Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Заставный, Теорема о нулях целых функций и ее применение, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 2, 192–207

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm23>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:53:07

УДК 517.5

ТЕОРЕМА О НУЛЯХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

В. П. Заставный

Рассматриваются целые функции экспоненциального типа $\leq \sigma$, ограниченные и вещественные на $\mathbb{R}$, для которых выполняется оценка $(-1)^k f(k\pi/\sigma + \tau) \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Доказано, что нули таких функций вещественные и простые за исключением, быть может, точек вида $k\pi/\sigma + \tau$, которые могут быть нулями кратности не более, чем 2. Эти результаты применяются к конкретным классам функций и к вопросу устойчивости целых функций. Уточняются и дополняются некоторые результаты Поля.

Библиография: 5 названий.

Введение. В работе Поля [1, § 5] доказана следующая

ТЕОРЕМА ГУРВИЦА. Пусть $g \in L(0, \sigma)$ и $U(z) := \int_0^1 g(t) \cos zt dt$. Если $(-1)^k \times U(k\pi) > 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, то все нули функции U вещественные и простые, причем они расположены по одному в каждом интервале $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство этой теоремы основано на следующих фактах:

1) для функции U справедлива формула [1, § 5, (38)]

$$\frac{U(z)}{\sin z} = \frac{U(0)}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k U(k\pi) \left[\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right];$$

2) все нули рациональной дроби

$$\sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k U(k\pi)}{z - k\pi}$$

вещественные и простые, причем они расположены по одному в каждом интервале $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k = -n, \dots, n-1$, $n \in \mathbb{N}$;

3) теорема о нулях предельной функции.

При доказательстве существенно используется то, что указанные в теореме неравенства строгие. В п. 1 данной работы теорема Гурвица распространена на целые функции $f \not\equiv 0$ экспоненциального типа $\leq \sigma$, которые вещественны и ограничены на $\mathbb{R}$ и для которых при некоторых $n = n(f) \in \{0, 1\}$, $\tau = \tau(f) \in \mathbb{R}$ и при всех $k \in \mathbb{Z}$ выполняются неравенства $(-1)^{n+k} f(k\pi/\sigma + \tau) \geq 0$ (допускаются и нестрогие неравенства). В теореме 1 доказано, что нули таких функций вещественные и простые, за исключением, быть

может, точек вида $k\pi/\sigma + \tau$, которые могут быть нулями кратности не более, чем 2, и в каждом интервале

$$I_p := \left(\frac{(p-1)\pi}{\sigma} + \tau, \frac{p\pi}{\sigma} + \tau \right), \quad p \in \mathbb{Z},$$

может находиться лишь один нуль функции f . Доказано еще, что $\sup_{x \in \mathbb{R}} x^2 |f(x)| = +\infty$. Доказательство теоремы 1 основано на другой интерполяционной формуле (1) с использованием теоремы о промежуточных значениях.

В п. 2 теорема 1 применяется для изучения нулей функций

$$f_\alpha(x) := \int_0^\sigma g(t) \sin(tx + \alpha) dt, \quad \text{где } g \in L(0, \sigma), \quad \sigma > 0.$$

Ранее нули таких функций изучал Пойа [1] ($\sigma = 1$). Следуя ему, будем говорить, что функция g является *исключительной* на $(0, 1)$, если она кусочно постоянна, имеет конечное число точек разрыва и все ее точки разрыва являются рациональными числами. В противном случае будем говорить, что функция g является на $(0, 1)$ *функцией общего вида*. Пойа доказал следующие утверждения.

ТЕОРЕМА А. Пусть $g(t) > 0$ и не убывает на $(0, 1)$. Тогда выполнены следующие утверждения:

- 1) функция f_α имеет только вещественные нули, а если дополнительно g является функцией общего вида, то все нули f_α простые [1, § 3];
- 2) при $\alpha = \pi/2$ функция f_α имеет только простые вещественные нули; кроме того, в интервале $(0, \pi/2)$ нулей нет, а в каждом интервале $(\pi/2 + k\pi, 3\pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, содержится только один нуль [1, § 6, п. I];
- 3) если g является функцией общего вида, то при $\alpha = 0$ функция f_α имеет только простые вещественные нули; кроме того, в интервале $(0, \pi)$ нулей нет, а в каждом интервале $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{N}$, содержится только один нуль [1, § 6, п. II].

Доказательство утверждения 1) теоремы А основано на следующих фактах:

а) теорема о нулях полиномов [1, § 2]

$$\sum_{k=0}^n a_k \cos(kx + d), \quad 0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n;$$

б) теорема о нулях предельной функции и теорема из [1, § 1], которая утверждает, что если $g(t) > 0$, не убывает на $(0, 1)$ и является функцией общего вида, то нули функции $\int_0^1 g(t) e^{zt} dt$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$.

Доказательство утверждений 2) и 3) теоремы А основано на таких фактах:

а) если $\alpha = \pi/2$ или $\alpha = 0$, то $(-1)^k f_\alpha(k\pi - \alpha) < 0$, $k \in \mathbb{N}$, и для функции f_α справедлива формула [1, § 6, (43), (44)]

$$\frac{f_\alpha(z)}{z \sin(z + \alpha)} = \frac{f_\alpha(0) + f'_\alpha(0)}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k f_\alpha(k\pi - \alpha)}{k\pi - \alpha} \left[\frac{1}{z - k\pi + \alpha} + \frac{1}{z + k\pi - \alpha} \right];$$

б) теорема о нулях рациональной дроби [1, § 5, п. IV]

$$\frac{B}{z} + \sum_{k=1}^n A_k \left[\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{z + a_k} \right],$$

где $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n$, $A_k > 0$, $1 \leq k \leq n$, $B \in \mathbb{R}$,

с) теорема о нулях предельной функции.

В п. 2 данной работы доказана теорема 2, в которой теорема А распространена на неубывающие функции g с условием $g(x) \geq 0$ и $g \neq 0$ на $(0, \sigma)$ (строгое неравенство заменено на нестрогое) и, кроме того, утверждения 2) и 3) распространены на любые значения α . При этом роль исключительных функций g выполняют классы $M_\alpha(\sigma)$, которые описываются явным образом равенствами (5), (7), (10), (12), что соответствует функциям g , для которых при некотором целом $k \neq 0$ справедливо равенство $f_\alpha((k\pi - \alpha)/\sigma) = 0$. Отметим, что если $g(t) > 0$ и не убывает на $(0, 1)$, то g является исключительной в смысле Поля тогда и только тогда, когда $g \in M_0(1)$. В случае ограниченной функции g доказательство теоремы 2 основано на простом следствии 3 из теоремы 1 и на лемме 1, в которой доказаны нестрогие неравенства

$$\begin{aligned} (-1)^k f_\alpha\left(\frac{k\pi - \alpha}{\sigma}\right) &\leq 0, & k \geq 1, \\ (-1)^k f_\alpha\left(\frac{k\pi - \alpha}{\sigma}\right) &\geq 0, & k \leq 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

а общий случай получается из этого предельным переходом.

