Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Колмыков, Отражения и трехмерность, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 6, 848–852

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm232>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:33:37

УДК 512.543.14+512.643.5+512.817.73

ОТРАЖЕНИЯ И ТРЕХМЕРНОСТЬ

В. А. Колмыков

Если размерность линейного пространства ≤ 3 , то характеристический многочлен преобразования Кокстера, ассоциированного с любой симметрической матрицей, инвариантен относительно естественного действия симметрической группы. Если размерность больше 3, то это утверждение неверно. Множество всех деревьев, имеющих в спектре соответствующего преобразования Кокстера минус единицу, трехмерно.

Библиография: 4 названия.

1. Отражения и преобразование Кокстера. Линейный оператор $R: E \rightarrow E$ называется *отражением*, если линейное пространство E можно представить в виде прямой суммы $L \oplus H$ так, что L одномерно, сужение R на H есть тождественное отображение, а сужение R на L есть умножение на -1 . Говорят, что R – *отражение относительно гиперплоскости H вдоль прямой L* . В [1] введен оператор, являющийся суперпозицией всех отражений относительно специального набора гиперплоскостей. Такой оператор стали называть преобразованием Кокстера, но из нужд теории, к которой его применяли, это понятие слегка обобщали. Одно из современных определений таково. Пусть A – вещественная $(n \times n)$ -матрица. Положим $R_i = I - A_{(i)}$, где $A_{(i)}$ – матрица, получающаяся из A занулением всех элементов, кроме тех, которые стоят в i -ом столбце. Отображение пространства строк $x \mapsto xR_i$ иногда называют *псевдоотражением*¹. Положим $C(A) = R_1 R_2 \cdots R_n$. *Преобразованием Кокстера*, связанным с матрицей A , называется преобразование пространства строк $x \mapsto xC(A)$.

2. Симметричность и независимость. Квадратную матрицу назовем *независимой*, если при любой перестановке строк и такой же перестановке столбцов характеристический многочлен соответствующего преобразования Кокстера не изменится.

Размерность 3 часто является естественным рубежом, преодолевая который, утверждение теряет истинность. Так происходит и с утверждением о независимости симметрических матриц.

ТЕОРЕМА 1. *Следующие утверждения равносильны:*

- (1) *любая вещественная симметрическая $(n \times n)$ -матрица независима;*
- (2) *число n меньше или равно 3.*

¹ Оно будет отражением, если и только если $a_{ii} = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для характеристического многочлена матрицы $C(A)$ существует красивая формула [2, гл. V, § 6, упр. 3]:

$$|\lambda I - C(A)| = \begin{vmatrix} (\lambda - 1) + a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & (\lambda - 1) + a_{22} & \lambda a_{23} & \dots & \lambda a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & (\lambda - 1) + a_{33} & \dots & \lambda a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & (\lambda - 1) + a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). При $n = 4$ утверждение (1) неверно: для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

характеристические многочлены соответствующих преобразований Кокстера равны $\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda + 1$ и $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$.

При $n \geq 5$ утверждение (1) неверно: достаточно рассмотреть матрицы

$$\begin{pmatrix} O & O \\ O & A \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} O & O \\ O & A' \end{pmatrix},$$

где A и A' – выше рассмотренные матрицы.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть A – произвольная комплексная (3×3) -матрица. Тогда

$$\begin{aligned} |\lambda I - C(A)| &= (\lambda - 1)^3 + (\lambda - 1)^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + (\lambda - 1)(a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33}) \\ &\quad - \lambda(\lambda - 1)(a_{13}a_{31} + a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32}) - \lambda(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{22}a_{13}a_{31} + a_{33}a_{12}a_{21}) \\ &\quad + (a_{12}a_{23}a_{31}\lambda^2 + a_{13}a_{32}a_{21}\lambda) + a_{11}a_{22}a_{33}. \end{aligned}$$

Очевидно, что все слагаемые, кроме $(a_{12}a_{23}a_{31}\lambda^2 + a_{13}a_{32}a_{21}\lambda)$ инвариантны относительно перестановки строк с той же перестановкой столбцов. В случае же симметричности матрицы A , и это слагаемое инвариантно относительно указанного действия. Теорема 1 доказана.

