Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Губреев, А. А. Тарасенко, Представимость матрицы де Бранжа в виде произведения Бляшке–Потапова и полнота некоторых семейств функций, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 6, 841–847

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm231>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:47:57

УДК 517.58

ПРЕДСТАВИМОСТЬ МАТРИЦЫ ДЕ БРАНЖА В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БЛЯШКЕ–ПОТАПОВА И ПОЛНОТА НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ

Г. М. Губреев, А. А. Тарасенко

В работе формулируются критерии представимости мероморфных J -растягивающих в верхней полуплоскости матриц-функций 2-го порядка (матрицы де Бранжа) в виде левого, правого и двустороннего произведения Бляшке–Потапова. Сформулированы также результаты о спектральной структуре операторов, чьи характеристические матрицы-функции являются матрицами де Бранжа.

Библиография: 15 названий.

Пусть W – произвольная мероморфная J -растягивающая в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ матрица-функция (м.-ф.), т.е.

$$W(z)JW^*(z) \geq J, \quad J^2 = E, \quad J^* = J, \quad J \neq \pm E,$$

в каждой точке голоморфности W . В силу фундаментальной теоремы Потапова [1] м.-ф. W представима в виде

$$W(z) = \pi(z)\varepsilon(z) = \varepsilon_1(z)\pi_1(z), \quad (1)$$

где π, π_1 – произведение простейших мероморфных J -растягивающих м.-ф. (произведение Бляшке–Потапова), $\varepsilon, \varepsilon_1$ – голоморфные в верхней полуплоскости J -растягивающие м.-ф., которые изображаются с помощью мультипликативных интегралов. В отличие от дефинитного случая $J = \pm E$ задача о выяснении условий, при которых в представлениях (1) одна из м.-ф. $\varepsilon, \varepsilon_1$ (или обе одновременно) тождественно равны единичной матрице E , оказалась сложной, причем все трудности этой задачи проявляются уже на м.-ф. второго порядка.

Заметка посвящена критериям представимости важного для приложений класса матриц де Бранжа [2] в виде произведения Бляшке–Потапова. Наш подход основан на простых геометрических рассуждениях, которые пригодны и в общем случае, а методы доказательств теорем опираются на теорию характеристических м.-ф. несамосопряженных операторов [3], теорию целых функций класса Картрайт [4], [5] и на свойства семейств рациональных дробей в весовых пространствах [6].

Другой подход к рассматриваемой задаче основан на теории регулярных и строго регулярных J -внутренних м.-ф. (см. [7] и список литературы, приведенный в этой работе). В этих работах интересующие нас критерии явно не формулировались, однако они могут быть получены в рамках изложенной там теории. Сравнению результатов, которые можно получить этими двумя методами, будет посвящена отдельная работа.

1. Мероморфная во всей комплексной плоскости матрица

$$W(z) = \begin{pmatrix} \delta(z) & \gamma(z) \\ \beta(z) & \alpha(z) \end{pmatrix} \quad (2)$$

называется *матрицей де Бранжа*, если

1) W является J -растягивающей в $\mathbb{C}_+$ с матрицей

$$J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix};$$

2) почти всюду на вещественной оси

$$W(x)JW^*(x) = J, \quad x \in \mathbb{R};$$

3) функция $\Phi(z) := (\delta(z)i + \gamma(z))/(\beta(z)i + \alpha(z))$ голоморфна на $\mathbb{R}$.

В силу общей процедуры отщепления элементарных делителей [1], [3], множители Бляшке–Потапова, отвечающие вещественным полюсам W заведомо входят в м.-ф. $\varepsilon, \varepsilon_1$ из представления (1). Поэтому мы должны предположить, что W *голоморфна на $\mathbb{R}$ и совершенна* [2], [8], т.е. $\lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1}\Phi(iy) = 0$. Заметим [8], что если полюсы W не лежат на вещественной оси, то условие 2) имеет место всюду на $\mathbb{R}$, а условие 3) выполняется автоматически. Будем считать также, что м.-ф. W нормирована условием

$$W(0) = E. \quad (3)$$

Обозначим через $\Lambda = \{\lambda_n\}_1^\infty$ множество всех полюсов матрицы де Бранжа W , занумерованное в порядке неубывания модулей. Для упрощения формулировок следующих ниже теорем 1, 8 будем предполагать, что все полюсы W простые. Формулировки всех остальных результатов работы остаются в силе и в случае непростых полюсов.