Для выпуклых вниз функций g Поля доказал утверждения, которые уточняют расположение нулей f_α .

ТЕОРЕМА В. Пусть функция g строго возрастает и выпукла вниз на $(0, 1)$. Тогда

1) если $g(+0) = 0$, то при $\alpha = 0$ функция f_α имеет только простые вещественные нули и в каждом интервале $(k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$, содержится только один нуль [1, § 6, п. III];

2) если $g(t) > 0^1$ на $(0, 1)$ и правая производная $g'(t)$ является функцией общего вида, то при $\alpha = \pi/2$ у функции f_α в каждом интервале $(\pi/2 + k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, содержится только один нуль [1, § 6, п. IV];

3) если $g(a) = 0$ при некотором $a \in (0, 1)$, то при $\alpha = \pi/2$ функция f_α имеет только простые нули, которые все вещественные (если $f_\alpha(0) > 0$), или среди ее нулей ровно два чисто мнимые, а остальные вещественные (если $f_\alpha(0) < 0$) [1, § 6, п. VI].

Доказательство утверждений 1), 2) теоремы В следующее: если $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$, то

$$(-1)^k f_\alpha\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) > 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

¹Это условие у Поля пропущено, хотя при доказательстве оно неявно используется (используется неравенство [1, (43)], доказанное при условии $g(t) > 0$).

и дальше надо воспользоваться теоремой А. Доказательство утверждения 3) теоремы В аналогично доказательству утверждения 2) теоремы А. В конце п. 2 доказано следствие 4, в котором утверждение 1) теоремы В распространено на любые значения α . Доказано также следствие 5, из которого получаются утверждения 2) и 3) теоремы В. При этом в следствиях 4 и 5 условие “ g строго возрастает” заменено на условие “ g не убывает и $g \not\equiv 0$ на $(0, \sigma)$ ”, а следствие 5 доказано без предположения, что g' является функцией общего вида. Следствия 4 и 5 вытекают из теорем 1, 2 и леммы 2, в которой доказаны нестрогие неравенства

$$(-1)^k h_\alpha \left(\frac{k\pi - \alpha}{\sigma} \right) \geq 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

(здесь $h_\alpha \equiv f_{\alpha + \pi/2}$) и найдены условия, при которых возможно равенство. Отметим еще, что из следствия 5 легко получается утверждение [1, § 6, п. V], в котором речь идет о нулях f_α при $\alpha = \pi/2$, когда функция $g(t) > 0$, строго убывает и выпукла вверх.

В п. 3 изучаются нули функции

$$F(z) := \int_0^\sigma g(t) e^{zt} dt, \quad g \in L(0, \sigma).$$

Пойа доказал следующую теорему [1, § 1] ($\sigma = 1$).

ТЕОРЕМА С. Пусть $g(t) > 0$ и не убывает на $(0, 1)$. Тогда

- 1) если g является функцией общего вида, то все нули функции F лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$;
- 2) если g является исключительной, то все нули функции F лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$ и на прямой $\operatorname{Re} z = 0$ лежит бесконечно много ее нулей.

В утверждении 1) теоремы С речь идет о том, что целая функция F является устойчивой, т.е. не имеет нулей в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. В данной работе доказана теорема 3, в которой теорема С распространена на неубывающие функции g с условием $g(t) \geq 0$ и $g \not\equiv 0$ на $(0, \sigma)$. При этом роль исключительных функций выполняет класс $\bigcup_{0 \leq \alpha < \pi} M_\alpha(\sigma)$. В первом случае доказано более сильное утверждение: F является сильно устойчивой (определение см. в п. 3). Доказательство теоремы 3, в отличие от доказательства Пойа, основано на критерии Чеботарёва для сильно устойчивых функций с использованием теоремы 2. Из теоремы 3 в качестве простого следствия 6 получается утверждение о положительной определенности специального класса функций.

В заключение отметим, что использование результатов теоремы А можно найти в [2].

1. Обозначим через B_σ , $\sigma > 0$, класс целых функций экспоненциального типа $\leq \sigma$, ограниченных на вещественной оси (класс Бернштейна).

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия

- 1) $f \in B_\sigma$, вещественна на вещественной оси и $f \not\equiv 0$;
- 2) при некоторых $n = n(f) \in \{0, 1\}$, $\tau = \tau(f) \in \mathbb{R}$ и при всех $k \in \mathbb{Z}$ выполняются неравенства

$$(-1)^{n+k} f \left(\frac{k\pi}{\sigma} + \tau \right) \geq 0.$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1) В каждом интервале

$$I_p := \left(\frac{(p-1)\pi}{\sigma} + \tau, \frac{p\pi}{\sigma} + \tau \right), \quad p \in \mathbb{Z},$$

может находиться лишь один нуль функции f , и если он есть, то он простой.

2) Выполнено равенство

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} x^2 |f(x)| = +\infty.$$

3) Все нули функции f вещественные.

4) Если при некотором $p \in \mathbb{Z}$ число $z_p := p\pi/\sigma + \tau$ является нулем функции f , то его кратность не превышает 2 и в одном из интервалов I_p и I_{p+1} нулей функции f нет. Если число z_p является нулем кратности 2, то $(-1)^{n+p} f^{(2)}(z_p) < 0$ и $(-1)^{n+p} f(x) < 0$ при $x \in I_p \cup I_{p+1}$, а числа z_{p-1} и z_{p+1} могут быть только простыми нулями.

