Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Левенштам, Об однозначной разрешимости параболических уравнений с почти периодическими коэффициентами в пространствах Гёльдера, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 6, 861–877

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:01:10

УДК 517.9

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА

В. Б. Левенштам

Получен критерий обратимости в пространствах Гёльдера линейных параболических операторов произвольного порядка с любым числом пространственных переменных и почти периодическими коэффициентами.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Основные результаты. Пусть m и n – натуральные числа. Через $C^{\gamma, \delta}$, $\gamma, \delta \in [0, 1]$, обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^{n+1}$ функций $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{\gamma, \delta}} = & \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}} |u(x, t)| + b_\gamma \sup_{(x'', t) \neq (x', t)} \frac{|u(x'', t) - u(x', t)|}{|x'' - x'|^\gamma} \\ & + b_\delta \sup_{(x, t'') \neq (x, t')} \frac{|u(x, t'') - u(x, t')|}{|t'' - t'|^\delta} < \infty, \end{aligned}$$

где $b_s = 0$ при $s = 0$ и $b_s = 1$ при $s \neq 0$. Через $C^{2m, 1, \gamma, \delta}$ обозначим банахово пространство функций $u(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, которые вместе с производными $\partial u / \partial t$ и $D_x^\alpha u$, $|\alpha| \leq 2m$, принадлежат пространству $C^{\gamma, \delta}$ и снабжены нормой

$$\|u\|_{C^{2m, 1, \gamma, \delta}} = \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{C^{\gamma, \delta}} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|D_x^\alpha u\|_{C^{\gamma, \delta}}.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$,

$$D_x^\alpha \equiv D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Рассмотрим в пространстве $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ параболическое уравнение

$$Pu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x, t) D^\alpha u = f(x, t), \quad (1.1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 98-01-00136 и № 01-01-00678.

коэффициенты которого $a_\alpha \in C^{\gamma, \gamma/(2m)}$ при некотором $\gamma \in (0, 1]$ и являются почти периодическими по (x, t) функциями, $f \in C^{\gamma, \gamma/(2m)}$, а условие параболичности имеет вид

$$(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x, t) \xi^\alpha \geq c_0 |\xi|^{2m}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

где $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $c_0 = \text{const} > 0$, которая не зависит от $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, ξ . Через $H(P)$ обозначим множество всех дифференциальных выражений

$$Q \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} b_\alpha(x, t) D^\alpha,$$

коэффициенты $b_\alpha(x, t)$ которых являются равномерными пределами (т.е. пределами в классе $C^{0,0}$) последовательностей вида $a_\alpha(x + \xi_k, t + \tau_k)$, где $(\xi_k, \tau_k) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Уточним, что при этом в построении всех коэффициентов каждого конкретного такого выражения Q участвует одна и та же последовательность точек (ξ_k, τ_k) . Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим однородные уравнения

$$Qv = 0, \quad Q \in H(P). \quad (1.3)$$

ТЕОРЕМА 1. 1) Уравнение (1.1) при любой правой части $f \in C^{\gamma, \gamma/(2m)}$ имеет единственное в пространстве $C^{0,0}$ решение тогда и только тогда, когда уравнения (1.3) не имеют ненулевых решений в $C^{0,0}$.

2) Это решение $u \in C^{2m, 1, \gamma, \gamma/(2m)}$.

3) Если f — почти периодическая функция, то и u — почти периодическое решение.

Доказательство теоремы изложено в п. 2.

Из утверждений 1), 2) теоремы 1 и теоремы Банаха вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Оператор $P: C^{2m, 1, \gamma, \gamma/(2m)} \rightarrow C^{\gamma, \gamma/(2m)}$, заданный левой частью уравнения (1.1), является изоморфизмом тогда и только тогда, когда все уравнения (1.3) не имеют ненулевых решений в $C^{0,0}$.

Для формулировки следующих двух теорем приведем определения (применительно к нашей ситуации) некоторых свойств эволюционных операторов, которые играют существенную роль в важной работе Жикова [1].

Следуя [1, с. 1382], назовем оператор P , действующий в пространстве $C^{0,0}$ с областью определения $D(P) = \{u \in C^{0,0} : Pu \in C^{0,0}\}$ по правилу, определяемому левой частью равенства (1.1), *регулярным*, если уравнение (1.1) при любой правой части $f \in C^{\gamma, \gamma/(2m)}$ имеет единственное решение $u \in C^{0,0}$.

Оператор P назовем *корректным* (см. [1, с. 1382]), если для некоторой постоянной $k > 0$ при всех $u \in C^{2m, 1, \gamma, \gamma/(2m)}$ справедлива оценка

$$\|u\|_{C^{0,0}} \leq k \|Pu\|_{C^{\gamma, \gamma/(2m)}}.$$

В силу теоремы Банаха и известных априорных оценок для параболических уравнений [2] всякий регулярный оператор корректен.

Говорят, что для уравнения (1.1) имеет место *экспоненциальная дихотомия* (э.д.) решений, или оператор P *обладает э.д.* (см., например, [1, с. 1387]), если существуют

такие положительные постоянные c_1 и c_2 , при которых справедливы следующие утверждения:

d₁) для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ пространство $C(\mathbb{R}^n) \equiv C^0$ распадается в прямую сумму подпространств $N_1(t_0)$ и $N_2(t_0)$: $C^0 = N_1(t_0) \oplus N_2(t_0)$;

d₂) если $u(x, t)$, $t \geq t_0$, – решение уравнения $Pu = 0$ с начальным условием $u(x, t_0) \in N_i(t_0)$, то при всех $t \geq t_0$ выполнено $u(x, t) \in N_i(t)$, $i = 1, 2$;

d₃) если $u(x, t_0) \in N_1(t_0)$, то при $t \geq t_0$ выполняется оценка

$$\|u(x, t)\|_{C^0} \leq c_1 \|u(x, t_0)\|_{C^0} e^{-c_2(t-t_0)};$$

d₄) если $u(x, t_0) \in N_2(t_0)$, то существует и единственно такое продолжение на всю ось $t \in \mathbb{R}$, что

$$\|u(x, t)\|_{C^0} \leq c_1 \|u(x, t_0)\|_{C^0} e^{c_2(t-t_0)}, \quad t \leq t_0.$$

В [1], [3, с. 815] установлено следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Э.д. решений однородного ($f = 0$) уравнения (1.1) эквивалентна регулярности оператора P .*

Отсюда в силу п.п. 1), 2) теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 2. *Для уравнения (1.1) при $f = 0$ имеет место э.д. решений тогда и только тогда, когда уравнения (1.3) не имеют ненулевых решений, принадлежащих $C^{0,0}$.*

Легко видеть, что в наших предположениях о коэффициентах уравнения (1.1) условие тривиальности ядер всех операторов Q , $Q \in H(P)$, фигурирующее в формулировках теорем 1 и 2, эквивалентно корректности оператора P . В связи с этим справедливы естественные переформулировки указанных теорем. В частности, справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Для уравнения (1.1) при $f = 0$ имеет место э.д. решений тогда и только тогда, когда оператор P корректный.*

