Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Вещественные алгебраически максимальные многообразия, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 6, 853–860

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm233>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:34:47

УДК 512.7

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИ МАКСИМАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

В. А. Краснов

Для вещественных алгебраических многообразий, у которых вещественная алгебраическая группа когомологий максимальна, строится канонический гомоморфизм из группы когомологий множества комплексных точек в группу когомологий множества вещественных точек, а затем доказывается, что этот гомоморфизм является изоморфизмом.

Библиография: 5 названий.

Введение. Далее X – неособое n -мерное проективное вещественное алгебраическое многообразие, т.е. X – такая схема над $\mathbb{R}$, что произведение $X \otimes \mathbb{C}$ является n -мерным неособым проективным комплексным алгебраическим многообразием. Множество комплексных точек $X(\mathbb{C})$ является компактным комплексным n -мерным многообразием, а множество вещественных точек $X(\mathbb{R})$, если оно непустое, является n -мерным компактным дифференцируемым многообразием. Пусть $A^*(X)$ – кольцо Чжоу многообразия X , тогда определено комплексное отображение цикла

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}: A^*(X) \rightarrow H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2), \quad (0.1)$$

которое циклу $Z \in A^q(X)$ сопоставляет класс когомологий

$$[Z(\mathbb{C})]^* \in H^{2q}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

Образ этого отображения обозначим через $H_{\mathrm{ra}}^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ и назовем *вещественной алгебраической группой когомологий*. Если выполняется равенство

$$H_{\mathrm{ra}}^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2),$$

то многообразие X будем называть *алгебраически максимальным многообразием (АМ-многообразием)*. Кроме комплексного отображения цикла (0.1) определено вещественное отображение цикла

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}: A^*(X) \rightarrow H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \quad (0.2)$$

которое циклу $Z \in A^q(X)$ сопоставляет класс когомологий

$$[Z(\mathbb{R})]^* \in H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

В этой заметке доказывается следующая

Работа частично поддержана фондом INTAS, грант INTAS-OPEN-2000-268.

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть X является алгебраически максимальным многообразием, тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) для каждого $0 \leq q \leq \dim X$ однозначно определен гомоморфизм когомологий

$$\gamma^q: H^{2q}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

который удовлетворяет условию $\gamma^q \circ \text{cl}_{\mathbb{C}} = \text{cl}_{\mathbb{R}}$;

- 2) при каждом q гомоморфизм γ^q является изоморфизмом.

1. Эквивариантные когомологии. При доказательстве теоремы 0.1 мы будем применять эквивариантные когомологии и эквивариантное отображение цикла. В этом пункте приводятся без доказательства необходимые далее факты об эквивариантных когомологиях вещественного алгебраического многообразия. Подробности можно посмотреть в [1]–[3].

На множестве комплексных точек $X(\mathbb{C})$ действует группа Галуа $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, поэтому определены эквивариантные когомологии $H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$. Имеются две спектральные последовательности, которые сходятся к этим когомологиям. Первая спектральная последовательность нам не потребуется, поэтому мы ее не приводим, а вторая спектральная последовательность имеет вид

$$II_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \implies H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2). \quad (1.1)$$

Имеется несколько критериев того, что эта спектральная последовательность вырождается (см. [3]). Два из них нам потребуются.

КРИТЕРИЙ 1. Спектральная последовательность (1.1) вырождается тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = \dim H^1(G, H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)). \quad (1.2)$$

КРИТЕРИЙ 2. Спектральная последовательность (1.1) вырождается тогда и только тогда, когда образ канонического гомоморфизма (забывания вещественной структуры)

$$\alpha: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

равен инвариантной группе $H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)^G$ при $0 \leq q \leq 2 \dim X$.

Заметим, что равенство (1.2) по определению означает, что X является GM -многообразием (Галуа максимальным многообразием).