3. Преобразования Кокстера, деревья и минус единица. В п. 1 мы дали определение преобразования Кокстера как оператора, действующего в пространстве $\mathbb{R}^n$. Похожим образом² можно дать определение преобразования Кокстера произвольного вещественного линейного конечномерного пространства E .

В теории представлений [3] используется важный частный случай такого определения, когда преобразование Кокстера строится по некоторому графу³ G . Пусть $V(G)$ – множество всех вершин графа G . Всякая вещественная функция, определенная на $V(G)$,

²Схожесть состоит в том, что введение в E специального базиса и отождествление этого пространства с $\mathbb{R}^n$ индуцирует отождествление преобразования Кокстера с тем, которое было определено первым способом.

³В настоящей статье под словом “граф” понимается конечный граф без петель и кратных ребер. Иными словами, граф – это пара (V, U) , где V – конечное множество, а U – некоторое множество, состоящее из двухэлементных подмножеств V .

называется *взвешиванием*. Взвешивания естественно образуют $|V(G)|$ -мерное пространство. С каждой вершиной u связано преобразование σ_u этого пространства определяемое следующим образом: σ_u не меняет весов вершин, отличных от u , а вес вершины u заменяет на противоположный плюс сумма весов всех вершин, смежных с u . Операторы σ_u являются отражениями. *Преобразованием Кокстера* называется суперпозиция всех отражений σ_u , взятых по одному (порядок произвольный).

Итак, с каждым графом связано, вообще говоря, несколько преобразований Кокстера. Оказывается, если граф является деревом, то все эти преобразования Кокстера сопряжены (см. [3]). В этом случае все они имеют одинаковый спектр, который называется *спектром дерева*.

В [4] была показана важная роль минус единицы по отношению к спектрам деревьев. Сейчас мы покажем, что множество $\mathcal{T}_-$ всех деревьев, содержащих минус единицу в спектре, является в некотором смысле трехмерным.

4. Свободная склеечная размерность. Вложением $f: T_1 \rightarrow T_2$ деревьев называется инъективное отображение множеств их вершин $f: V(T_1) \rightarrow V(T_2)$ такое, что если вершины u и v соединены ребром в T_1 , то $f(u)$ и $f(v)$ соединены ребром в T_2 .

Будем говорить, что дерево T *склеено из деревьев* T_1 и T_2 , если существуют вложения $f_i: T_i \rightarrow T$ такие, что $f(V(T_1)) \cup f_2(V(T_2)) = V(T)$.

Пусть $\mathcal{H}$ – некоторое множество деревьев. Бинарную частичную многозначную операцию $*$ на множестве $\mathcal{H}$ (т.е. отображение $\mathcal{H}^2 \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$) назовем *склеивкой*, если для любых $T_1, T_2 \in \mathcal{H}$ любое $T \in T_1 * T_2$ (если, конечно, множество $T_1 * T_2$ непусто) склеено из T_1 и T_2 . Из определения склейки следует, что всякое дерево из $T_1 * T_2$ имеет число вершин меньше или равное сумме чисел вершин T_1 и T_2 . В частности, множество $T_1 * T_2$ конечно.

Если T склеено из T_1 и T_2 , а $f_i: T_i \rightarrow T$, $i = 1, 2$, – соответствующие вложения, то можно определить граф S , имеющий $f_1(V(T_1)) \cap f_2(V(T_2))$ множеством вершин, причем вершины u и v соединены ребром в графе S , если и только если они соединены ребром в T (если множество $f_1(V(T_1)) \cap f_2(V(T_2))$ пусто, то S – пустой граф, обозначаемый Emp ; очевидно, что если $S \neq \text{Emp}$, то S – дерево). В деревьях T_1 и T_2 существуют соответственно подграфы S_1 и S_2 , изоморфные S и такие, что $f_1(V(S_1)) = V(S) = f_2(V(S_2))$. Будем говорить, что T *склеено из T_1 и T_2 посредством S -отождествления*.

