/2} + \frac{3 - 5i}{\gamma^2 + 4 + 15i/2}. \quad (14)$$

Слагаемые в правой части (14) обозначим через $I_j(\gamma)$, $j = \overline{1, 6}$ соответственно. Если $\gamma_1 = i\nu_1 - \mu_1$ и $\nu_1, \mu_1 \in [-1/2; 1/2]$, то $|I_j(\gamma) - I_j(\gamma_1)| \leq a_j$. Здесь $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.12$, $a_3 = 0.3$, $a_4 = 0.33$, $a_5 = 0.12$, $a_6 = 0.12$. Итак,

$$|\tilde{K}(t, \tau)| < 0.56.$$

Такая же оценка выполняется и при $\tau \in l_2$. Из полученных оценок модуля ядра следует, что уравнение (11) не имеет нетривиальных решений $\varphi(t) \in \tilde{C}(\partial R)$.

Пусть

$$g^+(\alpha_1(t)) \in B \iff g^+(\alpha_1(\alpha(t))) \in B.$$

В силу свойств ядра (10) уравнение (9) будет иметь единственное решение $\varphi(t) \in B$. Кроме того, решением уравнения (9) является и функция $\psi(t) = -\varphi(\alpha(t))$ — достаточно в (9) заменить τ и t на $\alpha(\tau)$ и $\alpha(t)$ соответственно. Поэтому разность $\varphi(t) - \psi(t)$ удовлетворяет (11), т.е. выполнено (4).

Теперь подчеркнем принципиальную разницу между разностным уравнением по “первому окаймлению” и рассматриваемым разностным уравнением (1) по “второму окаймлению”. Для сведения первого из них к уравнению Фредгольма второго рода использовалась краевая задача Карлемана $\Phi^+(t) = \pm \Phi^+(\alpha(t))$, заданная на всем контуре ∂R . Поэтому обратный переход от уравнения Фредгольма к разностному уравнению мог привести лишь к уравнению $(V\Omega)(z) = g(z) + c$, $z \in R$. Сказанное справедливо в предположении, что уравнение Фредгольма разрешимо. Доказательство этой разрешимости и представляло основную трудность в [5]. Но если данная трудность была преодолена, то выяснить, когда $c = 0$, было уже не сложно.

Для рассматриваемого уравнения (1) дело обстоит совсем иначе. Хотя интегральное уравнение (9) безусловно разрешимо, но интеграл типа Коши (2) может удовлетворять разностному уравнению $(V\Omega)(z) = g(z) + \vartheta(z)$. Здесь $\vartheta(z) \in A(D)$, причем $\vartheta^+(\alpha_1(t)) = \vartheta^+(\alpha_1(\alpha(t)))$, $t \in \partial R$. Множество таких функций “достаточно мощно”, поскольку множество $\alpha_1(\partial R)$ является только частью границы ∂D . Запишем окончательный результат.

ТЕОРЕМА 1. *Линейное разностное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено счетное число условий разрешимости*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \varphi(\tau) E^{(2j)}(\tau) d\tau = g^{(2j)}(0), \quad j = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Здесь $\varphi(t)$ — единственное решение уравнения (9) из класса B . Однородное уравнение (5) имеет только тривиальное решение.

2. Пусть $F(z)$ – ц.ф.э.т., ассоциированная по Борелю с решением $\Omega(z)$ разностного уравнения (1). Тогда

$$\Omega(z) = \int_0^\infty F(x) \exp(-zx) dx, \quad \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}.$$

Из структуры ядра (10) и свойств преобразования Бореля следует, что если $g(iz) = g(z)$, то

$$\Omega(iz) = \Omega(z) \iff F(iz) = -iF(z).$$

Считаем, что для данной функции $g(z)$ уравнение (1) разрешимо, т.е. выполнены условия (15). Вместо (1) получим функциональное уравнение

$$\int_0^\infty F(\tau)[4e^{-\tau} \cos \tau \operatorname{ch} z\tau + 2e^{-2\tau}(\cos z\tau + \operatorname{ch} z\tau)] d\tau = g(z), \quad z \in R. \quad (16)$$

Сразу заметим, что

$$\int_0^\infty F(x)x^{4k+2}e^{-x} \cos x dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (17)$$

Действительно, индикатор и тип ц.ф.э.т. $F(x)$ вычисляются по формулам

$$h_F(\vartheta) = \frac{\cos \vartheta + \sin \vartheta}{2}, \quad \vartheta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad h_F\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) = h_F(\vartheta), \quad \sigma_F = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пусть L_R – контур, образованный отрезком $[0; R]$, дугой $z = R \exp(i\vartheta)$, $\vartheta \in [0; \pi/2]$, и отрезком мнимой оси $[-Ri; 0]$. Тогда

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} F(z)z^{4k+2} \exp((i-1)z) dz \\ &= \int_0^\infty F(x)x^{4k+2} \exp((i-1)x) dx - \int_0^\infty F(iy)(iy)^{4k+2} \exp((i-1)iy) dy = 0, \end{aligned}$$

откуда и вытекает (17) – см. с незначительными изменениями схему, изложенную в [8, гл. 3, § 3, п. 1].

Тогда из (16) следует (6), причем $c_k = g^{(4k)}(0)/4$.

Обратно, пусть рассматривается проблема моментов (6) в классе $\tilde{B}$ ц.ф.э.т. $F(z)$, имеющих нижние функции (2) с плотностью из B . Введем степенной ряд

$$g(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k z^{4k}}{(4k)!}. \quad (18)$$

Если $g(z) \in A(D)$ и $g^+(\alpha_1(t)) \in B$, то исследование проблемы моментов (17) сводится к исследованию разностного уравнения (1). Ограничения на $g(z)$ заведомо выполнены, если у степенного ряда радиус сходимости $r > \sqrt{5/2}$. Последнее неравенство легко проверить. В частности, класс $\tilde{B}$ является классом единственности интерполяционной задачи (6). Сформулируем окончательный результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция (18) удовлетворяет всем условиям, наложенным ранее на коэффициент $g(z)$ уравнения (1). Тогда неоднородная проблема моментов (6) разрешима тогда и только тогда, когда для единственного решения уравнения (9) со свойством (4) выполнены условия разрешимости (15).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хавин В. П. Пространства аналитических функций // Итоги науки и техники. Математический анализ 1964 г. М.: ВИНТИ, 1966. С. 76–174.
- [2] Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
- [3] Коробейник Ю. В. О решениях некоторых функциональных уравнений в классе функций, аналитических в выпуклых областях // Матем. сб. 1968. Т. 75. С. 225–234.
- [4] Чибрикова Л. И. О граничных задачах для прямоугольника // Ученые зап. Казанского ун-та. 1964. Т. 123. № 9. С. 15–39.
- [5] Гарифьянов Ф. Н. Проблема обращения особого интеграла и разностные уравнения для функций, аналитических вне квадрата // Изв. вузов. Сер. матем. 1993. № 7. С. 7–16.
- [6] Гарифьянов Ф. Н. Моменты Стильтьеса целых функций экспоненциального типа // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 5. С. 674–679.
- [7] Бибербах Л. Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.
- [8] Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980.

Казанская государственная
сельскохозяйственная академия

Поступило
18.05.2000