Обозначим через t образующую группы

$$H^1(\text{pt}; G, \mathbb{F}_2) = H^1(G, \mathbb{F}_2),$$

где pt – одноточечное G -пространство. Тогда гомоморфизм умножения на t будем обозначать через

$$t: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

и называть *гомоморфизмом сдвига* (см. [3]).

Кроме комплексного (0.1) и вещественного (0.2) отображений цикла определено эквивариантное отображение цикла

$$\text{cl}: A^*(X) \rightarrow H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2), \quad (1.3)$$

которое циклу $Z \in A^q(X)$ сопоставляет эквивариантный класс когомологий

$$[Z(\mathbb{C}); G]^* \in H^{2q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

Эти отображения цикла связаны между собой соотношениями

$$\alpha \circ \text{cl} = \text{cl}_{\mathbb{C}}, \quad \beta \circ \text{cl} = \text{Sq} \circ \text{cl}_{\mathbb{R}}, \quad (1.4)$$

где

$$\beta: H^{2q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{2q}(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{k=0}^{2q} H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

– гомоморфизм ограничения, а Sq – полный квадрат Стиррода.

Напомним, что многообразие X называется M -многообразием, если выполняется равенство

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = \dim H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

Для того чтобы X было M -многообразием, необходимо и достаточно, чтобы X было GM -многообразием и инволюция комплексного сопряжения $g \in G$ действовала на группе когомологий $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ тривиально. Для M -многообразия гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$$

мономорфен.

2. Доказательство основной теоремы. Сначала докажем несколько лемм.

ЛЕММА 2.1. *Каждое алгебраически максимальное многообразие является M -многообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для алгебраически максимального многообразия X выполняются равенства

$$\alpha(\text{cl}(A^q(X))) = \text{cl}_{\mathbb{C}}(A^q(X)) = H_{\text{ra}}^{2q}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = H^{2q}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

Следовательно, выполняется условие GM -максимальности из второго критерия и инволюция комплексного сопряжения $g \in G$ действует на группе когомологий $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ тривиально. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. *Для алгебраически максимального многообразия X выполняются при $0 \leq q \leq \dim X$ равенства*

$$H^{2q}(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \text{cl}(A^q(X)) + t^2(\text{cl}(A^{q-1}(X))) + \dots + t^{2q}(\text{cl}(A^0(X))).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем проверять это равенство индукцией по q . При $q = 0$ оно очевидно. Пусть это равенство выполняется при $q = k$; покажем, что тогда оно выполняется при $q = k + 1$. Применим к равенству

$$H^{2k}(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \text{cl}(A^k(X)) + t^2(\text{cl}(A^{k-1}(X))) + \cdots + t^{2k}(\text{cl}(A^0(X)))$$

гомоморфизм сдвига t^2 , тогда получим равенство

$$t^2(H^{2k}(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)) = t^2(\text{cl}(A^k(X))) + \cdots + t^{2k+2}(\text{cl}(A^0(X))).$$

Так как

$$\alpha(\text{cl}(A^{k+1}(X))) = H^{2k+2}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2),$$

то из второй спектральной последовательности следует, что выполняется равенство

$$H^{2k+2}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \text{cl}(A^{k+1}(X)) + t^2(H^{2k}(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)).$$

Следовательно,

$$H^{2k+2}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \text{cl}(A^{k+1}) + t^2(\text{cl}(A^k(X))) + \cdots + t^{2k+2}(\text{cl}(A^0(X))).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Для алгебраически максимального многообразия X и цикла $Z \in A^q(X)$ справедливо утверждение: если $\text{cl}_{\mathbb{C}}(Z) = 0$, то также $\text{cl}_{\mathbb{R}}(Z) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{cl}_{\mathbb{C}}(Z) = 0$, то

$$z = \text{cl}(Z) \in t^2(H^{2q-2}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)).$$

Поэтому из леммы 2.2 следует, что существуют циклы

$$Z_0 \in A^0(X), \quad Z_1 \in A^1(X), \quad \dots, \quad Z_{q-1} \in A^{q-1}(X)$$