Пусть $\mathcal{H}$ – некоторое множество деревьев, а $*$ – некоторая склейка, определенная на нем. Склейку $*$ назовем *свободной*, если для любой пары (T_1, T_2) деревьев из множества $\mathcal{H}$ выполнено условие: если $T_1 * T_2$ непусто, то существует граф $S_*(T_1, T_2)$ такой, что $T_1 * T_2$ состоит из *всех* деревьев, которые можно получить из T_1 и T_2 посредством $S_*(T_1, T_2)$ -отождествления. Таким образом, с каждой свободной склейкой $*$ связано частичное отображение $S_*: \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{T} \cup \{\text{Emp}\}$.

Пусть $\mathcal{M}$ – множество, $\mathcal{P}$ – его подмножество, $\mathcal{R}$ – набор операций (возможно, частичных и многозначных), позволяющих из элементов $\mathcal{P}$ строить какие-то элементы $\mathcal{M}$, а из полученных – другие и т.д. Если в результате такого конструирования из $\mathcal{P}$ посредством $\mathcal{R}$ получается все $\mathcal{M}$, то пару $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ назовем *конструктором* множества $\mathcal{M}$; обозначается $\mathcal{M} = \langle \mathcal{P} \mid \mathcal{R} \rangle$.

Конструктор $\mathcal{K} = \langle \mathcal{P} \mid * \rangle$ назовем *свободным склеечным*, если $*$ – свободная склейка. *Мощностью* $\text{card } \mathcal{K}$ такого конструктора назовем мощность множества $\mathcal{P}$.

Пусть $\mathcal{H}$ – некоторое множество деревьев. Свободной склеечной размерностью $\mathcal{H}$ назовем $\inf \{\text{card } \mathcal{K}\}$, где $\mathcal{K}$ пробегает множество всех свободных склеечных конструкторов множества $\mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА. Свободная склеечная размерность $\mathcal{T}_-$ равна 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На множестве всех деревьев определим бинарную многозначную операцию $\ominus$ следующим образом. Если T_1 и T_2 – деревья, то множество $T_1 \ominus T_2$ состоит из *всевозможных* результатов соединений этих деревьев ребром (в T_1 и T_2 произвольным образом фиксируется по одной вершине, затем отмеченные вершины соединяются ребром). Все деревья из $T_1 \ominus T_2$ и только они получаются из T_1 и T_2 посредством Емр-отождествления. Операция $\ominus$ коммутативна. Она является свободной склейкой.

Звездой Z_n называется $(n+1)$ -вершинное дерево, в котором есть вершина степени n . Через $\mathcal{T}_+$ обозначим множество всех деревьев, не имеющих в спектре минус единицу. В [4] было доказано, что $\mathcal{T}_+ = \langle Z_1 \mid \ominus \rangle$.

1) Предположим, что свободная склеечная размерность $\mathcal{T}_-$ равна 1 и $\mathcal{T}_- = \langle X \mid * \rangle$. Тогда $X = Z_0$, так как $Z_0 \in \mathcal{T}_-$ и Z_0 нельзя склеить из других деревьев, кроме Z_0 . Если $S_*(Z_0, Z_0) = \text{Емр}$, то $Z_0 * Z_0 = \{Z_1\}$, но $Z_1 \in \mathcal{T}_+$. Если $S_*(Z_0, Z_0)$ не определено или равно Z_0 , то $\mathcal{T}_- = \langle Z_0 \mid * \rangle$ – одноэлементное множество. Противоречие.

2) Предположим, что свободная склеечная размерность $\mathcal{T}_-$ равна 2 и $\mathcal{T}_- = \langle X, Y \mid * \rangle$. Так как Z_0 нельзя склеить из других деревьев, кроме Z_0 , то одно из деревьев X или Y (для определенности, скажем, X) равно Z_0 .

