Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнев (мл.), А. А. Махнев, Овоиды и двудольные подграфы в обобщенных четырехугольниках, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 6, 878–885

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:43:45

УДК 519.14

ОВОИДЫ И ДВУДОЛЬНЫЕ ПОДГРАФЫ В ОБОБЩЕННЫХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКАХ

А. А. Махнев (мл.), А. А. Махнев

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется α -частичной геометрией порядка (s, t) , если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется обобщенным 4-угольником и обозначается $GQ(s, t)$. В данной статье установлено, что если псевдогеометрический граф для обобщенного четырехугольника $GQ(s, s^2 - s)$ содержит более двух овоидов, то $s = 2$. Доказано, что точечный граф обобщенного четырехугольника $GQ(4, t)$ не содержит $K_{4,6}$ -подграфов. Наконец, показано, что если в псевдогеометрическом графе для обобщенного четырехугольника $GQ(4, t)$ некоторый μ -подграф содержит треугольник, то $t \leq 6$.

Библиография: 5 названий.

1. Введение: определения и основные результаты. Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. В данной работе *подграфом* графа Γ будем называть индуцированный подграф. Если a, b – вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначим расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ – подграф на множестве всех вершин графа Γ , которые находятся на расстоянии i от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ назовем *окрестностью* вершины a и обозначим через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначим подграф $\{a\} \cup [a]$. *Валентностью* вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным* валентности k , если валентность любой вершины a из Γ равна k . Граф Γ назовем *реберно регулярным* с параметрами (v, k, λ) , если он содержит v вершин, регулярен валентности k , и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ – *вполне регулярный* граф с параметрами (v, k, λ, μ) , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b , находящихся на расстоянии 2 в Γ . Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным* графом, если он имеет диаметр 2.

Для подграфа Δ графа Γ через $K_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ , $x_i(\Delta) = |K_i(\Delta)|$. Через $K_{m,n}$ обозначим полный двудольный граф с долями порядков m, n . Подграф $[a] \cap [b]$ назовем (μ) - λ -*подграфом*, если вершины a, b смежны (находятся на расстоянии 2).

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется α -частичной геометрией порядка (s, t) , если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00462.

на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s, t)$.

Точечным графом частичной геометрии называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две вершины смежны, если они различны и лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = (s - 1) + (\alpha - 1)t$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры, называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$. В таких графах граница Хоффмана для клик (см. [1]) равна $s + 1$, и каждая вершина вне $(s + 1)$ -клики L смежна с α вершинами из L . *Овоидом* псевдогеометрического графа для $pG_\alpha(s, t)$ называется коклика из $st/\alpha + 1$ точек.

В данной статье показано, что если псевдогеометрический граф Γ для частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ содержит коклику $\emptyset$, достигающую равенства в границе Хоффмана и границе Цветковича для коклик (см. [1]), то $\alpha = 1$, $t = s^2 - s$ и подграф $\Gamma - \emptyset$ сильно регулярен с параметрами $(s^2t + s, (s - 1)(t + 1), s - 2, (s - 1)^2)$. Далее, установлено, что если псевдогеометрический граф для обобщенного четырехугольника $GQ(s, s^2 - s)$ содержит более двух овоидов, то $s = 2$. Доказано, что если псевдогеометрический граф для обобщенного четырехугольника $GQ(4, t)$ содержит $K_{4,6}$ -подграф, то $t = 6$ (в частности, точечный граф обобщенного четырехугольника $GQ(4, t)$ не содержит $K_{4,6}$ -подграфов). Наконец, показано, что если в псевдогеометрическом графе для обобщенного четырехугольника $GQ(4, t)$ некоторый μ -подграф содержит треугольник, то $t \leq 6$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть псевдогеометрический граф Γ для частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ содержит коклику $\emptyset$, достигающую равенства в границе Хоффмана и границе Цветковича для коклик. Тогда $\alpha = 1$, $t = s^2 - s$ и подграф $\Gamma - \emptyset$ сильно регулярен с параметрами

$$(s^2t + s, (s - 1)(t + 1), s - 2, (s - 1)^2)$$

и собственными значениями

$$(s - 1)(s^2 - s + 1), \quad s - 1, \quad -(s^2 - 2s + 2)$$

кратностей

$$1, \quad (s - 1)(s^3 - s^2 + 1), \quad s^3 - s^2$$

соответственно.