такие, что выполняется равенство

$$z = t^{2q}(\text{cl}(Z_0)) + t^{2q-2}(\text{cl}(Z_1)) + \cdots + t^2(\text{cl}(Z_{q-1})).$$

Следовательно,

$$t^{2q}(\text{cl}(Z_0)) + t^{2q-2}(\text{cl}(Z_1)) + \cdots + t^2(\text{cl}(Z_{q-1})) + \text{cl}(Z) = 0.$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} & \beta(t^{2q}(\text{cl}(Z_0)) + t^{2q-2}(\text{cl}(Z_1)) + \cdots + t^2(\text{cl}(Z_{q-1})) + \text{cl}(Z)) \\ &= \text{Sq}(\text{cl}_{\mathbb{R}}(Z_0) + \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z_1) + \cdots + \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z_{q-1}) + \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z)) = 0, \\ & \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z_0) + \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z_1) + \cdots + \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z_{q-1}) + \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z) = 0. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z_0) &\in H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \quad \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z_1) \in H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \quad \dots, \\ \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z_{q-1}) &\in H^{q-1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \quad \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z) \in H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

ДОКАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1. Гомоморфизм

$$\gamma^q: H^{2q}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

определяется следующим образом. Пусть

$$z \in H^{2q}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2), \quad Z \in A^q(X)$$

– такие элементы, что $z = \text{cl}_{\mathbb{C}}(Z)$. Тогда положим $\gamma^q(z) = \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z)$. Из леммы 2.3 следует, что определение элемента $\gamma^q(z)$ зависит только от класса когомологий $z \in H^{2q}(X(\mathbb{C}))$. Поэтому гомоморфизм γ^q определен корректно и удовлетворяет условию

$$\gamma^q \circ \text{cl}_{\mathbb{C}} = \text{cl}_{\mathbb{R}}.$$

Покажем теперь, что гомоморфизм γ^q является мономорфизмом. Действительно, если $\gamma^q(z) = \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z) = 0$, то $\beta(\text{cl}(Z)) = 0$. Но для M -многообразия гомоморфизм β мономорфен, следовательно, $z = \text{cl}_{\mathbb{C}}(Z) = \alpha(\text{cl}(Z)) = 0$.

Остается заметить, что из равенства

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = \dim H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

следует эпиморфность гомоморфизма γ^q . Теорема доказана.

3. Замечания и примеры. Примером алгебраически максимального многообразия служит многообразие, обладающее клеточным разложением. Напомним, что неособое вещественное проективное алгебраическое многообразие X обладает клеточным разложением, если существует фильтрация

$$X = X_m \supset X_{m-1} \supset \cdots \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$$

замкнутыми подсхемами, причем каждая разность $X_i \setminus X_{i-1}$ представляет собой объединение схем U_{ij} , изоморфных аффинным пространствам $\mathbb{A}^{n_{ij}}$. Например, многообразие Грассмана обладает клеточным разложением. Для многообразия X с клеточным разложением имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если V_{ij} – замыкание U_{ij} , то классы рациональной эквивалентности $[V_{ij}]$ дают аддитивный базис кольца Чжоу $A^*(X)$, причем отображение цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{Z}}: A^*(X) \rightarrow H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом.

Следовательно, гомоморфизм

$$\text{cl}_{\mathbb{C}}: A^*(X) \rightarrow H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$$

эпиморфен, а поэтому X является алгебраически максимальным. Впрочем, утверждение нашей теоремы для многообразия с клеточным разложением очевидно, поэтому желательно иметь примеры алгебраически максимальных многообразий, не обладающих клеточным разложением.

Если X – алгебраически максимальное многообразие, а $Y \subset X$ – алгебраически максимальное подмногообразие, то при моноидальном преобразовании X с центром Y получится алгебраически максимальное многообразие. Пусть, например, X получается из вещественной проективной плоскости P^2 с помощью σ -процесса с центрами в трех вещественных точках, не лежащих на одной прямой. Тогда X является алгебраически максимальной поверхностью, не обладающей клеточным разложением.