Класс функций, удовлетворяющих условиям теоремы 1, обозначим через $B_\sigma(\tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для функций $f \in B_\sigma$ справедлива следующая интерполяционная формула (см. [3, с. 188]):

$$\sin \alpha f'(x) - \sigma \cos \alpha f(x) = \sigma \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin^2 \alpha}{(\alpha - k\pi)^2} f\left(\frac{k\pi - \alpha}{\sigma} + x\right), \quad x, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Полагая $\alpha = \sigma(x - \tau)$, получаем

$$\sin \sigma(x - \tau) f'(x) - \sigma \cos \sigma(x - \tau) f(x) = \sigma \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin^2 \sigma(x - \tau)}{(\sigma(x - \tau) - k\pi)^2} f\left(\frac{k\pi}{\sigma} + \tau\right). \quad (1)$$

Учитывая условие 2) теоремы, получаем, что при любом $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\sin \sigma(x - \tau) f'(x) - \sigma \cos \sigma(x - \tau) f(x) = (-1)^{n-1} \sigma \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \sigma(x - \tau)}{(\sigma(x - \tau) - k\pi)^2} \left| f\left(\frac{k\pi}{\sigma} + \tau\right) \right|. \quad (2)$$

Предположим, что при некотором $p \in \mathbb{Z}$ в интервале I_p есть нуль функции f . В этом случае $f(k\pi/\sigma + \tau) \neq 0$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$ (в противном случае из равенства (1) вытекает, что $f(x) = c \sin \sigma(x - \tau)$, $c \neq 0$, но у этой функции все нули в точках $k\pi/\sigma + \tau$). Если $x_0 \in I_p$ и $f(x_0) = 0$, то из равенства (2) следует, что $(-1)^{n+p} f'(x_0) > 0$. Предположим, что в интервале I_p число нулей функции f более одного. Так как f целая и $f \not\equiv 0$, то в этом интервале лишь конечное число нулей. Возьмем любые два соседние x_1 и x_2 , т.е. $x_1 < x_2$ и $f(x) \neq 0$ при $x \in (x_1, x_2)$. Считая для определенности $n + p$ четным (и значит $f'(x_i) > 0$), заключаем, что

$$\exists \xi_1, \xi_2: \quad x_1 < \xi_1 < \xi_2 < x_2, \quad f(\xi_1) > 0, \quad f(\xi_2) < 0.$$

Поэтому между ξ_1 и ξ_2 имеется еще хотя бы один нуль функции f . Полученное противоречие доказывает первое утверждение теоремы 1.

2) Предположим, что $\sup_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)| < +\infty$. Тогда функция

$$g(z) := f(z)(z - x_0)^2, \quad \text{где } x_0 \in \left(\tau, \frac{\pi}{\sigma} + \tau\right),$$

принадлежит классу $B_{\sigma}(\tau)$ и число x_0 является нулем кратности не менее, чем 2. Это противоречит первому утверждению.

3) Предположим, что $f(z_0) = 0$ при некотором $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Тогда $f(\bar{z}_0) = 0$ и, значит, функция

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - \bar{z}_0)}$$

принадлежит классу $B_{\sigma}(\tau)$. Очевидно $\sup_{\mathbb{R}} x^2 |g(x)| < +\infty$, что противоречит второму утверждению.

4) Пусть при некотором $p \in \mathbb{Z}$ число $z_p := p\pi/\sigma + \tau$ является нулем функции f . Далее доказательство разобьем на несколько подпунктов.

а) Если $f'(z_p) = 0$ и $(-1)^{n+p} f''(z_p) \geq 0$, то функция

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z - z_p)^2}$$

принадлежит классу $B_{\sigma}(\tau)$ и $\sup_{\mathbb{R}} x^2 |g(x)| < +\infty$, что противоречит второму утверждению. Следовательно, $(-1)^{n+p} f''(z_p) < 0$.

б) Если в обоих интервалах I_p и I_{p+1} имеются нули функции f , например $x_1 \in I_p$ и $x_2 \in I_{p+1}$, то функция

$$g(z) := \frac{f(z)(z - z_p)^2}{(z - x_1)(z - x_2)}$$

принадлежит классу $B_{\sigma}(\tau)$ и число z_p является нулем кратности более, чем 2, что противоречит пункту а).

с) Пусть z_p является нулем функции f кратности 2. Предположим, например, что число $x_1 \in I_p$ является нулем функции f . Тогда функция

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z - x_1)(z - z_p)}$$

принадлежит классу $B_{\sigma}(\tau)$ и $\sup_{\mathbb{R}} x^2 |g(x)| < +\infty$, что противоречит второму утверждению. Поэтому в интервале I_p нулей функции f нет. Аналогично и в интервале I_{p+1} нет нулей. По доказанному в пункте а) $(-1)^{n+p} f''(z_p) < 0$ и, значит, $(-1)^{n+p} f(x) < 0$ при $x \in I_p \cup I_{p+1}$.

д) Предположим, что z_p и z_{p-1} являются нулями функции f кратности 2. Тогда функция

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z - z_{p-1})(z - z_p)}$$

принадлежит классу $B_{\sigma}(\tau)$ и $\sup_{\mathbb{R}} x^2 |g(x)| < +\infty$, что противоречит второму утверждению.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in B_\sigma(\tau)$. Тогда для всех $m \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\sup_{\mathbb{R}} x^2 |f^{(m)}(x)| = +\infty$ и все нули функции $f^{(m)}$ вещественные и простые. Если дополнительно $f(z) \not\equiv c \sin \sigma(z - \tau)$, то нули $f^{(m)}$ располагаются по одному в каждом интервале

$$\left(\frac{(p-1)\pi}{\sigma} + \frac{m\pi}{2\sigma} + \tau, \frac{p\pi}{\sigma} + \frac{m\pi}{2\sigma} + \tau \right), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(z) \equiv c \sin \sigma(z - \tau)$, $c \neq 0$, то утверждение очевидно. Поэтому считаем, что $f(z) \not\equiv c \sin \sigma(z - \tau)$. В этом случае $f(k\pi/\sigma + \tau) \neq 0$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$. Подставляя в (2) $x = p\pi/\sigma + \pi/(2\sigma) + \tau$, получаем, что

$$(-1)^{n-1+p} f' \left(\frac{p\pi}{\sigma} + \frac{\pi}{2\sigma} + \tau \right) > 0 \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Значит, $f' \in B_\sigma(\pi/(2\sigma) + \tau)$, и осталось применить теорему 1. При $m = 1$ следствие 1 доказано, а при остальных m доказательство проводится индукцией.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функция $f \in B_\sigma$ принимает на вещественной оси вещественные значения, является четной, $f(0) > 0$ и $(-1)^{k+1} f(k\pi/\sigma) \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда выполнены следующие утверждения.

1) Имеет место оценка

$$f(x) > f(0) \frac{\sin \sigma x}{\sigma x} \quad \text{при } x \in \left(-\frac{\pi}{\sigma}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{\pi}{\sigma} \right)$$

и $f''(0) > -f(0)\sigma^2/3$.

2) В каждом интервале $((p-1)\pi/\sigma, p\pi/\sigma)$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, может находиться лишь один нуль функции f , и если он есть, то он простой. Если число $p\pi/\sigma$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, является нулем функции f , то его кратность не превышает 2.