Матрица де Бранжа называется *правым произведением Бляшке–Потапова* [1], [3], если имеет место представление

$$W(z) = \prod_{\lambda_n \in \Lambda}^{\rightarrow} \left(E - \frac{i\lambda_n z}{\lambda_n - z} R_n^* R_n J \right), \quad (4)$$

где $R_n := (r_{n1}, r_{n2})$ – последовательность однострочных постоянных матриц, причем $R_n J R_n^* = -2 \operatorname{Im} \lambda_n^{-1}$, $\lambda_n \in \Lambda$. Стрелка в (4) указывает на порядок перемножения элементарных множителей, матрица J определяется равенством (2). Бесконечное произведение (4) сходится равномерно по крайней мере на любом компакте плоскости, который не пересекается с $\Lambda \cup \mathbb{R}$.

Аналогично, м.-ф. W называется *левым произведением Бляшке–Потапова*, если

$$W(z) = \prod_{\lambda_n \in \Lambda}^{\leftarrow} \left(E + \frac{i\lambda_n z}{\lambda_n - z} L_n^* L_n J \right), \quad L_n J L_n^* = 2 \operatorname{Im} \lambda_n^{-1}, \quad (5)$$

где $L_n := (l_{n1}, l_{n2})$ – последовательность постоянных однострочных матриц. И, наконец, м.-ф. W называется *двусторонним произведением Бляшке–Потапова*, если одновременно имеют место представления (4), (5).

Каждая матрица де Бранжа (2) допускает вещественное представление [8]

$$W(z) = \frac{1}{S(z)} \begin{pmatrix} d(z) & c(z) \\ -b(z) & a(z) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

в котором a, b, c, d – целые вещественные функции, причем функция $E(z) := a(z) - b(z)i$ удовлетворяет неравенству

$$|E(\bar{z})| < |E(z)|, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Поэтому каждая матрица де Бранжа порождает пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ [2], состоящее из таких целых функций F , что

- 1) $F/E, F^*/E$ – функции ограниченного вида и неположительного среднего типа в $\mathbb{C}_+$;
- 2) $\int_{\mathbb{R}} |F(x)/E(x)|^2 dx < \infty$.

Здесь использовано обозначение $F^*(z) := \overline{F(\bar{z})}$, а средний тип голоморфной в $\mathbb{C}_+$ функции f вычисляется по формуле

$$h(f) = \limsup_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log |f(iy)|}{y}.$$

Кроме того, целая функция S из представления (6), обладает такими свойствами:

- 1) $S/E, S^*/E$ суть функции ограниченного вида и неположительного среднего типа в $\mathbb{C}_+$;
- 2) $\int_{\mathbb{R}} \frac{|S(x)/E(x)|^2}{1+x^2} dx < \infty$.

Целые функции S , удовлетворяющие этим двум условиям, называются *сопутствующими пространству $\mathcal{H}(E)$* .

Пространство $\mathcal{H}(E)$ является гильбертовым пространством целых функций со скалярным произведением

$$\langle F, G \rangle := \int_{\mathbb{R}} F(x) \overline{G^*(x)} |E(x)|^{-2} dx,$$

а ядро

$$k(z, \lambda) = \frac{b(z)\overline{a(\lambda)} - a(z)\overline{b(\lambda)}}{\pi(z - \bar{\lambda})}$$

является воспроизводящим, т.е. $\langle F(x), k(x, \lambda) \rangle = F(\lambda)$, $F \in \mathcal{H}(E)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

2. Итак, мы рассматриваем совершенные матрицы де Бранжа (2), не имеющие полюсов на $\mathbb{R}$. Более того, для упрощения формулировок будем считать, что на вещественной оси нет и ложных полюсов W , т.е. $S(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ (ложных невещественных полюсов быть не может).

В пространстве де Бранжа $\mathcal{H}(E)$, порожденном представлением (6), рассмотрим оператор

$$(BF)(z) := \frac{F(z)S(0) - S(z)F(0)}{zS(0)}, \quad F \in \mathcal{H}(E). \quad (7)$$

Несложные вычисления [9] показывают, что оператор $B - B^*$ не более, чем двумерен и характеристическая м.-ф. оператора B равна матрице де Бранжа W . Далее, оператор B вполне несамосопряжен, а его собственные векторы совпадают с функциями семейства $\{S(z)/(z - \lambda_n) : \lambda_n \in \Lambda\}$. Из теории характеристических м.ф. [3] следует, что представимость W правым произведением Бляшке–Потапова равносильна полноте этого семейства в пространстве $\mathcal{H}(E)$. Аналогично, W есть левое произведение Бляшке–Потапова тогда и только тогда, когда полна в $\mathcal{H}(E)$ система $\{k(z, \lambda_n) : \lambda_n \in \Lambda\}$, функции которой совпадают с собственными векторами оператора B^* .