Если $S_*(Z_0, Z_0) = \text{Емр}$, то $Z_0 * Z_0 = \{Z_1\}$, но $Z_1 \notin \mathcal{T}_-$. Если $S_*(Z_0, Z_0)$ не определено или равно Z_0 , то $Z_0 * Z_0 \subseteq \{Z_0\}$, поэтому $Y \notin \langle Z_0 \mid * \rangle$. Так как Z_2 нельзя склеить из элементов множества $\mathcal{T}_- \setminus \{Z_0\}$, то $Y = Z_2$.

Заметим, что $S_*(Z_0, Z_0) \neq \text{Емр}$ (иначе бы $Z_0 * Z_0 \ni Z_1 \notin \mathcal{T}_-$), $S_*(Z_0, Z_2) \neq \text{Емр}$ (иначе $Z_0 * Z_2$ содержало бы 4-вершинную цепь A_4 , но $A_4 \in \langle Z_1 \mid \ominus \rangle = \mathcal{T}_+$), аналогично $S_*(Z_2, Z_0) \neq \text{Емр}$. Поэтому $S_*(Z_0, Z_0) = Z_0$ или не определено, $S_*(Z_0, Z_2) = Z_0$ или не определено, $S_*(Z_2, Z_0) = Z_0$ или не определено. В любом из восьми возможных случаев можно утверждать, что

$$Z_0 * Z_0 \subseteq \{Z_0\}, \quad Z_0 * Z_2 \subseteq \{Z_2\} \supseteq Z_2 * Z_0.$$

Если $S_*(Z_2, Z_2)$ не определено, то $Z_2 * Z_2 = \emptyset$, а $\mathcal{T}_- = \langle Z_0, Z_2 \mid * \rangle$ – двухэлементное множество. Противоречие.

Если $S_*(Z_2, Z_2) = \text{Емр}$, то $Z_2 * Z_2$ (а вместе с ним и $\mathcal{T}_-$) содержит 6-вершинную цепь A_6 , но $A_6 \in \langle Z_1 \mid \ominus \rangle = \mathcal{T}_+$. Противоречие.

Если $S_*(Z_2, Z_2) = Z_0$, то все деревья из $Z_2 * Z_2$ имеют пять вершин. Из 5-вершинного дерева и дерева из множества $\{Z_0, Z_2\}$ не склеить Z_3 , поэтому $Z_3 \notin \langle Z_0, Z_2 \mid * \rangle = \mathcal{T}_-$. Противоречие.

Если $S_*(Z_2, Z_2) = Z_1$, то $Z_2 * Z_2$ (а вместе с ним и $\mathcal{T}_-$) содержит 4-вершинную цепь A_4 , но $A_4 \in \langle Z_1 \mid \ominus \rangle = \mathcal{T}_+$. Противоречие.

Если $S_*(Z_2, Z_2) = Z_2$, то $Z_2 * Z_2 = \{Z_2\}$, откуда $\mathcal{T}_- = \langle Z_0, Z_2 \mid * \rangle$ – двухэлементное множество. Противоречие.

3) На множестве всех деревьев определим бинарную многозначную операцию $\oplus$ следующим образом. Если T_1 и T_2 – деревья, то множество $T_1 \oplus T_2$ состоит из *всевозможных* деревьев, получающихся из T_1 и T_2 посредством Z_0 -отождествления. Операция $\oplus$ коммутативна. Она является свободной склейкой.

В [4] было доказано, что $\mathcal{T}_- = \langle Z_0, Z_2, Z_3 \mid \oplus \rangle$, поэтому свободная склеечная размерность $\mathcal{T}_-$ меньше или равна трем. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Coxeter H. S. M. The product of generators of finite group generated by reflections // Duke Math. J. 1951. № 18. P. 765–782.
- [2] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней: Пер. с франц. М.: Мир, 1972.
- [3] Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Функторы Кокстера и теорема Габриеля // УМН. 1973. Т. 28. № 2. С. 19–33.
- [4] Колмыков В. А. Преобразование Кокстера и число “ -1 ” // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 10. С. 51–56.

Воронежский государственный университет

Поступило
14.01.2002