Интерес к обобщенным четырехугольникам порядка $(s, s^2 - s)$ объясняется еще и тем, что для $GQ(s, t)$ с $1 < s \leq t$ выполняется неравенство Хигмена $t \leq s^2$, причем если $t \neq s^2$, то $t \leq s^2 - s$ (см. [2, леммы 1.2.3, 1.2.5]).

Заметим, что известно существование обобщенного четырехугольника $GQ(s, s^2 - s)$ только для $s = 2$. В этом случае дополнение овоида является графом Петерсена (сильно регулярным графом с параметрами $(10, 3, 0, 1)$). Далее, $GQ(2, 2)$ содержит точно 6 овоидов. Известно, что псевдогеометрический граф для обобщенного четырехугольника $GQ(3, 6)$ не существует (см. [3] и независимо [4]). Вопрос о существовании $GQ(s, s^2 - s)$ для $s \geq 4$ остается открытым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть псевдогеометрический граф Γ для обобщенного четырехугольника $GQ(s, s^2 - s)$ содержит более двух оvoidов. Тогда $s = 2$.

Хорошо известно, что если точечный граф Γ для обобщенного четырехугольника $GQ(s, t)$ содержит $K_{m,n}$ -подграф, то $(m-1)(n-1) \leq s^2$. Следующие два результата существенно уточняют эту оценку в случае $s = 4$.

ТЕОРЕМА. Пусть псевдогеометрический граф Γ для обобщенного четырехугольника $GQ(4, t)$ содержит $K_{4,6}$ -подграф. Тогда $t = 6$.

СЛЕДСТВИЕ. Точечный граф обобщенного четырехугольника $GQ(4, t)$ не содержит $K_{4,6}$ -подграфов.

В связи с нашей теоремой интерес представляет следующая

ПРОБЛЕМА. Существует ли псевдогеометрический граф Γ для обобщенного четырехугольника $GQ(4, 6)$, содержащий $K_{4,6}$ -подграф?

Для доказательства геометричности псевдогеометрического графа Γ для обобщенного четырехугольника $GQ(s, t)$ достаточно установить, что μ -подграфы из Γ не содержат ребер. Первым приближением к этой цели в случае $s = 4$ является удаление треугольников из μ -подграфов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть в псевдогеометрическом графе Γ для обобщенного четырехугольника $GQ(4, t)$ некоторый μ -подграф содержит треугольник. Тогда $t \leq 6$.

2. Доказательство основных результатов. Прежде чем перейти к доказательству основных результатов статьи, приведем одну вспомогательную лемму.

ЛЕММА 1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) , Δ — индуцированный подграф с N вершинами, M ребрами и валентностями вершин $d_1, \dots, d_N$. Тогда

$$(v - N) - (kN - 2M) + \left(\lambda M + \mu \left(\binom{N}{2} - M \right) - \sum_{i=1}^N \binom{d_i}{2} \right) = x_0 + \sum_{i=3}^N \binom{i-1}{2} x_i,$$

где $x_i = x_i(\Delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. доказательство леммы 1 из [5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пусть Γ — псевдогеометрический граф для частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$, содержащий кокликлу $\mathcal{O}$, достигающую равенства в границе Хоффмана и границе Цветковича для коклик, и $\Sigma = \Gamma - \mathcal{O}$. Тогда

$$|\mathcal{O}| = 1 + \frac{st}{\alpha} = \frac{s(s - \alpha + 1)(st + \alpha)}{\alpha(s + t + 1 - \alpha)},$$

поэтому $t = (s - 1)(s + 1 - \alpha)$.

По теореме 4 [1] граф Σ сильно регулярен. Покажем, что Σ имеет параметры

$$v = s \left(1 + \frac{st}{\alpha} \right), \quad k = (s - 1)(t + 1),$$

$$\lambda = (s - 2)(1 + (\alpha - 1)(s + 1 - \alpha)), \quad \mu = s^2 - \alpha s - s + 2\alpha - 1.$$

Далее, если a, b – две смежные (соответственно несмежные) вершины из Σ , то $[a] \cap [b]$ содержит $1 + (\alpha - 1)(s + 1 - \alpha)$ вершин (соответственно $s + (s - 1)(\alpha - 1)(s + 1 - \alpha)$ вершин) из $\mathcal{O}$.