Изучению вопросов о регулярности, э.д., корректности и некоторых других, тесно связанных с этими, свойствах эволюционных операторов вида $L \equiv d/dt + A(t)$, где $A(t)$ – оператор-функция в банаховом пространстве, посвящено довольно много исследований. В монографиях [4]–[6] и работах [7], [8] рассматривается случай ограниченного операторного коэффициента $A(t)$. Отметим попутно, что утверждение 1) теоремы 1 данной работы является естественным обобщением теоремы Мухамадиева [7], [6, с. 45]. Случай неограниченного операторного коэффициента $A(t)$ рассматривается в работах [1], [9]–[12]. В [1], в частности, получен результат об эквивалентности свойств э.д. и регулярности оператора L , конкретизацией которого для рассматриваемого здесь параболического оператора P с фазовым пространством $C^0(\mathbb{R}^n)$ является лемма 1. Не останавливаясь на описании различных условий регулярности, э.д. и корректности L , представленных в работах [1], [9]–[12], отметим, что в [9]–[11] в формулировках или доказательствах этих условий активно используются так называемые разностные операторы. Далее, в работе Баскакова [12] обратимость оператора L и некоторые другие его важные свойства изучаются не только в пространстве $C(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ непрерывных и ограниченных на оси $t \in \mathbb{R}$ вектор-функций $u(t)$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{X}$, но и в некоторых других пространствах $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Через $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ в [11] обозначено одно из следующих банаховых пространств вектор-функций $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$:

$L_p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, $p \in [1, \infty]$, – пространство суммируемых со степенью p (существенно ограниченных, если $p = \infty$) измеримых по Бохнеру на $\mathbb{R}$ вектор-функций;

$S_p(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, $p \in [1, \infty]$, – пространство локально суммируемых со степенью p измеримых на $\mathbb{R}$ вектор-функций, удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{S_p(\mathbb{R}, \mathbb{X})} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 \|u(s, t)\|^p ds \right)^{1/p};$$

$C(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ – пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ вектор-функций с обычной суп-нормой;

$C_0(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ – пространство вектор-функций из $C(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, удовлетворяющих условию $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| = 0$.

Из теоремы 4 работы [11] и теоремы 1 данной статьи следует

ТЕОРЕМА 4. *Уравнение (1.1) при любой правой части $f \in F(\mathbb{R}, C^0)$ имеет единственное в $F(\mathbb{R}, C^0)$ решение тогда и только тогда, когда уравнения (1.3) не имеют ненулевых решений в $C^{0,0}$.*

Отметим, наконец, что обсуждаемые здесь свойства эволюционных операторов собственно для параболических уравнений, рассматриваемых во всем пространстве $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, изучались в монографии [12, § 6]. Там установлено, что корректный параболический оператор L , для которого формально сопряженный оператор L^* имеет тривиальное ядро, регулярен. В настоящей работе последнее условие не налагается, но требуется, чтобы коэффициенты параболического выражения были почти периодическими.

2. Вспомогательные результаты. Случай периодических коэффициентов. Рассмотрим множество вещественных тригонометрических полиномов на $\mathbb{R}^n$, представленных конечными суммами вида

$$u = \sum \alpha_\ell e^{i\ell x}, \quad (2.1)$$

где $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ – вектор с целочисленными компонентами ($\ell \in \mathbb{Z}^n$), $\ell x = \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + \dots + \ell_n x_n$, $\alpha_\ell = \overline{\alpha_{-\ell}}$. Для любого целого s определим скалярное произведение таких полиномов u и $v = \sum \beta_\ell e^{i\ell x}$ по формуле

$$(u, v)_s = (2\pi)^n \sum (1 + \ell \cdot \ell)^s \alpha_\ell \beta_{-\ell}.$$

Через H_s [13, с. 176] обозначим гильбертово пространство, полученное замыканием по норме

$$\|u\|_s = \sqrt{(u, u)_s}$$

множества рассматриваемых тригонометрических полиномов.

Рассмотрим еще тригонометрические полиномы на $\mathbb{R}^{n+1}$, представленные конечными суммами вида

$$u = \sum \alpha_{\ell, r} e^{i(\ell x + r t)}, \quad (2.2)$$

где $(\ell, r) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $\alpha_{\ell, r} = \overline{\alpha_{-\ell, -r}}$. Для таких u и $v = \sum \beta_{\ell, r} e^{i(\ell x + r t)}$ и любого целого s определим скалярное произведение

$$\langle u, v \rangle_{s,0} = (2\pi)^{n+1} \sum (1 + \ell \cdot \ell)^s \alpha_{\ell, r} \beta_{-\ell, -r}.$$

Через $H_{s,0}$ обозначим замыкание множества рассматриваемых полиномов по норме

$$\|u\|_{s,0} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{s,0}}.$$

Легко видеть, что элементы пространств H_s и $H_{s,0}$ могут быть представлены бесконечными тригонометрическими суммами (рядами) вида (2.1) и (2.2), для которых величины $\|\cdot\|_s$ и $\|\cdot\|_{s,0}$ соответственно конечны.

Для любых действительных чисел $t_2 > t_1$ через $C(t_1, t_2; H_s)$ обозначим пространство непрерывных вектор-функций $u: [t_1, t_2] \rightarrow H_s$ с нормой

$$\|u\|_{C(t_1, t_2; H_s)} = \max_{t \in [t_1, t_2]} \|u(t)\|_{H_s}.$$

Определенное аналогичным образом пространство $C(-\infty, \infty; H_s)$ будем обозначать $C(H_s)$.

Подпространства ранее введенных пространств $C^{\gamma, \delta}$ и $C^{2m, 1, \gamma, \delta}$, состоящие из 2π -периодических по (x, t) функций $u(x, t)$, обозначим соответственно через $C_{2\pi}^{\gamma, \delta}$ и $C_{2\pi}^{2m, 1, \gamma, \delta}$.

Рассмотрим задачу о 2π -периодических по $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ решениях параболического уравнения (1.1), где коэффициенты $a_\alpha(x, t)$ – вещественные 2π -периодические по (x, t) функции¹ такие, что $D^\beta a_\alpha \in C^{0,0}$, $|\beta| \leq m$, и выполнено условие (1.2), а правая часть $f \in H_{-m,0}$. При этом 2π -периодическим решением уравнения (1.3) мы называем функцию $u \in H_{m,0}$, удовлетворяющую при всех гладких 2π -периодических функциях $v(x, t)$ интегральному тождеству

$$-\left\langle u, \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle_{0,0} + \langle A(t)u, v \rangle_{0,0} = \langle f, v \rangle_{0,0}.$$

Отметим, что все слагаемые в этом тождестве определены. В частности, второе определено в силу принадлежности $D^\alpha u \in H_{-m,0}$, $|\alpha| \leq 2m$ (вытекает из [13, с. 174, формула (3.11)]), и неравенства Шварца (следует из [13, с. 174, формула (3.6)])

$$\langle a, b \rangle_{0,0} \leq \|a\|_{m,0} \|b\|_{-m,0}. \quad (2.3)$$

Рассматривая в последнем интегральном тождестве решение u как предел частичных сумм его ряда Фурье и беря в качестве v отдельные гармоники, приходим к эквивалентному определению.