Сделаем несколько замечаний про топологические свойства множества вещественных точек $X(\mathbb{R})$ алгебраически максимального многообразия. Если $n = \dim X$, то

$$\dim H^n(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = \dim H^{2n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2.$$

Поэтому многообразие $X(\mathbb{R})$ состоит из одной компоненты. Пусть $K_X \in A^1(X)$ – канонический класс многообразия, тогда

$$\begin{aligned} \text{cl}_{\mathbb{C}}(K_X) &= c_1(X(\mathbb{C})) \pmod{2} \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2), \\ \text{cl}_{\mathbb{R}}(K_X) &= w_1(X(\mathbb{R})) \in H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \end{aligned}$$

Поэтому многообразие $X(\mathbb{R})$ ориентируемое тогда и только тогда, когда

$$c_1(X(\mathbb{C})) \pmod{2} = 0.$$

Отметим еще, что для эйлеровой характеристики выполняется равенство $\chi(X(\mathbb{R})) = \sigma(X(\mathbb{C}))$, где $\sigma(X(\mathbb{C}))$ – сигнатура многообразия $X(\mathbb{C})$. Это равенство выводится из формулы Лефшеца для инволюции комплексного сопряжения.

4. Одно приложение. Через $Z_{\sigma}^q(X)$, $q \in (-\infty, n)$, обозначим группу сингулярных циклов на X . Ее элементами являются линейные комбинации с целыми коэффициентами $m_1 F_1 + \dots + m_k F_k$, где $F_i: M_i \rightarrow X$, $i = 1, \dots, k$, – отображения неособых $(n-q)$ -мерных вещественных алгебраических многообразий в X . Через

$$MU^{2q}(X(\mathbb{C})), \quad MO^q(X(\mathbb{R}))$$

обозначаются группа комплексных кобордизмов многообразия $X(\mathbb{C})$ и группа неориентированных кобордизмов многообразия $X(\mathbb{R})$ соответственно. Определены отображения цикла

$$\text{CL}_{\mathbb{C}}: Z_{\sigma}^q(X) \rightarrow MU^{2q}(X(\mathbb{C})), \quad (4.1)$$

$$\text{CL}_{\mathbb{R}}: Z_{\sigma}^q(X) \rightarrow MO^q(X(\mathbb{R})). \quad (4.2)$$

В работе [4] было доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть многообразие X обладает клеточным разложением и является M -многообразием. Тогда для каждого $q \in \mathbb{Z}$ существует гомоморфизм

$$\sigma_q: MU^{2q}(X(\mathbb{C})) \rightarrow MO^q(X(\mathbb{R})),$$

который определяется равенством

$$\sigma_q(\text{CL}_{\mathbb{C}}(F)) = \text{CL}_{\mathbb{R}}(F),$$

где $F: M^{q+n} \rightarrow X$ – произвольное отображение вещественных алгебраических многообразий.

В данной заметке мы докажем аналог предложения 4.1 для более широкого класса многообразий. А именно, рассмотрим отображение цикла кольца Чжоу в целочисленные когомологии

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{Z}}: A^*(X) \rightarrow H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}). \quad (4.3)$$

Если оно эпиморфно, то многообразие X назовем $\mathbb{Z}$ -алгебраически максимальным многообразием ($\mathbb{Z}$ -АМ-многообразием). Это понятие аналогично понятию алгебраически максимального многообразия, введенному ранее. Заметим, что многообразие, обладающее клеточным разложением, является $\mathbb{Z}$ -алгебраически максимальным многообразием, а каждое $\mathbb{Z}$ -алгебраически максимальное многообразие является просто алгебраически максимальным многообразием, которое в свою очередь является M -многообразием.