Если K является $(s + 1)$ -кликой из Γ , то K пересекает овоид $\mathcal{O}$ в единственной точке x . Тогда любая точка из $\mathcal{O} - x$ смежна с α вершинами из K , поэтому любая пара вершин из $K - \mathcal{O}$ смежна с $1 + (\alpha - 1)(s + 1 - \alpha)$ точками из $\mathcal{O}$. Так как граф Σ сильно регулярен, то любое ребро из Σ смежно с $1 + (\alpha - 1)(s + 1 - \alpha)$ точками из $\mathcal{O}$. Отсюда получаются выражения для параметров v, k, λ . Из прямоугольного соотношения $k(k - \lambda - 1) = (v - k - 1)\mu$ получим выражение для μ . Наконец, каждая пара несмежных вершин из Σ смежна с $\alpha(t + 1) - \mu$ точками из $\mathcal{O}$.

Допустим, что $\alpha > 1$. Так как каждая вершина вне $\mathcal{O}$ смежна с $t + 1$ точками из $\mathcal{O}$, то $s + (\alpha - 1)t \leq t + 1$, поэтому $\alpha = 2, s = 1$ и $t = 0$, противоречие. Отсюда $\alpha = 1, \Gamma$ – псевдогеометрический граф для обобщенного четырехугольника $GQ(s, s^2 - s)$, граф Σ имеет параметры

$$(s^2t + s, (s - 1)(t + 1), s - 2, (s - 1)^2),$$

собственные значения графа Σ равны

$$(s - 1)(t + 1), \quad s - 1, \quad -(s^2 - 2s + 2)$$

и имеют кратности

$$1, \quad (s - 1)(st + 1), \quad st$$

соответственно. Предложение 1 доказано.

Перейдем к доказательству предложения 2.

ЛЕММА 2. Если псевдогеометрический граф Γ для обобщенного четырехугольника $GQ(s, s^2 - s)$ содержит два различных овоида $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$, то $|\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'| = (s - 1)^2$, причем $(\mathcal{O} - \mathcal{O}', \mathcal{O}' - \mathcal{O})$ является симметричной $2-(v, s^2 - s + 1, s)$ схемой, где $v = s(s^2 - 2s + 2)$. Далее, любая вершина из $\Gamma - (\mathcal{O} \cup \mathcal{O}')$ смежна с $s - 1$ вершинами из $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1 для любых двух несмежных вершин вне $\mathcal{O}$ пересечение их окрестностей содержит s точек из $\mathcal{O}$, поэтому $(\mathcal{O} - \mathcal{O}', \mathcal{O}' - \mathcal{O})$ является симметричной $2-(v, s^2 - s + 1, s)$ -схемой, где $v = |\mathcal{O}| - |\mathcal{O}' \cap \mathcal{O}|$. Но тогда $(s^2 - s)(s^2 - s + 1) = (v - 1)s$, поэтому $v = s(s^2 - 2s + 2)$ и $|\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'| = (s - 1)^2$.

Заметим, что для клики $\mathcal{O} - \mathcal{O}'$ графа $\Gamma - \mathcal{O}'$ достигается равенство в границе Хоффмана для клик, поэтому любая вершина из $\Gamma - (\mathcal{O} \cup \mathcal{O}')$ смежна с $s - 1$ вершинами из $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$. Лемма доказана.