3) Если f имеет комплексные нули, то их число с учетом кратности равно 2 и они чисто мнимые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим функцию

$$g(z) := f(z) - f(0) \frac{\sin \sigma z}{\sigma z}.$$

Очевидно, что $g(0) = g'(0) = 0$ и $g \in B_\sigma(0)$. По теореме 1 (утверждение 4) $g(x) > 0$ при $x \in (-\pi/\sigma, 0) \cup (0, \pi/\sigma)$ и $g''(0) > 0$. Поэтому

$$f(x) > f(0) \frac{\sin \sigma x}{\sigma x} \quad \text{при } x \in \left(-\frac{\pi}{\sigma}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{\pi}{\sigma} \right)$$

и $f''(0) > -f(0)\sigma^2/3$.

2) Предположим, что в некотором интервале $((p-1)\pi/\sigma, p\pi/\sigma)$ число нулей функции f с учетом кратности более одного, например, $x_1 \leq x_2$. Тогда функция

$$g(z) := \frac{f(z)z^2}{(z^2 - x_1^2)(z^2 - x_2^2)}$$

принадлежит классу $B_\sigma(0)$ и $\sup_{x \in \mathbb{R}} x^2 |g(x)| < +\infty$, что противоречит утверждению 2) теоремы 1. Если число $p\pi/\sigma$, $p \neq 0$, является нулем функции f кратности выше 2, то надо рассмотреть функцию $f(z)z^2/(\sigma^2 z^2 - p^2 \pi^2)^2$.

3) Предположим, что число $z_0 = \alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, является нулем функции f . Если $\alpha \neq 0$, то функция

$$g(z) := \frac{f(z)z^2}{(z^2 - z_0^2)(z^2 - \bar{z}_0^2)}$$

принадлежит классу $B_\sigma(0)$, и $\sup_{x \in \mathbb{R}} x^2 |g(x)| < +\infty$, что противоречит утверждению 2) теоремы 1. Поэтому $\alpha = 0$. Тогда функция $f(z)z^2/(z^2 + \beta^2)$ принадлежит классу $B_\sigma(0)$, и по теореме 1 у нее все нули вещественные.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия:

- 1) $f \in B_\sigma$, вещественна на вещественной оси и $f \not\equiv 0$;
- 2) при некоторых $n \in \{0, 1\}$, $\tau \in \mathbb{R}$ и при всех $k \in \mathbb{Z}$ выполняются неравенства

$$(-1)^{n+k} f\left(\frac{k\pi}{\sigma} + \tau\right) \leq 0, \quad k \geq 1, \quad (-1)^{n+k} f\left(\frac{k\pi}{\sigma} + \tau\right) \geq 0, \quad k \leq 0;$$

- 3) $\sup_{x \in \mathbb{R}} |xf(x)| < +\infty$.

Тогда выполнены следующие утверждения.

- 1) Все нули функции f вещественные. В интервале

$$I_p := \left(\frac{(p-1)\pi}{\sigma} + \tau, \frac{p\pi}{\sigma} + \tau \right), \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{1\},$$

может находиться лишь один нуль функции f , и если он есть, то он простой. Кроме того, $(-1)^n f(x) > 0$ при $x \in I_1 := (\tau, \pi/\sigma + \tau)$.

2) Если при некотором $k \in \{0, 1\}$ число $k\pi/\sigma + \tau$ является нулем функции f , то его кратность равна 1, а в смежных с ним интервалах I_k и I_{k+1} нулей функции f нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in (\tau, \pi/\sigma + \tau)$. Тогда $g(z) := (z - x_0)f(z) \in B_\sigma(\tau)$, и к ней можно применить теорему 1. Значит, в интервале I_1 функция g имеет единственный нуль x_0 и $(-1)^n g'(x_0) > 0$. Поэтому $f(x) \neq 0$ при $x \in I_1$, а так как еще $g'(x_0) = f(x_0)$, то $(-1)^n f(x) > 0$ при $x \in I_1$. Утверждение 1) доказано. Для доказательства утверждения 2) надо в качестве x_0 взять $k\pi/\sigma + \tau$, $k \in \{0, 1\}$, и к $g \in B_\sigma(\tau)$ применить утверждение 4) в теореме 1.

2. Начнем с предварительного утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть функция $g \in L(0, \sigma)$, $g(x) \geq 0$ и не убывает на $(0, \sigma)$, $0 \leq \alpha < \pi$, а

$$f_\alpha(x) := \int_0^\sigma g(t) \sin(tx + \alpha) dt.$$

Тогда для всех $k \in \mathbb{Z}$ выполняются неравенства

$$(-1)^k f_\alpha\left(\frac{k\pi - \alpha}{\sigma}\right) \leq 0, \quad k \geq 1, \quad (-1)^k f_\alpha\left(\frac{k\pi - \alpha}{\sigma}\right) \geq 0, \quad k \leq 0. \quad (3)$$

При этом равенство

$$f_{\alpha} \left(\frac{k\pi - \alpha}{\sigma} \right) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

возможно тогда и только тогда, когда g представима одной из формул (5), (7), (10), (12) (см. ниже), и в этом случае, если $g(x) \not\equiv 0$ на $(0, \sigma)$, то число $(k\pi - \alpha)/\sigma$ является нулем функции f_{α} кратности 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$f_{\alpha} \left(-\frac{\alpha}{\sigma} \right) = \int_0^{\sigma} g(t) \sin \left(\frac{\alpha(\sigma - t)}{\sigma} \right) dt \geq 0$$

и $f_{\alpha}(-\alpha/\sigma) = 0$ тогда и только тогда, когда либо $\alpha = 0$, либо $g(t) \equiv 0$ на $(0, \sigma)$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f_{\alpha} \left(\frac{k\pi - \alpha}{\sigma} \right) = \frac{\sigma}{k\pi - \alpha} \int_{\alpha}^{k\pi} g \left(\frac{\sigma(u - \alpha)}{k\pi - \alpha} \right) \sin u \, du. \quad (4)$$

Если k нечетное, то отрезок интегрирования в (4) разобьем на отрезки $[\alpha, \pi], [\pi, 3\pi], \dots, [k\pi - 2\pi, k\pi]$. Интеграл по каждому из этих отрезков неотрицателен, поэтому и выражение (4) неотрицательно. Если при этом $f_{\alpha}((k\pi - \alpha)/\sigma) = 0$, то очевидно

$$g(x) \equiv c_p, \quad x \in (x_{p-1}, x_p), \quad 0 \leq p \leq \frac{k-1}{2}, \quad (5)$$

где

$$x_{-1} = 0, \quad x_p = \sigma \frac{(2p+1)\pi - \alpha}{k\pi - \alpha}, \quad 0 \leq p \leq \frac{k-1}{2}, \quad 0 = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_{(k-1)/2}.$$

В этом случае

$$f_{\alpha}(x) = \frac{2}{x} \sin \left(\frac{\sigma \pi x}{k\pi - \alpha} \right) \sum_{p=0}^{(k-1)/2} c_p \sin \left(\frac{2p\pi - \alpha}{k\pi - \alpha} \sigma x + \alpha \right). \quad (6)$$

Из (5), (6) видно, что если не все c_p равны нулю, то $k \neq 1$ и число $(k\pi - \alpha)/\sigma$ является нулем функции f_{α} кратности 2.