В качестве приложения мы докажем сейчас

Предложение 4.2. Пусть многообразие X является $\mathbb{Z}$ -АМ-многообразием. Тогда для каждого $q \in \mathbb{Z}$ существует эпиморфизм

$$\sigma_q: MU^{2q}(X(\mathbb{C})) \rightarrow MO^q(X(\mathbb{R})),$$

который удовлетворяет следующему условию: если $F: M^{q+n} \rightarrow X$ – отображение вещественных алгебраических многообразий, то

$$\sigma_q(\mathrm{CL}_{\mathbb{C}}(F)) = \mathrm{CL}_{\mathbb{R}}(F).$$

Доказательство. Группа сингулярных циклов $Z_{\sigma}^*(X)$ является свободным модулем над кольцом $Z_{\sigma}^*(\mathrm{Spec} \mathbb{R})$. Кольцо кобордизмов точки $MU^*(\mathrm{pt})$ является кольцом многочленов

$$\mathbb{Z}[t_0, t_1, t_2, \dots],$$

где $t_i \in MU^{-2i}(\mathrm{pt})$, причем гомоморфизм цикла

$$\mathrm{CL}_{\mathbb{C}}: Z_{\sigma}^*(\mathrm{Spec} \mathbb{R}) \rightarrow MU^*(\mathrm{pt})$$

эпиморфен (см. [5]). Пусть $C_1, \dots, C_N \in Z_{\sigma}^*(X)$ – такой набор сингулярных циклов, что классы когомологий

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{Z}}(C_1), \dots, \mathrm{cl}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{Z}}(C_N) \in H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

образуют аддитивный базис этой свободной группы когомологий. Тогда классы кобордизмов

$$\mathrm{CL}_{\mathbb{C}}(C_1), \dots, \mathrm{CL}_{\mathbb{C}}(C_N) \in MU^*(X(\mathbb{C}))$$

являются свободными образующими модуля $MU^*(X(\mathbb{C}))$ над кольцом кобордизмов точки $MU^*(\mathrm{pt})$ (см. [5]).

Кольцо кобордизмов точки $MO^*(\mathrm{pt})$ является кольцом многочленов

$$\mathbb{F}_2[x_0, x_2, x_4, x_6, \dots],$$

где $x_i \in MO^{-i}(\mathrm{pt})$, причем i не имеет вид $2^s - 1$, а гомоморфизм цикла

$$\mathrm{CL}_{\mathbb{R}}: Z_{\sigma}^*(\mathrm{Spec} \mathbb{R}) \rightarrow MO^*(\mathrm{pt})$$

эпиморфен (см. [5]). Определен канонический эпиморфизм колец

$$\sigma_* : MU^*(pt) \rightarrow MO^*(pt),$$

удовлетворяющий равенству $\sigma_* \circ CL_{\mathbb{C}} = CL_{\mathbb{R}}$ (см. [4]). Из теоремы 0.1 следует, что классы когомологий

$$cl_{\mathbb{R}}(C_1), \dots, cl_{\mathbb{R}}(C_N) \in H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

образуют базис пространства $H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ над полем $\mathbb{F}_2$. Следовательно, классы кобордизмов

$$CL_{\mathbb{R}}(C_1), \dots, CL_{\mathbb{R}}(C_N) \in MO^*(X(\mathbb{R}))$$

являются свободными образующими модуля $MO^*(X(\mathbb{R}))$ над кольцом кобордизмов точки $MO^*(pt)$ (см. [5]).

Остается положить

$$\sigma_* \left(\sum_1^N f_i \cdot CL_{\mathbb{C}}(C_i) \right) = \sum_1^N \sigma_*(f_i) \cdot CL_{\mathbb{R}}(C_i),$$

где $f_i \in MU^*(pt)$. Тогда получим искомый эпиморфизм.

Предложение доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
- [2] Краснов В. А. Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 36–52.
- [3] Краснов В. А. Вещественные алгебраические GM -многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 3. С. 39–66.
- [4] Краснов В. А. Вещественные алгебраические многообразия и кобордизмы // Изв. РАН. Сер. матем. (в печати).
- [5] Стонг Р. Заметки по теории кобордизмов. М.: Мир, 1973.

Ярославский государственный университет
E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило
08.05.2002