Такие симметричные схемы существуют для $s = 2$ и 4 . Пусть Λ – граф вершин и ребер обычного куба. Для вершины $a \in \Lambda$ положим $X = \{a\} \cup \Lambda_2(a)$, $\mathcal{B} = \Lambda(a) \cup \Lambda_3(a)$. Тогда $(X, \mathcal{B})$ дает пример схемы из заключения леммы 2 с $s = 2$. Для $s = 4$ соответствующим примером является схема проективных точек и гиперплоскостей проективного пространства $PG(3, 3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Пусть $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ и $\mathcal{O}''$ – три различных овоида из Γ , $\Lambda = \mathcal{O}'' \cap \mathcal{O}' \cap \mathcal{O}$, $\beta = |\Lambda|$. Число ребер между $(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}') - \Lambda$ и $\mathcal{O}'' - (\mathcal{O}' \cup \mathcal{O})$ равно $((s - 1)^2 - \beta)(s^2 - s + 1) = (s^3 - s^2 + 1 - 2(s - 1)^2 + \beta)(s - 1)$. Отсюда $\beta = (s - 1)\gamma$ и $(s - 1 - \gamma)(s^2 - s + 1) = s^3 - 3s^2 + 4s - 1 + (s - 1)\gamma$, следовательно, $\gamma \equiv -1 \pmod{(s - 1)}$ и $\gamma = s - 2$. Таким образом, $s^2 - s + 1 = s^3 - 3s^2 + 4s - 1 + (s - 1)(s - 2)$, поэтому $s = 2$. Предложение 2 доказано.

ЛЕММА 3. Точечный граф Γ обобщенного четырехугольника $GQ(4, t)$ не содержит $K_{3,9}$ - и $K_{4,7}$ -подграфов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $GQ(s, t)$ содержит $K_{m,n}$ -подграф Δ . По лемме 1.4.1 [2] $(m-1)(n-1) \leq s^2$, причем в случае равенства либо $m = n = s+1$, либо $s < t$, $n = 1+t$, $m = 1+s^2/t$. Поэтому в случае $s = 4$ граф Γ не содержит $K_{3,9}$ - и $K_{4,7}$ -подграфов.

До конца работы мы будем предполагать, что Γ – псевдогеометрический граф для $GQ(4, t)$. По условию целочисленности $t+4$ делит $20 \cdot 12$, поэтому $t = 1, 2, 4, 6, 8, 11, 12$ или 16 .

ЛЕММА 4. Пусть $\Delta = \{a_1, \dots, a_4; b_1, \dots, b_n\}$ является $K_{4,n}$ -подграфом из Γ , $K_i = K_i(\Delta)$, $x_i = |K_i|$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = t(n-4)(n-5)/2 - 3(n-1)(n-6)/2$;
- (2) если $n = 5$ и $x_0 \neq 0$, то $t = 4$;
- (3) $n < 7$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число вершин N подграфа Δ равно $4+n$, а число его ребер $M = 4n$, валентности вершин равны $d_1 = \dots = d_4 = n$ и $d_i = 4$ для $i > 4$. По лемме 1 имеем

$$x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = \frac{t(n-4)(n-5)}{2} - \frac{3(n-1)(n-6)}{2}.$$

Если $n = 5$ и $w \in K_0$, то $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = 6$. Число 2-путей с началом w и концом в Δ равно $9(t+1)$. С другой стороны, число таких 2-путей не больше $4 \cdot 3 \cdot 2 + 2(4t+1)$, если $[w]$ содержит точку из K_4 , и не больше $3 \cdot 5 + 2(4t-1)$, если $[w]$ не пересекает K_4 . Отсюда $9t+9 \leq 8t+13$ и $t \leq 4$. Утверждение (2) доказано.

Допустим, что $n = 7$. Положим $\Delta'' = \Delta - \{b_1, b_2\}$, $M_i = K_i(\Delta'')$, $y'_i = |M_i|$. Тогда $y'_0 + \sum \binom{i-1}{2} y'_i = 6$, причем $b_1, b_2 \in M_4$. Отсюда $y'_0 = y'_3 = 0$ и каждая точка из $([b_1] \cap [b_2]) - \Delta$ смежна с некоторой вершиной b_j из $\{b_3, \dots, b_7\}$. Теперь $x_0(\Omega) + \sum \binom{i-1}{2} x_i(\Omega) > 6$ для подходящего $K_{4,5}$ -подграфа Ω из Δ , противоречие.

ЛЕММА 5. Если Γ содержит $K_{4,6}$ -подграф $\Delta = \{a_1, \dots, a_4; b_1, \dots, b_6\}$, $K_i = K_i(\Delta)$, $x_i = |K_i|$, то $x_3 = t = 6$ и каждая точка b_i смежна точно с тремя вершинами из K_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что $x_5 = 0$. В противном случае для $d \in K_5$ некоторая точка b_j не смежна с d , $b_j \in K_4(\Delta - \{b_j\})$, $d \in K_5(\Delta - \{b_j\})$, противоречие с тем, что $x_0(\Delta - \{b_i\}) + \sum \binom{i-1}{2} x_i(\Delta - \{b_i\}) = 6$.