Если k четное, то отрезок интегрирования в (4) разобьем на отрезки $[\alpha, 2\pi], [2\pi, 4\pi], \dots, [k\pi - 2\pi, k\pi]$. Интеграл по каждому из этих отрезков неположителен, поэтому и выражение (4) неположительно. Если при этом $f_{\alpha}((k\pi - \alpha)/\sigma) = 0$, то очевидно

$$g(x) \equiv c_p, \quad x \in (x_{p-1}, x_p), \quad 0 \leq p \leq \frac{k-2}{2}, \quad (7)$$

где

$$x_{-1} = 0, \quad x_p = \sigma \frac{(2p+2)\pi - \alpha}{k\pi - \alpha}, \quad 0 \leq p \leq \frac{k-2}{2}, \quad 0 \leq c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_{(k-2)/2},$$

и если $0 < \alpha < \pi$, то $c_0 = 0$. В этом случае

$$f_\alpha(x) = \frac{2}{x} \sin\left(\frac{\sigma\pi x}{k\pi - \alpha}\right) \sum_{p=0}^{(k-2)/2} c_p \sin\left(\frac{(2p+1)\pi - \alpha}{k\pi - \alpha} \sigma x + \alpha\right). \quad (8)$$

Из (7), (8) видно, что если не все c_p равны нулю, то $k \neq 2$ при $0 < \alpha < \pi$ и число $(k\pi - \alpha)/\sigma$ является нулем функции f_α кратности 2.

Рассмотрим теперь случай, когда $k \in \mathbb{Z}$ и $k \leq -1$. В этом случае

$$f_\alpha\left(\frac{k\pi - \alpha}{\sigma}\right) = \frac{\sigma}{k\pi - \alpha} \int_{-\alpha}^{-k\pi} g\left(\frac{\sigma(u + \alpha)}{\alpha - k\pi}\right) \sin u \, du. \quad (9)$$

Если k нечетное, то отрезок интегрирования в (9) разобьем на отрезки $[-\alpha, \pi]$, $[\pi, 3\pi]$, $\dots$, $[-k\pi - 2\pi, -k\pi]$. Интеграл по каждому из этих отрезков неотрицателен, поэтому выражение (9) неположительно. Если при этом $f_\alpha((k\pi - \alpha)/\sigma) = 0$, то очевидно

$$g(x) \equiv c_p, \quad x \in (x_{p-1}, x_p), \quad 0 \leq p \leq \frac{-k-1}{2}, \quad (10)$$

где

$$x_{-1} = 0, \quad x_p = \sigma \frac{(2p+1)\pi + \alpha}{\alpha - k\pi}, \quad 0 \leq p \leq \frac{-k-1}{2}, \quad 0 = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_{(-k-1)/2}.$$

В этом случае

$$f_\alpha(x) = \frac{2}{x} \sin\left(\frac{\sigma\pi x}{\alpha - k\pi}\right) \sum_{p=0}^{(-k-1)/2} c_p \sin\left(\frac{2p\pi + \alpha}{\alpha - k\pi} \sigma x + \alpha\right). \quad (11)$$

Из (10), (11) видно, что если не все c_p равны нулю, то $k \neq -1$ и число $(k\pi - \alpha)/\sigma$ является нулем функции f_α кратности 2.

Если k четное, то отрезок интегрирования в (9) разобьем на отрезки $[-\alpha, 0]$, $[0, 2\pi]$, $\dots$, $[-k\pi - 2\pi, -k\pi]$. Интеграл по каждому из этих отрезков неположителен, поэтому выражение (9) неотрицательно. Если при этом $f_\alpha((k\pi - \alpha)/\sigma) = 0$, то очевидно

$$g(x) \equiv c_p, \quad x \in (x_{p-1}, x_p), \quad 0 \leq p \leq -\frac{k}{2}, \quad (12)$$

где

$$x_{-1} = 0, \quad x_p = \sigma \frac{2p\pi + \alpha}{\alpha - k\pi}, \quad 0 \leq p \leq -\frac{k}{2}, \quad 0 = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_{-k/2}.$$

В этом случае

$$f_\alpha(x) = \frac{2}{x} \sin\left(\frac{\sigma\pi x}{\alpha - k\pi}\right) \sum_{p=0}^{-k/2} c_p \sin\left(\frac{(2p-1)\pi + \alpha}{\alpha - k\pi} \sigma x + \alpha\right). \quad (13)$$

Из равенства (13) видно, что если не все c_p равны нулю, то число $(k\pi - \alpha)/\sigma$ является нулем функции f_α кратности 2.

Будем говорить, что функция g принадлежит классу $M_\alpha(\sigma)$, $0 \leq \alpha < \pi$, $\sigma > 0$, если она представляется одной из формул (5), (7), (10), (12).

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $g \in L(0, \sigma)$, $g(x) \geq 0$, $g(x) \not\equiv 0$ и не убывает на $(0, \sigma)$, $0 \leq \alpha < \pi$, а

$$f_\alpha(x) := \int_0^\sigma g(t) \sin(tx + \alpha) dt.$$

Тогда выполнены следующие утверждения.

1) Если $g \in M_\alpha(\sigma)$, то все нули функции f_α вещественные и в каждом интервале

$$\left(\frac{(p-1) - \alpha\pi}{\sigma}, \frac{p\pi - \alpha}{\sigma} \right), \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{1\},$$

может находиться лишь один нуль, и если он есть, то он простой, а в интервале $(-\alpha/\sigma, (\pi - \alpha)/\sigma)$ нулей нет. Кроме того:

- а) среди чисел $(k\pi - \alpha)/\sigma$, $k \in \mathbb{Z}$, имеются нули f_α ;
- б) если $0 < \alpha < \pi$, то число $(k\pi - \alpha)/\sigma$ при $k \in \{\pm 1, 0, 2\}$ не является нулем f_α , а при $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1, 0, 2\}$, если это число и является нулем, то его кратность равна 2;
- в) если $\alpha = 0$, то число $k\pi/\sigma$ при $k = \pm 1$ не является нулем f_0 , при $k = 0$ это число является простым нулем, а при $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1, 0\}$, если это число и является нулем f_0 , то его кратность равна 2.