2π -периодическим решением уравнения (1.1) называется функция $u \in H_{m,0}$, для которой производная $\partial u / \partial t$, вычисляемая формальным дифференцированием по t ряда Фурье, принадлежит $H_{-m,0}$, и справедливо равенство (1.1).

Через $\overset{\circ}{W}$ обозначим банахово пространство функций $u \in H_{m,0}$, имеющих обобщенные производные $\partial u / \partial t \in H_{-m,0}$, с нормой

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}} = \|u\|_{m,0} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{-m,0}.$$

¹Фиксация периода $T = 2\pi$, разумеется, несущественна. Действительно, если коэффициенты уравнения и искомое решение имеют период T_1 по t и T_2 по x , где T_1, T_2 – произвольные положительные числа, то с помощью естественной замены независимых переменных мы переходим к рассмотрению 2π -периодических по (x, t) коэффициентов и решения.

Следующий результат является, по-видимому, известным фактом классической теории параболических уравнений. Однако, не найдя его в литературе и учитывая важность его для доказательства основного результата – теоремы 1, мы формулируем этот результат в виде отдельного предложения 1, а затем в п. 4 для полноты изложения доказываем его.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть уравнение (1.1) при $f = 0$ не имеет ненулевых 2π -периодических решений. Тогда уравнение (1.1) при любой правой части $f \in H_{-m,0}$ имеет единственное 2π -периодическое решение u . При этом, если $f \in C^{\gamma,0}$, $\gamma \in (0,1)$, то u является классическим 2π -периодическим по (x,t) решением, причем $u \in C^{2m,1,\gamma,0}$.

Аналогичный результат получен нами и для краевой задачи о 2π -периодических по времени t решениях уравнения (1.1) в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$.

Из предложения 1 в силу теоремы Банаха вытекает

СЛЕДСТВИЕ. В условиях предложения 1 оператор $P: \overset{\circ}{W} \rightarrow H_{-m,0}$ и его сужение $\hat{P}: C_{2\pi}^{2m,1,\gamma,0} \rightarrow C_{2\pi}^{\gamma,0}$ суть изоморфизмы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть коэффициенты $a_\alpha \in C^{\gamma,\gamma/(2m)}$, $\gamma \in (0,1)$, и пусть уравнение (1.1) при $f = 0$ не имеет ненулевых классических решений равномерно ограниченных по $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда при любой правой части $f \in C^{\gamma,\gamma/(2m)}$ уравнение (1.1) имеет единственное в $C^{0,0}$ классическое решение, причем оно принадлежит пространству $C^{2m,1,\gamma,\gamma/(2m)}$.

Эта теорема доказывается аналогично утверждению 1) теоремы 1 (см. п. 3), но со значительными упрощениями ввиду периодичности коэффициентов a_α .

Из предложения 2 в силу теоремы Банаха вытекает

СЛЕДСТВИЕ. В условиях предложения 2 оператор $P: C^{2m,1,\gamma,\gamma/(2m)} \rightarrow C^{\gamma,\gamma/(2m)}$ – изоморфизм.

Из предложения 2 и леммы 1 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть коэффициенты $a_\alpha \in C^{\gamma,\gamma/(2m)}$, $\gamma \in (0,1]$. Тогда для однородного уравнения (1.1) имеет место э.д. решений тогда и только тогда, когда это уравнение не имеет ненулевых решений в $C^{0,0}$.

3. Доказательство теоремы 1. Итак, рассмотрим уравнение (1.1), в котором коэффициенты a_α и правая часть f принадлежат пространству $C^{\gamma,\gamma/(2m)}$, $\gamma \in (0,1]$, и выполнено условие параболичности (1.2). В ходе доказательства нам понадобятся следующие две известные оценки [2] фундаментального решения (ф.р.) $Z(t, \tau, x, \xi)$ этого уравнения и потенциала

$$v_1(t, x, \varphi) = \int_{t_0}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, \tau, x, \xi) \varphi(\xi, \tau) d\xi,$$

где $-\infty < t_0 < t < \infty$, $\varphi \in C^{\gamma,0}$. Пусть $\gamma' \in (0, \gamma)$. Для любой пары чисел $T_1 < T_2$ найдутся такие константы c и c_0 , зависящие лишь от величин $T_2 - T_1$ и $\|a_\alpha\|_{\gamma,\gamma/(2m)}$,

$|\alpha| \leq 2m$, что при любых $T_1 \leq t_0 < t \leq T_2$, $h \in \mathbb{R}^n$ и $h_1 \in \mathbb{R}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} & |D^\alpha [Z(t + h_1, \tau, x + h, \xi) - Z(t, \tau, x, \xi)]| \\ & \leq c(t - \tau)^{-(n+|\alpha|+\gamma')/(2m)} (|h|^{\gamma'} + |h_1|^{\gamma'/(2m)}) \\ & \quad \times \max\{\exp[-c_0\rho(t - \tau, x - \xi)], \exp[-c_0\rho(t - \tau, x + h - \xi)]\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|}{t^{1/(2m)}} \right)^{2m/(2m-1)}; \\ & |D^\alpha [v_1(t + h_1, x + h, f) - v_1(t, x, f)]| \\ & \leq c(|h|^{\gamma'} + |h_1|^{\gamma'/(2m)})(t - t_0)^{(2m-|\alpha|+\gamma-\gamma')/(2m)} \|f\|_{C^{\gamma,0}[T_1, T_2]}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

При этом для $h_1 = 0$ оценки (3.1), (3.2) имеют место и в случае $a_\alpha \in C_{\gamma,0}$. Здесь через $C^{\gamma,0}[T_1, T_2]$ обозначено аналогичное пространству $C^{\gamma,0}$ пространство функций $u(x, t)$, заданных в полосе $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [T_1, T_2]$.

Через Π_T , $T > 0$, обозначим куб

$$\Pi_T = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x_i| < T, |t| < T\}.$$

Поскольку функции $a_\alpha(x, t)$ почти периодические, то в силу теоремы 2.3 [14] существуют последовательности положительных чисел $T_i \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_i \rightarrow 0$ и последовательности T_i -периодических тригонометрических полиномов $a_{\alpha,i}(x, t)$, для которых справедливы неравенства

$$\|a_\alpha - a_{\alpha,i}\|_{C^{\gamma',\gamma'/(2m)}(\Pi_{T_i})} < \varepsilon_i, \quad \gamma' \in (0, \gamma). \quad (3.3)$$

Введем еще последовательность T_i -периодических полиномов $f_i(x, t)$ таких, что

$$\|f - f_i\|_{C^{\gamma',\gamma'/(2m)}(\Pi_{T_i/2-1})} < \varepsilon_i, \quad \|f_i\|_{C^{\gamma',\gamma'/(2m)}} \leq c_0, \quad (3.4)$$

где $c_0 = c_0(f)$ — не зависящая от i постоянная. В качестве f_i можно взять, например, соответствующий отрезок ряда Фурье функции $(f\eta)_\rho$, где η — финитная в кубе $\Pi_{T_i/2}$ функция такая, что $\eta(x, t) = 1$ при $(x, t) \in \Pi_{(T_i-1)/2}$, а $(\cdot)_\rho$ — осреднение по Стеклову с достаточно малым радиусом ρ .