Переходя в (4), (5) к детерминантам, получим

$$\alpha(z)\delta(z) - \beta(z)\gamma(z) = \prod_{\lambda_k \in \Lambda} \frac{z - \bar{\lambda}_n}{z - \lambda_n} \frac{\lambda_n}{\bar{\lambda}_n}, \quad (8)$$

где бесконечное произведение равномерно сходится на любом компакте комплексной плоскости, не содержащем числа $\lambda_n \in \Lambda$. Из условия (3) вытекает, что функция $b(z)/z$ целая, а поэтому принадлежит $\mathcal{H}(E)$.

ТЕОРЕМА 1. а) Матрица W тогда и только тогда является правым произведением Бляшке–Потапова, когда имеет место равенство (8) и

$$\frac{b(z)}{z} \in \text{clos span}_{\mathcal{H}(E)} \left\{ \frac{S(z)}{z - \lambda_n} : \lambda_n \in \Lambda \right\}.$$

б) Матрица W тогда и только тогда является левым произведением Бляшке–Потапова, когда имеет место равенство (8) и

$$\frac{b(z)}{z} \in \text{clos span}_{\mathcal{H}(E)} \{k(z, \lambda_n) : \lambda_n \in \Lambda\}.$$

Используя стандартные формулы теории приближений, можно сформулировать критерии принадлежности “пробной” функции $b(z)/z$ указанным в формулировке теоремы подпространствам. Получаемые на этом пути критерии (особенно в случае непростых полюсов) довольно громоздки, что затрудняет их применение. Вместе с тем, если соединить теорему 1 с теорией функций класса Картрайт, а также с некоторыми результатами работы [6], то можно получить вполне обозримые формулировки.

Напомним [4], [5], что целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) φ принадлежит классу Картрайт, если

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log_+ |\varphi(x)|}{1 + x^2} dx < \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы матрица де Бранжа W была левым произведением Бляшке–Потапова, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

- 1) $\liminf_{y \rightarrow \infty} \frac{\log |\Delta^+(iy)|}{y} = \liminf_{y \rightarrow -\infty} \frac{\log |\Delta^-(iy)|}{y} = 0$, $\Delta^\pm(z) := \alpha(z) \pm i\beta(z)$; (9)
- 2) $\frac{\varphi(x)}{\Delta^+(x)} \notin L_2(\mathbb{R})$ для любой целой функции $\varphi \neq 0$ класса Картрайт и нулевой степени.

Из этой теоремы, а также из специальных интегральных представлений ц.ф.э.т. [6] выводится следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено условие 1) теоремы 2 и существует такой A_2 -вес Макенхаупта w^2 на $\mathbb{R}$ [10], что

$$|\Delta^+(x)|^2 \preceq w^2(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда м.-ф. W есть левое произведение Бляшке–Потапова.

Доказательство следующей теоремы опирается на теорему 1 и свойства семейств рациональных дробей в весовых пространствах [6].

ТЕОРЕМА 4. Если выполняется условие 1) теоремы 2 и существует такой A_2 -вес Макенхаупта w^2 , что

$$w^2(x) \preceq |\Delta^+(x)|^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

то м.-ф. W является правым произведением Бляшке–Потапова.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть м.-ф. W такова, что вес $|\Delta^+(x)|^2$ является A_2 -весом Макенхаупта на $\mathbb{R}$. Тогда W есть двустороннее произведение Бляшке–Потапова в том и только том случае, когда выполняется условие (9).

Оказывается, что о м.-ф., рассмотренных в этом следствии, можно сказать существенно больше. Это объясняется тем, что отвечающие им операторы B устроены достаточно просто.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполняется условие (9) и $|\Delta^+(x)|^2$ есть A_2 -вес на $\mathbb{R}$. Тогда оператор B , определенный равенством (7), подобен ортогональной сумме $(B_1) \oplus (-B_2)$, где B_1, B_2 – диссипативные операторы с одномерными мнимыми частями и полными семействами корневых подпространств.