2) Если $g \notin M_\alpha(\sigma)$, то у функции f_α все нули вещественные, в каждом интервале

$$\left(\frac{(p-1)\pi - \alpha}{\sigma}, \frac{p\pi - \alpha}{\sigma} \right), \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\},$$

и в полуинтервале $(-\pi/\sigma - \alpha/\sigma, -\alpha/\sigma]$ находится ровно один нуль и он простой, а в интервале $(-\alpha/\sigma, \pi/\sigma - \alpha/\sigma)$ нулей нет. При этом число $(k\pi - \alpha)/\sigma$, $k \in \mathbb{Z}$, является нулем только в случае $k = 0$, $\alpha = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если $g \in M_\alpha(\sigma)$, то f_α удовлетворяет условиям следствия 3 при $n = 0$, $\tau = -\alpha/\sigma$ и осталось учесть результаты, полученные при доказательстве леммы 1.

2) В этом случае неравенства (3) при $k \neq 0$ строгие, а если $0 < \alpha < \pi$, то они строгие и при $k = 0$. Утверждение 2) сразу получается, если g ограничена на $(0, \sigma)$. В этом случае

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |xf_\alpha(x)| \leq 2 \lim_{x \rightarrow \sigma-0} g(x) < +\infty,$$

и можно применить следствие 3. Общий случай следует из этого предельным переходом. Пусть

$$g_n(t) := \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq \sigma - \frac{1}{n}, \\ g(\sigma - \frac{1}{n}) + t - \sigma + \frac{1}{n}, & \sigma - \frac{1}{n} \leq t \leq \sigma, \end{cases} \quad n > \sigma^{-1}. \quad (14)$$

Функции $g_n \notin M_\alpha(\sigma)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 и ограничены на $(0, \sigma)$. Значит, утверждение 2) теоремы 2 справедливо для соответствующих функций $f_{\alpha, n}$. Так как

$$\int_0^\sigma |g(t) - g_n(t)| dt = \int_{\sigma-1/n}^\sigma |g(t) - g_n(t)| dt \leq \int_{\sigma-1/n}^\sigma |g(t)| dt + \frac{1}{2n^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то последовательность $f_{\alpha,n}$ стремится равномерно на каждом компакте из $\mathbb{C}$ к $f_\alpha \not\equiv 0$ и поэтому все нули функции f_α вещественные. Рассмотрим сначала случай, когда $0 < \alpha < \pi$. Тогда на границе прямоугольника

$$K_p := \left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leq 1, \frac{(p-1)\pi}{\sigma} - \frac{\alpha}{\sigma} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{p\pi}{\sigma} - \frac{\alpha}{\sigma} \right\}, \quad p \in \mathbb{Z},$$

функция f_α не обращается в нуль и, значит, для всех $n \geq n(p)$ выполняется неравенство

$$|f_{\alpha,n}(z) - f_\alpha(z)| < \min_{u \in \partial K_p} |f_\alpha(u)| \leq |f_\alpha(z)| \quad \forall z \in \partial K_p.$$

По теореме Руше внутри K_p , $p \in \mathbb{Z}$, функции f_α и $f_{\alpha,n}$ при $n \geq n(p)$ имеют одинаковое число нулей.

В случае $\alpha = 0$ рассуждения остаются в силе, если вместо двух прямоугольников K_0 и K_1 рассмотреть один $K := K_0 \cup K_1$.

ЛЕММА 2. Пусть функция $g \in L(0, \sigma)$, не убывает и выпукла вниз на $(0, \sigma)$, $g(+0) = 0$, $0 \leq \alpha < \pi$, а

$$h_\alpha(x) := \int_0^\sigma g(t) \cos(tx + \alpha) dt.$$

Тогда для всех $k \in \mathbb{Z}$ выполняются неравенства

$$(-1)^k h_\alpha \left(\frac{k\pi - \alpha}{\sigma} \right) \geq 0.$$

Если при некотором $k \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство $h_\alpha((k\pi - \alpha)/\sigma) = 0$, то g представима в виде

$$g(t) = \int_0^t g_1(u) du, \quad g_1 \in M_\alpha(\sigma). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $g(t) := 0$ при $t \in [-\sigma\alpha/(k\pi - \alpha), 0]$. Тогда функция $\psi(u) := g(\sigma(u - \alpha)/(k\pi - \alpha))$ не убывает и выпукла вниз на $[0, k\pi]$ и

$$h_\alpha \left(\frac{k\pi - \alpha}{\sigma} \right) = \frac{\sigma}{k\pi - \alpha} \int_0^{k\pi} \psi(u) \cos u du. \quad (16)$$

Если k нечетное, то отрезок интегрирования в (16) разобьем на отрезки $[0, \pi]$, $[\pi, 3\pi]$, $\dots$, $[k\pi - 2\pi, k\pi]$. Интеграл по каждому из этих отрезков неположителен, поэтому и выражение (16) неположительно. Если при этом $h_\alpha((k\pi - \alpha)/\sigma) = 0$, то функция ψ равна нулю на $[0, \pi]$ и линейна на остальных отрезках, а значит, g представима в виде (15), где g_1 имеет вид (5).

Если k четное, то отрезок интегрирования в (16) разобьем на отрезки $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, $\dots$, $[k\pi - 2\pi, k\pi]$. Интеграл по каждому из этих отрезков неотрицателен, поэтому и выражение (16) неотрицательно. Если при этом $h_\alpha((k\pi - \alpha)/\sigma) = 0$, то функция ψ линейна на этих отрезках (и если $0 < \alpha < \pi$, то равна нулю на $[0, 2\pi]$), а значит, g представима в виде (15), где g_1 имеет вид (7).