Наряду с задачей (1.1) рассмотрим последовательность задач о T_i -периодических по (x, t) решениях уравнений

$$P_i u \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha,i}(x, t) D^\alpha u_i = f_i \quad (3.5)$$

при достаточно больших номерах i . Для доказательства их однозначной разрешимости в силу предложения 1 достаточно доказать, что однородные уравнения (3.5) ($f_i = 0$)

не имеют ненулевых T_i -периодических решений. Предполагая противное, найдем последовательности T_s -периодических функций v_s и точек $(x^s, t^s) \in \Pi_{T_s/2}$, для которых выполняются соотношения

$$P_s v_s = 0, \quad (3.6)$$

$$\|v_s\|_{C(\mathbb{R}^{n+1})} = 1, \quad (3.7)$$

$$v_s(x^s, t^s) = 1. \quad (3.8)$$

Произведя в уравнениях (3.6) замену $w_s(x, t) = v_s(x + x^s, t + t^s)$, придем к последовательности уравнений

$$\frac{\partial w_s}{\partial t} - \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha,s}(x + x^s, t + t^s) D^\alpha w_s = 0. \quad (3.9)$$

Зафиксировав произвольное $t_0 \in \mathbb{R}$ и оценивая с помощью соотношений (3.1), (3.7) решения

$$w_s(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} Z_s(t, \tau, x, \xi) w_s(\xi, t_0) d\xi, \quad t \in [t_0 + 1, t_0 + 2],$$

где $Z_s(t, \tau, x, \xi)$ – ф.р. уравнения (3.9), получим неравенства

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} w_s \right\|_{C_{\gamma', \gamma'/(2m)}} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|D^\alpha w_s\|_{C_{\gamma', \gamma'/(2m)}} \leq c, \quad \gamma' \in (0, \gamma),$$

в которых константа c не зависит от s . В силу этих неравенств, с учетом теоремы Арцэла и почти периодичности функций a_α , найдутся такие подпоследовательности точек (x^k, t^k) и функций w_k , что для некоторых функций $w(x, t)$ и $\hat{a}_\alpha(x, t)$ при любом фиксированном $T > 0$ будут выполнены предельные соотношения:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w_k - w\|_{C^{2m,1,0,0}(\Pi_T)} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|a_\alpha(x + x^k, t + t^k) - \hat{a}_\alpha(x, t)\|_{C(\Pi_T)} = 0.$$

Учитывая их, перейдем в (3.9) к пределу при $s = k \rightarrow \infty$ на компактах в $\mathbb{R}^{n+1}$. Получим равенство

$$Qw \equiv \frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{|\alpha| \leq 2m} \hat{a}_\alpha(x, t) D^\alpha w = 0, \quad (3.10)$$

где $Q \in H(P)$. В силу условия теоремы 1 отсюда следует, что $w = 0$, но это противоречит (3.8). Итак, доказано, что задачи (3.6) при больших i однозначно разрешимы.

Докажем теперь существование такой постоянной $c > 0$, при которой все решения задач (3.5) с достаточно большими нормами подчинены оценке

$$\|u_i\|_{C^{0,0}} \leq c \|f_i\|_{C^{0,0}}. \quad (3.11)$$

Опять предполагая противное, найдем подпоследовательности функций u_k, f_k и последовательность точек $(x^k, t^k) \in \Pi_{T_k/2}$, для которых справедливы соотношения

$$\|u_k\|_{C^{0,0}} = 1, \quad u_k(x^k, t^k) = 1, \quad \|f_k\|_{C^{0,0}} \rightarrow 0.$$

С помощью таких же, как и в предыдущем абзаце, рассуждений убеждаемся, что некоторая подпоследовательность функций $w_k(x, t) = u_k(x + x^k, t + t^k)$ равномерно на компактах в $\mathbb{R}^{n+1}$ стремится к решению w однородного уравнения вида (3.10). Отсюда, из условия теоремы 1 следует, что $w = 0$, и мы приходим к противоречию с равенством $w(0, 0) = 1$. Таким образом, оценка (3.11) доказана.

Завершим доказательство достаточности в первом утверждении теоремы 1. Зафиксировав произвольное число t_0 , представим решения u_i уравнений (3.5) в виде

$$u_i(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} Z_i(x, \xi, t, t_0) u_i(\xi, t_0) d\xi + \int_{t_0}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z_i(t, \tau, x, \xi) f_i(\xi, \tau) d\xi. \quad (3.12)$$

Рассматривая (3.12) на участке $t \in [t_0 + 1, t_0 + 2]$ и воспользовавшись оценками (3.1), (3.2), (3.4), (3.11), получим в результате неравенства

$$\left\| \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\|_{C^{\gamma', \gamma'/2k}} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|D^\alpha u_i\|_{C^{\gamma', \gamma'/2k}} \leq c \quad (3.13)$$

с не зависящей от i константой c . Из (3.13), с учетом теоремы Арцэла и (3.3), (3.4), следует, что по некоторой подпоследовательности уравнений (3.5) можно перейти к равномерному на компактах в $\mathbb{R}^{n+1}$ пределу, причем предельным является уравнение (1.1) с ограниченным решением u . Таким образом, утверждение достаточности в п. 1) теоремы 1 доказано.

Докажем второе утверждение теоремы 1. Из представления (см. [2]) решения $u \in C^{0,0}$ уравнения (1.1) в виде

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, t_0, x, \xi) u(\xi, t_0) d\xi + \int_{t_0}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, \tau, x, \xi) f(\xi, \tau) d\xi, \\ -\infty < t_0 < t < \infty,$$

и оценок (3.1), (3.2) следует, что $u \in C^{2m, 1, \gamma_0, \gamma_0/(2m)}$, $\gamma_0 \in [0, \gamma)$. Для получения же требуемого предельного результата ($\gamma_0 = \gamma$) введем гладкую срезающую функцию $\eta: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, носитель которой принадлежит интервалу $(-2, 2)$ и $\eta(t) = 1$ при $t \in [-1, 1]$. Для любого фиксированного $t_0 \in \mathbb{R}$ рассмотрим функцию $v_{t_0}(x, t) = u(x, t)\eta(t - t_0)$. Она, очевидно, является решением задачи Коши

$$Pv_{t_0} = f\eta - u\eta', \quad v(x, t_0 - 2) = 0, \quad t \geq t_0 - 2.$$

Отсюда, в силу свойства [2, с. 276] функции v , устанавливаем, что $u \in C_{[t_0-1, t_0+1]}^{2m, 1, \gamma, \gamma/(2m)}$, где через $C_{[a, b]}^{2m, 1, \gamma, \gamma/(2m)}$, $a < b$, обозначено пространство функций, заданных в полосе $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [a, b]$, аналогичное пространству $C^{2m, 1, \gamma, \gamma/(2m)}$. Ввиду произвольности числа $t_0 \in \mathbb{R}$ отсюда следует, что $u \in C^{2m, 1, \gamma, \gamma/(2m)}$.