Линейный ограниченный оператор с полной системой корневых подпространств называется синтезируемым [10], [11], если сужение его на любое инвариантное подпространство также обладает полнотой корневых подпространств. Из теоремы 5 вытекает синтезируемость соответствующих операторов B , поскольку имеет место

ТЕОРЕМА 6. Ортогональная сумма $B_1 \oplus (-B_2)$, где B_k – диссипативный оператор с ядерной мнимой частью и полной системой корневых подпространств, $k = 1, 2$, синтезируема.

Рассмотрим некоторую факторизацию $W(z) = W_1(z)W_2(z)$, где W_k , $k = 1, 2$, как и W , суть совершенные матрицы де Бранжа без полюсов на вещественной оси и нормированы условием (3). Из теории характеристических м.-ф. следует [3], что каждому нетривиальному инвариантному подпространству оператора B отвечает такая факторизация матрицы де Бранжа. Множитель W_1 (соответственно W_2) называется левым (соответственно правым) делителем W . Результат сформулированного ранее следствия усиливается следующим образом.

ТЕОРЕМА 7. Пусть м.-ф. W такова, что вес $|\Delta^+(x)|^2$ является A_2 -весом Макенхаупта на $\mathbb{R}$ и выполняется условие (9). Тогда каждый правый (левый) делитель W есть двустороннее произведение Бляшке–Потапова.

И, наконец, сформулируем еще одну теорему, которая существенно дополняет результаты работы [12]. Напомним [13], что последовательность $U := \{u_k\}_1^\infty$, $\operatorname{Im} u_k > 0$, удовлетворяет условию Карлесона, если

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{j \neq k} \frac{|u_k - u_j|}{|u_k - \bar{u}_j|} > 0.$$

Представим последовательность полюсов в виде $\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$, $\Lambda_{\pm} := \Lambda \cap \mathbb{C}_{\pm}$, и пусть $\bar{\Lambda}_- := \{\bar{\mu}_k : \mu_k \in \Lambda_-\}$. Предполагается, что последовательности Λ_+ , $\bar{\Lambda}_-$ снова правильно занумерованы.

ТЕОРЕМА 8. Пусть для матрицы де Бранжа W выполняются условия теоремы 7. Если последовательности Λ_+ и $\bar{\Lambda}_-$ удовлетворяют условию Карлесона, то семейства функций

$$\{k(z, \lambda_n) : \lambda_n \in \Lambda\}, \quad \left\{ \frac{(S'(\lambda_n))^{-1} S(z)}{z - \lambda_n} : \lambda_n \in \Lambda \right\}$$

образуют взаимно биортогональные безусловные базисы пространства де Бранжа $\mathcal{H}(E)$, порождаемого матрицей W .

3. Проиллюстрируем сформулированные теоремы на одном простом примере. Пусть S – сопутствующая пространству $\mathcal{H}(E)$ функция с $E(z) = e^{-i\omega z}$, $\omega > 0$, корни которой простые и не лежат на $\mathbb{R}$. Проверится, что S – ц.ф.э.т., причем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|S(x)|^2}{1+x^2} dx < \infty, \quad h_S\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \omega, \quad h_S\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq \omega, \quad (10)$$

где $h_S(\varphi)$ – индикатор роста. Существует общая процедура [8] построения по заданным E , S совершенной матрицы де Бранжа W в вещественном представлении (6). В нашем частном случае

$$W(z) = \frac{1}{S(z)} \begin{pmatrix} d(z) & c(z) \\ -\sin \omega z & \cos \omega z \end{pmatrix}, \quad S(0) = 1, \quad (11)$$

где c , d – вещественные аналитические функции, которые в $\mathbb{C}_+$ задаются формулами

$$c(z) = \cos \omega z \Phi(z) - iS(z)S^*(z)e^{i\omega z}, \quad d(z) = -\sin \omega z \Phi(z) + S(z)S^*(z)e^{i\omega z},$$

$$\Phi(z) := q + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-z} - \frac{x}{1+x^2} \right) |S(x)|^2 dx, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad q \in \mathbb{R},$$

где q определяется из равенства (3), т.е. из условия $(0) = 0$. Если еще потребовать, чтобы детерминант матрицы (11) удовлетворял равенству (8), то сопутствующая функция S однозначно будет определяться своими корнями:

$$S(z) = \text{v.p.} \prod_{\lambda_n \in \Lambda} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n} \right). \quad (12)$$

В рассматриваемом случае $\mathcal{H}(E)$ является пространством Винера–Пэли с воспроизводящим ядром

$$k(z, \lambda) = \frac{\sin \omega(z - \bar{\lambda})}{\pi(z - \bar{\lambda})}.$$