Если $k \in \mathbb{Z}$, $k \leq 0$, то доказательство аналогично случаю $k \in \mathbb{N}$. Отметим только, что из равенства $h_\alpha((k\pi - \alpha)/\sigma) = 0$ вытекает представление (15), где g_1 имеет вид (10) или (12) соответственно в случаях, когда k нечетное или четное.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть функция $g \in L(0, \sigma)$, не убывает, выпукла вниз и $g(t) \not\equiv 0$ на $(0, \sigma)$, $g(+0) = 0$, $0 \leq \alpha < \pi$. Тогда все нули функции

$$h_\alpha(x) := \int_0^\sigma g(t) \cos(tx + \alpha) dt$$

вещественные и простые, при этом они расположены по одному в каждом из ниже перечисленных отрезков и только в них: если $0 \leq \alpha < \pi/2$, то в отрезках

$$\left[\frac{k\pi - \alpha}{\sigma}, \frac{k\pi + \pi/2 - \alpha}{\sigma} \right], \quad k \leq -1, \quad \text{и} \quad \left[\frac{k\pi - \pi/2 - \alpha}{\sigma}, \frac{k\pi - \alpha}{\sigma} \right], \quad k \geq 1,$$

а если $\pi/2 \leq \alpha < \pi$, то в отрезках

$$\left[\frac{k\pi - \alpha}{\sigma}, \frac{k\pi + \pi/2 - \alpha}{\sigma} \right], \quad k \leq 0, \quad \text{и} \quad \left[\frac{k\pi - \pi/2 - \alpha}{\sigma}, \frac{k\pi - \alpha}{\sigma} \right], \quad k \geq 2,$$

(во всех случаях $k \in \mathbb{Z}$). Число $(k\pi + \pi/2 - \alpha)/\sigma$, $k \in \mathbb{Z}$, является нулем только в случае $k = 0$, $\alpha = \pi/2$. Если число $(k\pi - \alpha)/\sigma$, $k \in \mathbb{Z}$, является нулем, то g представима в виде (15), а $k \notin \{\pm 1, 0, 2\}$, если $0 < \alpha < \pi$ или $k \notin \{\pm 1, 0\}$, если $\alpha = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо применить леммы 1, 2 и теоремы 1, 2. Следует только учесть, что $g \notin M_\alpha(\sigma)$ для всех $\alpha \in [0, \pi)$, и воспользоваться тождествами $h_\alpha \equiv f_{\alpha+\pi/2}$ при $0 \leq \alpha < \pi/2$ и $h_\alpha \equiv -f_{\alpha-\pi/2}$ при $\pi/2 \leq \alpha < \pi$. Если $h_\alpha((k\pi - \alpha)/\sigma) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, то по лемме 2 g представима в виде (15), где $g_1 \in M_\alpha(\sigma)$. В этом случае $xh_\alpha(x) = g(\sigma - 0) \sin(\sigma x + \alpha) - \int_0^\sigma g_1(t) \sin(tx + \alpha) dx$ и осталось применить теорему 2.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть функция $g \in L(0, \sigma)$, не убывает, выпукла вниз и $g(t) \not\equiv 0$ на $(0, \sigma)$, а

$$h(x) := \int_0^\sigma g(t) \cos tx dt.$$

Тогда выполнены следующие утверждения.

1) Имеет место оценка

$$(-1)^k h\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Если $h(k\pi/\sigma) = 0$ при некотором $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то $k \neq \pm 1$ и $g(t) - g(+0)$ представима в виде (15), где $g_1 \in M_0(\sigma)$, а нуль $k\pi/\sigma$ имеет кратность 2, если $g(\sigma - 0) = 0$ или является простым, если $g(\sigma - 0) \neq 0$.

2) Если $h(0) \geq 0$, то функция h удовлетворяет условиям теоремы 1, и все ее нули вещественные и простые, кроме случая $h(0) = 0$, когда корень $x = 0$ имеет кратность 2.

3) Если $h(0) < 0$, то функция $-h$ удовлетворяет условиям следствия 2 и выполнены следующие утверждения:

- а) если $g(\sigma - 0) \leq 0$, то все нули функции h вещественные и простые, кроме, быть может, нулей вида $k\pi/\sigma$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1, 0\}$ (см. утверждение 1);
- б) если $g(\sigma - 0) > 0$, то все нули функции h простые и среди них два чисто мнимые, а остальные вещественные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В силу леммы 2

$$(-1)^k h\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) = (-1)^k \int_0^\sigma (g(t) - g(+0)) \cos \frac{k\pi t}{\sigma} dt \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

и если имеет место равенство, то $g(t) - g(+0)$ представима в виде (15). В этом случае $xh(x) = g(\sigma - 0) \sin \sigma x - \int_0^\sigma g_1(t) \sin tx dx$, где $g_1 \in M_0(\sigma)$ и осталось применить теорему 2.

2) Если $h(0) \geq 0$, то функция h удовлетворяет условиям теоремы 1, и значит, все ее нули вещественные. Так как $g(\sigma - 0) > 0$, то в силу теоремы 1 и утверждения 1 у функции h кратных нулей нет, кроме случая $h(0) = 0$, когда корень $x = 0$ имеет кратность 2.

3) Если $h(0) < 0$, то функция $-h$ удовлетворяет условиям следствия 2, и значит, все ее нули вещественные, кроме, быть может, двух чисто мнимых простых нулей. Если $g(\sigma - 0) \leq 0$, то $h(ix) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ и поэтому мнимых нулей нет (в противном случае их число с учетом кратности не меньше 4). Если $g(\sigma - 0) > 0$, то $h(ix) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ и поэтому мнимые нули есть. Осталось применить следствие 2 и первое утверждение.

3. Целая функция F называется *устойчивой* (см. [4]), если она не имеет нулей в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. Пусть $F(z) = G(-iz) + iH(-iz)$, где G и H — целые функции, принимающие вещественные значения на вещественной прямой. Тогда функция F называется *сильно устойчивой*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $G(-iz) + (i + \zeta)H(-iz)$ устойчива при каждом $\zeta \in \mathbb{C}$ таком, что $|\zeta| < \varepsilon$ (см. [4, с. 129], а также [5, гл. IV]). Очевидно, что любая сильно устойчивая функция является устойчивой.

ТЕОРЕМА ЧЕБОТАРЁВА [4], [5]. Функция F сильно устойчива тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) G и H не имеют общих нулей и для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, функция $\lambda G + \mu H$ не имеет нулей в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;

2) неравенство

$$G(x)H'(x) - G'(x)H(x) > 0$$

выполняется хотя бы для одного значения $x_0 \in \mathbb{R}$.