Докажем утверждение 3). Пусть $u(x, t)$ – решение уравнения (1.1) с почти периодической правой частью f . Докажем компактность в $C^{0,0}$ произвольного множества сдвигов $u_k(x, t) \equiv u(x + h^k, t + h_1^k)$. Не нарушая общности, будем считать, что в пространстве $C^{\gamma', \gamma'/(2m)}$, $0 < \gamma' < \gamma$, последовательности функций $a_\alpha(x, t) \equiv a_{\alpha, k}(x + \xi_k, t + \tau_k)$ и $f_k(x, t) \equiv f(x + \xi_k, t + \tau_k)$ фундаментальны. Функции $u_{k, s} \equiv$

$u_k - u_s$ для любых натуральных k, s , очевидно, являются ограниченными решениями уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{k,s}}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha,k}(x,t) D^\alpha u_{k,s} \\ = \sum_{|\alpha| \leq 2m} [a_{\alpha,s}(x,t) - a_{\alpha,k}(x,t)] D^\alpha u_s + f_k(x,t) - f_s(x,t). \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь заменой переменных $(x, t) \rightarrow (x - \xi_k, t - \tau_k)$, очевидным равенством $\|D^\alpha u_s\|_{C^{\gamma, \gamma/(2m)}} = \|D^\alpha u\|_{C^{\gamma, \gamma/(2m)}}$ и следствием (утверждений 1, 2) теоремы 1, легко устанавливаем фундаментальность последовательности u_k в пространстве $C^{0,0}$. Утверждение 3) доказано.

Докажем теперь утверждение необходимости в п. 1) теоремы 1.

Пусть уравнение (1.1) при любой правой части $f \in C^{\gamma, \gamma/(2m)}$ имеет единственное решение $u \in C^{2m, 1, \gamma, \gamma/(2m)}$. Докажем, что тогда каждое уравнение

$$Qv \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} b_\alpha(x,t) D^\alpha v = 0, \quad Q \in H(P), \quad (3.14)$$

имеет в пространстве $C^{2m, 1, \gamma', \gamma'/(2m)}$, $\gamma' \in (0, \gamma)$, лишь нулевое решение. Предположим противное и обозначим через v решение уравнения (3.14), для которого

$$\|v\|_{C^{2m, 1, \gamma', \gamma'/(2m)}} = 1. \quad (3.15)$$

Пусть (ξ_k, τ_k) — такая последовательность точек в $\mathbb{R}^{n+1}$, что $a_\alpha(x + \xi_k, t + \tau_k) \rightarrow b_\alpha(x, t)$ в $C^{0,0}$. Очевидно, что тогда это предельное соотношение справедливо в пространстве $C^{\gamma', \gamma'/(2m)}$. Введем последовательность функций $u_k(x, t) = v(x - \xi_k, t - \tau_k)$. В силу вытекающего из (3.14) равенства

$$Pu_k = \sum_{|\alpha| \leq 2m} [a_\alpha(x, t) - b_\alpha(x - \xi_k, t - \tau_k)] u_k \equiv \varphi_k(x, t),$$

очевидного соотношения $\|\varphi_k\|_{C^{\gamma', \gamma'/(2m)}} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, и следствия теоремы 1 справедливо соотношение $\|u_k\|_{C^{2m, 1, \gamma', \gamma'/(2m)}} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Таким образом, пришли к противоречию с равенством (3.15). Теорема 1 полностью доказана.

4. Доказательство предложения 1. Воспользуемся методом Фаздо–Галёркина. Приближенное решение уравнения (1.1) представим в виде

$$u_k = \sum_{|\ell| \leq k} c_\ell(t) e^{i\ell x}, \quad c_\ell = \bar{c}_{-\ell},$$

где неизвестные функции c_ℓ являются 2π -периодическими решениями системы линейных уравнений

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}, e^{i\ell x} \right)_0 + \sum_{|\alpha| \leq 2k} (A(t) u_k, e^{i\ell x})_0 = (f, e^{i\ell x})_0, \quad |\ell| \leq k. \quad (4.1)$$

Выведем априорные оценки функций u_k . При этом будет использоваться известное неравенство Гординга [13, с. 178]:

$$(A(t)u, u)_0 \geq c_1 \|u\|_m^2 - c_2 \|u\|_0^2, \quad (4.2)$$

где c_1, c_2 – не зависящие от $u \in H_m$ и $t \in \mathbb{R}$ положительные константы. Умножим уравнения системы (4.1) на u_ℓ и просуммируем по $\ell, |\ell| \leq k$. Получим равенство

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}, u_k \right)_0 + (A(t)u_k, u_k)_0 = (f, u_k)_0. \quad (4.3)$$

Произведя в уравнении (4.3) замену $u_k = w_k e^{c_2 t}$, где c_2 то же, что и в (4.2), получим тождество

$$\left(\frac{\partial w_k}{\partial t}, w_k \right)_0 + (A(t)w_k + c_2 w_k, w_k)_0 = (f e^{-c_2 t}, w_k)_0.$$

Интегрируя последнее по участку $t \in [0, 2\pi]$ и используя соотношения (2.3), (4.2), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} c_1 \|w_k\|_{L_2(0, 2\pi; H_m)}^2 &\leq \frac{1}{2} (\|w_k(\cdot, 0)\|_0^2 - \|w_k(\cdot, 2\pi)\|_0^2) \\ &\quad + \frac{c_1}{2} \|w_k\|_{L_2(0, 2\pi; H_m)}^2 + c_3 \|f\|_{-m, 0}^2, \quad c_3 = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\|u_k\|_{m, 0}^2 \leq d_1 (\|u_k(\cdot, 0)\|_0^2 + \|f\|_{-m, 0}^2), \quad (4.4)$$

где d_1 – не зависящая от f и k постоянная. Интегрируя теперь непосредственно уравнение (4.2) по $t \in [0, T]$, $T \in [0, 2\pi]$, и используя (2.3), (4.2), (4.4), получим оценку

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, 2\pi]} \|u_k(\cdot, t)\|_0^2 + \|u_k\|_{m, 0}^2 &\leq d_2 (\|u_k(\cdot, 0)\|_0^2 + \|f\|_{-m, 0}^2), \\ d_2 &= \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Докажем теперь, что система (4.1) при достаточно больших k разрешима. Для этого, как известно [15, с. 215], достаточно установить, что однородная система (4.1) при таких k не имеет нетривиальных 2π -периодических решений. Предположим противное. Тогда существует подпоследовательность 2π -периодических решений (которую также будем обозначать u_k), удовлетворяющих условию

$$\|u_k\|_{C(H_0)} = 1. \quad (4.6)$$

Из оценок (4.6), (4.5) и слабой компактности сферы в $H_{m, 0}$ следует существование функции $u \in H_{m, 0}$ и подпоследовательности u_k (опять сохраняем обозначения) таких, что $u_k \rightarrow u$ слабо в $H_{m, 0}$. При этом из последнего, очевидно, следует, что $A(t)u_k \rightarrow A(t)u$ слабо в $H_{-m, 0}$. Умножая равенства (4.1) при $f = 0$ на гладкую 2π -периодическую функцию $\varphi_\ell(t)$ и интегрируя по частям, получим тождества

$$-\int_0^{2\pi} (u_k, \varphi'_\ell e^{i\ell x})_0 dt + \sum_{|\alpha| \leq 2m} (A(t)u_k, \varphi_\ell e^{i\ell x})_0 = 0, \quad |\ell| \leq k.$$

Переходя теперь к пределу при $k \rightarrow \infty$ и фиксированных ℓ , а затем, учитывая полноту системы $e^{i\ell x}$, $\ell \in \mathbb{Z}^n$, в H_m , приходим к верному для любой 2π -периодической по (x, t) гладкой функции $v(x, t)$ равенству

$$-\int_0^{2\pi} (u, v')_0 dt + \int_0^{2\pi} (A(t)u, v)_0 dt = 0.$$

Последнее означает, что u – решение однородного уравнения (1.3) и, следовательно, в силу предположений п. 1) теоремы 1 $u = 0$.