Поэтому под действием преобразования Фурье $\mathcal{H}(E)$ переходит в $L_2(-\omega, \omega)$, а связанное с м.-ф. W семейство $\{k(z, \lambda_n) : \lambda_n \in \Lambda\}$ переходит в систему экспонент

$$\{e^{i\bar{\lambda}_n t} : \lambda_n \in \Lambda\}, \quad \Lambda \cap \mathbb{R} = \emptyset, \quad (13)$$

которая в силу (10) минимальна в $L_2(-\omega, \omega)$. Если м.-ф. W есть левое произведение Бляшке–Потапова, то система (13) полна в $L_2(-\omega, \omega)$. Обратно, каждой полной и минимальной в $L_2(-\omega, \omega)$ системе (13) по формуле (12) отнесем функцию S , которая является п.ф.э.т. и удовлетворяет условиям (10), причем $h_S(\pm\pi/2) = \omega$ [4]. Поэтому S сопутствует пространству $\mathcal{H}(E)$ с $E(z) = e^{-i\omega z}$. По приведенным выше формулам построим совершенную м.-ф. (11), которая будет левым произведением Бляшке–Потапова. Таким образом, между полными и минимальными в $L_2(-\omega, \omega)$ системами (13) и левыми произведениями Бляшке–Потапова вида (11) установлено биективное соответствие.

Поскольку в нашем примере $\Delta^\pm(z) = e^{\mp i\omega z} S^{-1}(z)$, теоремы 1–4 и теорему 8 можно переформулировать в виде утверждений о семействах экспонент и о биортогональных к ним системам, не упоминая вовсе о матрицах де Бранжа. Интересно, что даже в хорошо изученном случае семейств экспонент такие переформулировки теорем 1, 3, 4 являются новыми. Теорема 2 оказалась равносильной критерию Левина полноты и минимальности семейств экспонент в пространстве $L_2(-\omega, \omega)$ [4]. Если $\Lambda = \Lambda_-$, то теорема 8 впервые доказана Павловым [14], а в общем случае – это теорема Минкина о базисах из экспонент [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Потапов В. П. Мультипликативная структура J -нерастягивающих матриц-функций // Тр. ММО. 1955. Т. 4. С. 125–236.
- [2] de Branges L. Hilbert spaces of entire functions: Prentice-Hall, 1968.
- [3] Бродский М. С., Лившиц М. С. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы // УМН. 1958. Т. 13. № 1. С. 3–85.
- [4] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
- [5] Крейн М. Г. К теории целых функций экспоненциального типа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. С. 309–326.
- [6] Губреев Г. М. Спектральная теория регулярных квазиэкспонент и регулярных B -представимых вектор-функций // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. № 6. С. 1–97.
- [7] Arov D., Dym H. Matricial Nehari problems, J -inner matrix and the Muckenhoupt condition // J. Functional Analysis. 2001. V. 181. P. 227–299.
- [8] Голицин Л. Б., Михайлова И. В. Гильбертовы пространства целых функций как объект J -теории. Препринт. Харьков: ФТИ НТ АН УССР, 1980.
- [9] Сахнович Л. А. Метод операторных тождеств и задачи анализа // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. № 1. С. 3–80.
- [10] Макрус А. С. Спектральный синтез вполне непрерывных операторов в банаховых пространствах // Функцион. анализ и его прилож. 2001. Т. 35. № 2. С. 74–78.
- [11] Никольский Н. К. Современное состояние проблемы спектрального анализа-синтеза // Теория операторов в функциональных пространствах. Новосибирск: Наука, 1977.
- [12] Губреев Г. М. Структура модельных вольтерровых операторов, биортогональные разложения и интерполяция в регулярных пространствах де Бранжа // Функцион. анализ и его прилож. 2001. Т. 35. № 2. С. 74–78.
- [13] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
- [14] Павлов Б. С. Базисность систем экспонент и условие Макенхаупта // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. С. 37–40.
- [15] Минкин А. М. Отражение показателей и безусловные базисы из экспонент // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 5. С. 109–134.

(Губреев Г. М.) Южноукраинский государственный
педагогический университет (г. Одесса)
(Тарасенко А. А.) Universidad Autonoma del Estado de Hidalgo
Pachuca, Hidalgo, Mexico
E-mail: (Губреев Г. М.) varv@rambler.ru

Поступило
28.03.2002