Кроме того, при выполнении условий 1) и 2) указанное неравенство выполняется для всех $x \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $g \in L(0, \sigma)$, $g(x) \geq 0$, $g(x) \not\equiv 0$, не убывает на $(0, \sigma)$ и

$$F(z) := \int_0^\sigma g(t)e^{zt} dt, \quad G(z) := \int_0^\sigma g(t) \cos zt dt, \quad H(z) := \int_0^\sigma g(t) \sin zt dt.$$

Тогда

1) если $g \notin \bigcup_{0 \leq \alpha < \pi} M_\alpha(\sigma)$, то F сильно устойчива и имеет место неравенство

$$G(x)H'(x) - G'(x)H(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (17)$$

2) если $g \in \bigcup_{0 \leq \alpha < \pi} M_\alpha(\sigma)$, то

а) все нули функции F находятся в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$;

- б) на прямой $\operatorname{Re} z = 0$ лежит бесконечно много ее нулей и все они простые;
- в) число прямых $\operatorname{Re} z = c$, $c \leq 0$, на которых лежат нули F , конечно и на каждой из них лежит бесконечно много ее нулей;
- г) имеет место неравенство

$$G(x)H'(x) - G'(x)H(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

которое обращается в равенство в бесконечном числе точек из $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Очевидно, G и H – целые вещественные функции и $F(z) = G(-iz) + iH(-iz)$. Рассмотрим

$$f_\alpha(z) := \int_0^\sigma g(t) \sin(tz + \alpha) dt = \sin \alpha G(z) + \cos \alpha H(z).$$

По теореме 2 все нули функции f_α вещественные и простые при всех $\alpha \in [0, \pi)$ (и значит, при всех $\alpha \in \mathbb{R}$). Отсюда сразу следует, что G и H не имеют общих нулей. Действительно, если $G(x_0) = H(x_0) = 0$ при некотором x_0 , то $x_0 \in \mathbb{R}$ и $G'(x_0) \neq 0$. Тогда при $\alpha = \operatorname{arctg}(-H'(x_0)/G'(x_0))$ число x_0 является для f_α нулем кратности не менее, чем 2, что противоречит доказанному. Осталось применить теорему Чеботарёва, при этом следует учесть, что

$$G(0)H'(0) - G'(0)H(0) = \int_0^\sigma g(t) dt \int_0^\sigma g(t)t dt > 0.$$

2) Функция g_n , определяемая равенством (14), удовлетворяет условиям теоремы 3 и, очевидно, $g_n \notin M_\alpha(\sigma)$ для всех $\alpha \in [0, \pi)$. По доказанному все нули соответствующей функции F_n лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$, и значит, нули предельной функции $F \neq 0$ лежат в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$.

Из определения класса $M_\alpha(\sigma)$ вытекает, что при некотором $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ функция g представима одним из равенств (5), (7), (10), (12), а соответствующие точки x_p , $0 \leq p \leq m(k)$, образуют арифметическую прогрессию с разностью $d := (2\pi\sigma/(k\pi - \alpha)) \operatorname{sign} k > 0$. Учитывая, что $x_0 - x_{-1} = d$ при $k = 2j$, $j \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0$, а в остальных случаях $c_0 = 0$, получаем

$$F(z) = \sum_{p=0}^{m(k)} \int_{x_{p-1}}^{x_p} g(t) e^{zt} dt = \sum_{p=0}^{m(k)} c_p z^{-1} (e^{zx_p} - e^{zx_{p-1}}) = \frac{e^{zd} - 1}{z} e^{zx_0} \sum_{p=0}^{m(k)} c_p e^{zd(p-1)}. \quad (19)$$

Из (19) видно, что числа вида $i2\pi nd^{-1}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, являются нулями функции F . Все нули F' лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ (надо утверждение 1 применить к $g_1(t) = g(t)t$). Поэтому все нули F , лежащие на мнимой оси, простые. Утверждение в) сразу следует из (19), если учесть, что не равный тождественно нулю алгебраический многочлен имеет конечное число нулей. Неравенство (18) получается предельным переходом из (17). То, что оно обращается в равенство в бесконечном числе точек из R , вытекает из соотношения $|F(ix)|^2 = G^2(x) + H^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $g \in \bigcup_{0 \leq \alpha < \pi} M_\alpha(\sigma)$ эквивалентно двум условиям:

1) $g(x) \geq 0$ и не убывает на $(0, \sigma)$;

2) при некотором $x_0 \in [0, \sigma)$ функция g является на (x_0, σ) кусочно постоянной с равностоящими узлами (т.е. интервал (x_0, σ) можно разбить на конечное число интервалов одинаковой длины, на каждом из которых g постоянна) и $g(x) \equiv 0$ на $(0, x_0)$, если $x_0 > 0$.

Действительно, если функция представима одной из формул (5), (7), (10), (12), то она, очевидно, удовлетворяет условиям 1) и 2). И наоборот, если g удовлетворяет условиям 1), 2) и $g(x) \not\equiv 0$ на $(0, \sigma)$, то у функции F из теоремы 3 имеются нули на прямой $\operatorname{Re} z = 0$ (F имеет вид (19)) и, значит, $g \in \bigcup_{0 \leq \alpha < \pi} M_\alpha(\sigma)$.

Функция $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *положительно определенной* на $\mathbb{R}$, если для всех $n \in \mathbb{N}$, всех $\{x_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ и всех $\{c_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k,j=1}^n c_k \bar{c}_j h(x_k - x_j) \geq 0.$$

Если $h \in C(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$, то по теореме Бохнера–Хинчина положительная определенность h эквивалентна неотрицательности преобразования Фурье, т.е.

$$\hat{h}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-itx} dx \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $g \in L(0, \sigma)$, $g(x) \geq 0$ и не убывает на $(0, \sigma)$, а четная функция h определяется равенствами

$$h(x) := 0 \quad \text{при } x \geq \sigma \quad \text{и} \quad h(x) := \int_x^\sigma (2u - x) g(u) g(u - x) du, \quad 0 \leq x < \sigma.$$

Тогда $h \in L(\mathbb{R})$, $\hat{h}(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, и уравнение $\hat{h}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, имеет решение тогда и только тогда, когда $g \in \bigcup_{0 \leq \alpha < \pi} M_\alpha(\sigma)$. Если дополнительно $g \in L_2(0, \sigma)$, то функция h является положительно определенной на $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если g продолжить нулем на $(\sigma, +\infty)$, то, используя связь между преобразованием Фурье и сверткой, получаем

$$G(x)H'(x) - G'(x)H(x) = \frac{1}{4}\hat{h}_0(x),$$

где

$$h_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(|u|)g(|x-u|)(x-u)(\operatorname{sign}(x-u) - \operatorname{sign} u) du.$$

Нетрудно показать, что $h_0(x) = 2h(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Осталось учесть, что свертка двух функций из $L(\mathbb{R})$ есть функция из $L(\mathbb{R})$, и применить неравенства (17), (18). Если дополнительно $g \in L_2(0, \sigma)$, то $h \in C(\mathbb{R})$, и можно применить теорему Бохнера–Хинчина.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Polya G. Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen // Math. Z. 1918. V. 2. P. 352–383.
- [2] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
- [3] Чеботарёв Н. Г., Мейман Н. Н. Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. МИАН. 1949. Т. 26.
- [4] Постников М. М. Устойчивые многочлены. М.: Наука, 1981.
- [5] Седлецкий А. М. О целых функциях класса С. Н. Бернштейна, не являющихся преобразованиями Фурье–Стилтьеса // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 3. С. 367–380.