Докажем теперь, что существует такая постоянная $c > 0$, что при всех k справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\|_{-m,0} \leq c. \quad (4.7)$$

Обозначим через Π_s , где s – натуральное число, проектор в пространстве $H_{m,0}$, действующий на произвольную функцию $v = \sum_{\ell} \alpha_{\ell}(t) e^{i\ell x} \in H_{m,0}$ по правилу

$$\Pi_s v = \sum_{|\ell| \leq s} \alpha_{\ell}(t) e^{i\ell x}.$$

Очевидно, $\|\Pi_s\| = 1$. Оценка (4.7) вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial t}, v \right\rangle_{0,0} \right| &= \left| \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial t}, \Pi_k v \right\rangle_{0,0} \right| = |\langle A(t)u_k, \Pi_k v \rangle_{0,0}| \\ &\leq c_1 \|A(t)u_k\|_{-m,0} \|\Pi_k v\|_{m,0} \leq c \|v\|_{m,0}^2, \quad c_1, c = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Из оценок (4.5)–(4.7) следует, что последовательность u_k ограничена в пространстве $\dot{W}$ и, следовательно [16, с. 70], компактна в $L_2(0, 2\pi; H_0)$. Отсюда, с учетом периодичности функций u_k , следует существование такой подпоследовательности u_i , что

$$\|u_i(\cdot, t)\|_0 \rightarrow 0 \quad \text{при почти всех } t \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

Точно так же, как и при доказательстве леммы 3 с замечанием 1 [17, с. 20–21], устанавливается, что для любого $\delta \in (0, \pi)$ последовательность u_i сходится к нулю в пространстве $C(\delta, 3\pi; H_0)$. Именно, предполагая противное, найдем $\varepsilon > 0$, последовательность чисел $t_s \rightarrow t_0 \geq \delta$ и последовательность u_s такие, что

$$\|u_s(\cdot, t_s)\|_0 > \varepsilon$$

для любого s . Интегрируя уравнение (4.3) с $f = 0$ по отрезку $[t_s - \eta, t_s]$ при достаточно малом $\eta > 0$, и учитывая ограниченность последовательности $\|u_s\|_{C(H_0)}$ (см. (4.6)), получим оценку

$$\|u_s(\cdot, t_s - \eta)\|_0 \geq \|u_s(\cdot, t_s)\|_0 - c_2 \int_{t_s - \eta}^{t_s} (u_s(\cdot, \tau), u_s(\cdot, \tau))_0 d\tau > \frac{\varepsilon}{2},$$

которая, очевидно, противоречит (4.8). Итак, доказано, что последовательность u_i сходится к нулю в $C(\delta, 3\pi; H_0)$, а поскольку функции u_i 2π -периодические, то это имеет место и в $C(H_0)$. Следовательно, для некоторой подпоследовательности $\|u_s\|_{C(H_0)} \rightarrow 0$,

что противоречит (4.6). Тем самым доказано, что при достаточно больших k система (4.1) разрешима.

Вернемся к рассмотрению неоднородного уравнения (1.1). Через u_k по-прежнему будем обозначать его фаэдо-галёркинские приближенные решения. Докажем, что последовательность $\|u_k(\cdot, 0)\|_0$ ограничена. Предполагая противное, выберем подпоследовательность u_k (изменив нумерацию), для которой $\|u_k(\cdot, 0)\|_0 > k$. Поделим уравнения системы (4.1) на число $a_k = \|u_k\|_{C(H_0)}$ и положим

$$w_k = \frac{u_k}{a_k}, \quad f_k = \frac{f}{a_k}.$$

Тогда, повторяя для полученного уравнения те же рассуждения, что использовались выше для доказательства разрешимости системы (4.1) при больших k , установим, что некоторая подпоследовательность w_k сходится в $L_2(0, 2\pi; H_0)$ к решению однородного уравнения (1.1), т.е. к нулю и компактна в $C(H_0)$. Это опять противоречит равенству $\|w_k\|_{C(H_0)} = 1$. Тем самым доказано, что существует такая постоянная c , при которой для всех k справедливы оценки

$$\|u_k(\cdot, t)\|_0 \leq c. \quad (4.9)$$

Проведем заключительную часть доказательства первого утверждения предложения 1. Из оценок (4.5), (4.9) и слабой компактности сферы в $H_{m,0}$ следует существование функции $u \in H_{m,0}$ и последовательности u_k (сохраняя обозначения) таких, что $u_k \rightarrow u$ слабо в $H_{m,0}$. Отсюда, очевидно, следует, что $A(t)u_k \rightarrow A(t)u$ слабо в $H_{-m,0}$. Умножая равенства (4.1) на гладкие 2π -периодические по t функции $\varphi_\ell(t)$, интегрируя по частям и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим интегральное тождество п. 2, справедливое (ввиду полноты системы $e^{i\ell x}$, $\ell \in \mathbb{Z}^n$, в H_m) при всех гладких 2π -периодических функциях $v(x, t)$. Тем самым доказано, что уравнение (1.1) имеет 2π -периодическое решение. Поскольку соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение, то найденное решение единственно.

Докажем второе утверждение предложения 1. Введем функцию $w(x, t) = u(x, t)e^{-c_2 t}$, где u — 2π -периодическое решение уравнения (1.1), существование которого установлено выше. Тогда w является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + [A(t) + c_2]w &\equiv f_1 \equiv fe^{-c_2 t}, \quad t \in (0, 3\pi), \\ w(x, 0) &= \varphi(x) \equiv u(x, 0), \end{aligned} \quad (4.10)$$

которое в этом случае естественным образом (см. [17, с. 25]) определяется как вектор пространства W с нормой

$$\|w\|_W = \left\| \frac{\partial w}{\partial t} \right\|_{L_2(0, 3\pi; H_{-m})} + \|w\|_{L_2(0, 3\pi; H_m)}.$$

Пусть $\varphi_i \in C^{2m+\gamma}(\mathbb{R}^n)$ — последовательность 2π -периодических функций такая, что $\varphi_i \rightarrow \varphi$ при $i \rightarrow \infty$ в H_0 . Наряду с задачей (4.10) рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \hat{P}w_i &\equiv \frac{\partial w_i}{\partial t} + (A(t) + c_2)w_i = f_1, \quad t \in [0, 3\pi], \\ w_i(x, 0) &= \varphi_i(x). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Последняя, как известно [2], имеет единственное классическое ограниченное на множестве $\mathbb{R}^n \times [0, 3\pi]$ решение, которое (в силу единственности) является 2π -периодическим по x . Запишем это решение в виде

$$w_i = \int_0^t dt \int_{\mathbb{R}^n} Z_1(t, \tau, x, \xi) [f_1(\xi, \tau) - \widehat{P}\varphi_i(\xi)] d\xi + \varphi_i, \quad (4.12)$$

где $Z_1(t, \tau, x, \xi)$ – фундаментальное решение (ф.р.) [2] параболического уравнения (4.11).

Из представления (4.12) на основании неравенств (3.1), (3.2) для фундаментального решения Z_1 следует непрерывность и равномерная ограниченность на множестве $\mathbb{R}^n \times [0, 3\pi]$ (при каждом фиксированном i) функций $\partial w_i / \partial t$ и $D^\alpha w_i$, $|\alpha| \leq 2m$. Последнее, в частности, означает, что $w_i \in W$. Но тогда в силу [17, с. 24, лемма 4] существует такая константа $c > 0$, что при всех i разность решений задач (4.10), (4.11) удовлетворяет оценке

$$\|w_i - w\|_{L_2(0, 3\pi; H_m)} \leq c \|\varphi - \varphi_i\|_0.$$

Отсюда, очевидно, следует неравенство

$$\|u_i - u\|_{L_2(0, 3\pi; H_m)} \leq c_1 \|\varphi - \varphi_i\|_0, \quad (4.13)$$

где $u_i = e^{c_2 t} w_i$, $c_1 = ce^{3c_2 \pi}$. Теперь воспользуемся представлением

$$u_i(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, 0, x, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, \tau, x, \xi) f(\xi, \tau) d\xi. \quad (4.14)$$

В силу соотношений (4.13), (4.14) справедливо равенство

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, 0, x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, \tau, x, \xi) f(\xi, \tau) d\xi. \quad (4.15)$$

Отсюда, согласно неравенствам (3.1), (3.2) следует, что на множестве $\mathbb{R}^n \times [\delta, 3\pi]$, $\delta \in (0, \pi)$, существуют непрерывные производные $\partial u / \partial t$ и $D^\alpha u$, $|\alpha| \leq 2m$. В силу же 2π -периодичности функции u , последняя является классическим решением уравнения (1.1).

Из представления (4.15) на основании оценок (3.1), (3.2) для $h_1 = 0$ следует принадлежность $u \in C_{2\pi}^{2m, 1, \gamma_1, 0}$, $\gamma_1 \in (0, \gamma)$. Для получения же предельного результата ($\gamma_1 = \gamma$) введем гладкую срезающую функцию $\eta: (0, 3\pi) \rightarrow [0, 1]$ такую, что $\eta(t) = 0$ при $t \in [0, \pi/2]$, $\eta(t) = 1$ при $t \in [\pi, 3\pi]$. Функция $v = u\eta(t)$ является решением задачи Коши

$$Pv = f\eta + u\eta', \quad v(x, 0) = 0.$$

Отсюда, в силу свойства [2, с. 276] функции v , а значит и u принадлежат пространству $C_{2\pi}^{2m, 1, \gamma, 0}$. Предложение 1 доказано.

5. Одно приложение к квазилинейным параболическим уравнениям. Рассмотрим семейство линейных параболических уравнений

$$P_\mu u = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha, \mu}(x, t) D^\alpha u = 0, \quad (5.1)$$

зависящих от малого параметра μ , $|\mu| \leq \mu_0 \ll 1$. Говорят, что для уравнения (5.1) имеет место *равномерная* (относительно μ) *э.д. решений*, если свойство э.д. справедливо для уравнения (5.1) при каждом $|\mu| \leq \mu_0$, причем константы c_1, c_2 в экспоненциальных оценках решений (см. определение э.д. в п. 1) могут быть выбраны едиными для всех μ . Предположим, что коэффициенты $a_{\alpha, 0}$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и при $\mu \rightarrow 0$

$$\|a_{\alpha, \mu} - a_{\alpha, 0}\|_{C^{\gamma, \gamma/(2m)}} \rightarrow 0, \quad \gamma \in (0, 1). \quad (5.2)$$

Тогда справедлива

ЛЕММА 2. При достаточно малом μ_0 имеет место равномерная относительно $|\mu| \leq \mu_0$ э.д. решений уравнения (5.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из [3, лемма 1, с. 815], достаточно установить существование таких чисел $\mu_0 > 0$ и $c_0 > 0$, что при $|\mu| \leq \mu_0$ и любой $f \in C^{\gamma, \gamma/(2m)}$ уравнение

$$P_\mu u = f \quad (5.3)$$

имеет единственное в пространстве $C^{0,0}$ решение, и при этом справедлива оценка

$$\|u\|_{C^{2m,1,\gamma,\gamma/(2m)}} \leq c_0 \|f\|_{C^{\gamma,\gamma/(2m)}}. \quad (5.4)$$

В силу следствия из п. 1 оператор $P_0(C^{2m,1,\gamma,\gamma/(2m)} \rightarrow C^{\gamma,\gamma/(2m)})$ обратим, поэтому уравнение (5.3) эквивалентно уравнению

$$u + B_\mu u = P_0^{-1} f, \quad B_\mu \equiv P_0^{-1} \sum_{|\alpha| \leq 2m} (a_{\alpha,\mu} - a_{\alpha,0}) D^\alpha,$$

рассматриваемому в пространстве $C^{2m,1,\gamma,\gamma/(2m)}$. При этом согласно (5.2) при $\mu \rightarrow 0$ имеет место предельное соотношение

$$\|B_\mu\|_{C^{2m,1,\gamma,\gamma/(2m)} \rightarrow C^{2m,1,\gamma,\gamma/(2m)}} \rightarrow 0.$$

Отсюда и следует (5.4). Лемма 2 доказана.

Рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x, \delta^{2m-1} u, t) D^\alpha u + f(x, \delta^{2m-1} u, t) = 0, \quad (5.5)$$

где через $\delta^{2m-1} u$ обозначена вектор-функция, компонентами которой являются всевозможные производные u по x до порядка $2m-1$ включительно. Через p обозначим количество таких производных. Предположим, что для произвольного ограниченного множества $K \subset \mathbb{R}^p$ функции

$$a_\alpha(x, e, t), \quad f(x, e, t), \quad \frac{\partial}{\partial e_i} a_\alpha(x, e, t), \quad \frac{\partial}{\partial e_i} f(x, e, t), \quad i = 1, \dots, p,$$

непрерывны и ограничены по совокупности переменных $x, e, t \in \mathbb{R}^n \times K \times \mathbb{R}$, равномерно относительно этих переменных удовлетворяют условию Гёльдера по x, t с показателями γ и $\gamma/(2m)$ соответственно и условию Липшица по e , а также почти периодические по (x, t) равномерно относительно e . Последнее означает, что из всякой последовательности сдвигов $a_\alpha(x + \xi_k, e, t + \tau_k)$, рассматриваемых как функции от (x, t) с параметром $e \in K$, можно выделить подпоследовательность, которая сходится в $C^{0,0}$ равномерно относительно $e \in K$. Пусть существует такая почти периодическая функция w , что $D^\alpha w \in C^{\gamma,\gamma/(2m)}$, $|\alpha| \leq 2m$ и для линеаризованного на ней уравнения (5.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x, \delta^{2m-1} w, t) D^\alpha v + \sum_{|\alpha| \leq 2m} [(D_e a_\alpha)(x, \delta^{2m-1} w, t)] (\delta^{2m-1} v) D^\alpha w \\ + [(D_e f)(x, \delta^{2m-1} w, t)] (\delta^{2m-1} v) = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

выполнены условия теоремы 1, так что имеет место э.д. решений последнего уравнения. Здесь

$$[(D_e f)(x, e_0, t)](e) = \sum_{i=1}^p \left[\frac{\partial}{\partial e_i} f(x, e_0, t) \right] e_i.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим в пространстве $C^{2m+\gamma, \gamma/(2m)}$ шар с центром в w :

$$\sum_{|\alpha| \leq 2m} \|D^\alpha(u-w)\|_{C^{\gamma, \gamma/(2m)}} < \varepsilon. \quad (5.7)$$

ТЕОРЕМА 5. *Существует такое число $\varepsilon > 0$, что каждое решение $u(x, t)$ уравнения (5.5), удовлетворяющее условию (5.7), является почти периодическим².*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим компактность в $C^{0,0}$ произвольного множества сдвигов решения u : $u_k(x, t) \equiv u(x + \xi_k, t + \tau_k)$. Не нарушая общности, будем считать, что последовательность вектор-функций $D^\alpha w(x + \xi_k, t + \tau_k)$, $|\alpha| \leq 2m$, и последовательность функций

$$a_\alpha(x + \xi_k, e, t + \tau_k), \quad f(\dots), \quad \frac{\partial}{\partial e_i} a_\alpha(\dots), \quad \frac{\partial}{\partial e_i} f(\dots), \quad i = 1, \dots, p,$$

фундаментальны в $C^{0,0}$ равномерно относительно $e \in K$, где K – такое открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^p$, что при всех $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ справедливо вложение $(\delta^{2m-1}w)(x, t) \in K$. Записав уравнения (5.5) для u_k и u_s , $k, s \in \mathbb{N}$, а затем вычтя из одного равенства другое, придем к следующему уравнению для разности $u_{k,s} = u_k - u_s$:

$$\begin{aligned} L_{k,s} u_{k,s} &\equiv \frac{\partial u_{k,s}}{\partial t} + \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x + \xi_k, \delta^{2m-1} u_k, t + \tau_k) D^\alpha u_{k,s} \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=2m} \int_0^1 (D_e a_\alpha)(x + \xi_k, \theta \delta^{2m-1} u_k + (1-\theta) \delta^{2m-1} u_s, t + \tau_k) d\theta \\ &\quad \times (\delta^{2m-1} u_{k,s}) D^\alpha u_{k,s} \\ &\quad + \int_0^1 (D_e f)(x + \xi_k, \theta \delta^{2m-1} u_k + (1-\theta) \delta^{2m-1} u_s, t + \tau_k) d\theta (\delta^{2m-1} u_{k,s}) \\ &= \sum_{|\alpha|=2m} [a_\alpha(x + \xi_s, \delta^{2m-1} u_s, t + \tau_s) - a_\alpha(x + \xi_k, \delta^{2m-1} u_s, t + \tau_s)] D^\alpha u_s \\ &\quad + f(x + \xi_s, \delta^{2m-1} u_s, t + \tau_s) - f(x + \xi_k, \delta^{2m-1} u_s, t + \tau_k) \equiv \Phi_{k,s}(x, t). \end{aligned}$$

Сделав в последнем уравнении замену переменных $x + \xi_k \rightarrow x$, $t + \tau_k \rightarrow t$ и полагая $u_{k,s}(x - \xi_k, t - \tau_k) = v_{k,s}(x, t)$, $\Phi_{k,s}(x - \xi_k, t - \tau_k) = F_{k,s}(x, t)$, придем к уравнению

$$M_{k,s} v_{k,s} = F_{k,s}(x, t),$$

где $M_{k,s}$ – параболический оператор, полученный в результате указанной замены из $L_{k,s}$. Сравнивая коэффициенты $M_{k,s}$ с соответствующими коэффициентами оператора,

²Заключения леммы 2 и теоремы 5 остаются справедливыми, если в условиях $a_{\alpha,0} \in C^{\gamma, \gamma/(2m)}$, (5.2) и (5.7) пространство $C^{\gamma, \gamma/(2m)}$ заменить пространством $C^{\gamma,0}$.

стоящего в левой части равенства (5.6), на основании леммы 2 заключаем, что существуют такие положительные числа ε и N , что при выполнении неравенства (5.7) и при $k, s > N$ имеет место равномерная относительно k, s э.д. решений уравнения $M_{k,s}v = 0$. Кроме того, легко видеть, что $\|F_{k,s}\|_{C^{0,0}} \rightarrow 0$ при $k, s \rightarrow \infty$ и норма $\|F_{k,s}\|_{C^{\gamma,\gamma/(2m)}}$ равномерно относительно k, s ограничена. Поэтому при $\gamma' \in (0, \gamma) \|F_{k,s}\|_{C^{\gamma',\gamma'/(2m)}} \rightarrow 0$ при $k, s \rightarrow \infty$. Отсюда и следует компактность в $C^{0,0}$ сдвигов u_k . Теорема 5 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жиков В. В. Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. С. 1380–1408.
- [2] Эйдельман С. Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964.
- [3] Левенштам В. Б. Усреднение квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующей главной частью. Экспоненциальная дихотомия // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 4. С. 813–851.
- [4] Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970.
- [5] Далекский Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
- [6] Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970.
- [7] Мухамадиев Э. Об обратимости дифференциальных операторов в пространстве непрерывных и ограниченных функций // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 1. С. 47–49.
- [8] Жиков В. В., Тюрин В. М. Об обратимости оператора $d/dt + A(t)$ в пространстве ограниченных функций // Матем. заметки. 1976. Т. 19. № 1. С. 99–104.
- [9] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
- [10] Тюрин В. М. Об обратимости линейных дифференциальных операторов в некоторых функциональных пространствах // Сиб. матем. ж. 1991. Т. 32. № 3. С. 160–165.
- [11] Баскаков А. Г. Подгруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его прилож. 1996. Т. 30. № 3. С. 1–11.
- [12] Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
- [13] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
- [14] Шубин М. А. Почти периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными // УМН. 1978. Т. 33. № 2. С. 3–47.
- [15] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
- [16] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
- [17] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. О G -сходимости параболических операторов // УМН. 1981. Т. 36. № 1. С. 11–58.

Ростовский государственный университет
E-mail: vleven@math.rsu.ru

Поступило
29.03.2000
Исправленный вариант
08.07.2002