Если K_4 содержит точку d , то для любой не смежной с d точки b_j получим $x_3(\Delta - \{b_j\}) = 0$. Пусть $b_5, b_6 \notin [d]$, $\Delta_{56} = \Delta - \{b_5, b_6\}$ и $z_i = x_i(\Delta_{56})$. Тогда

$$z_0 + \sum \binom{i-1}{2} z_i = 9$$

и $b_5, b_6, d \in K_4(\Delta_{56})$. Отсюда $[b_5] \cap [b_6]$ содержит $t-3$ точки из $K_3 \cup K_4$. Но $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = t$, поэтому $[b_5] \cap [b_6]$ содержит $t-3$ точки из K_3 . Пусть точка b_i из $\{b_1, \dots, b_4\}$ смежна не более, чем с $[(t-3)/4]$ точками из K_3 . Тогда $K_3(\Delta - \{b_i\})$ содержит не менее $[3(t-3)/4]$ точек из K_3 и $t-3 \leq 4$. Если $t = 6$, то b_i не смежна с точками из K_3 и $K_3(\Delta - \{b_i\})$ содержит $t-3$ точек из $[b_5] \cap [b_6]$. Кроме того,

$d \in K_3(\Delta - \{b_i\}) \cup K_4(\Delta - \{b_i\})$, противоречие. Значит, $x_4 = 0$, $x_3 = t$ и имеется не более $3t$ ребер между K_3 и $\{b_1, \dots, b_6\}$.

Пусть $[b_j]$ содержит наименьшее число γ точек из K_3 . Тогда $\gamma \leq [t/2]$. Для подграфа $\Delta_j = \Delta - \{b_j\}$ получим $b_j \in K_4(\Delta_j)$ и $K_3(\Delta_j)$ содержит $t - \gamma$ точек. Поэтому $t - \gamma \leq 3$ и $t = 6$. Более того, $\gamma = 3$ и каждая точка из $\{b_1, \dots, b_6\}$ смежна точно с 3 точками из K_3 . Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Пусть точечный граф Γ для обобщенного четырехугольника $GQ(4, t)$ содержит $K_{4,6}$ -подграф. По лемме 5 получим $t = 6$. Но тогда по утверждению (4) леммы 1.3.4 [2] Δ содержится в $K_{4,7}$ -подграфе из Γ . Противоречие с леммой 3.

ЛЕММА 6. Пусть $\Delta = \{a_1, \dots, a_4; b_1, \dots, b_5\}$ является $K_{4,5}$ -подграфом точечно-го графа Γ обобщенного четырехугольника порядка $(4, t)$, $K_i = K_i(\Delta)$, $x_i = |K_i|$. Если $t > 8$, то либо Δ содержится в $(5, 5)$ -подграфе из Γ , либо $x_3 = 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = 6$, причем, если $w \in K_0$, то $t = 4$. По условию каждое ребро подграфа Δ лежит на единственной прямой, причем w смежна с единственной точкой на этой прямой. Но в этом случае множество N из 20 точек указанного типа, смежных с w , должно совпадать с $[w]$. Противоречие с тем, что порядок максимальной клики из N не больше 4. Значит, $x_0 = 0$. Если $t > 8$, то необходимо $t \geq 11$.

Пусть $x_5 = 0$. По следствию K_4 не содержит точек, смежных с 4 вершинами $a_1, \dots, a_4$. Покажем, что K_4 не содержит точек, смежных с 4 вершинами из $\{b_1, \dots, b_5\}$. Пусть вершина $w \in K_4$ смежна с вершинами $b_1, \dots, b_4$, $\Delta' = \{a_1, \dots, a_4; b_1, \dots, b_4\}$, $L_i = K_i(\Delta')$. Тогда Δ' является $(4, 4)$ -подграфом, $b_5, w \in L_4$, причем $[b_5] \cap [w]$ содержит $t - 7$ точек из L_0 , противоречие с тем, что $x_0(\Delta') + \sum \binom{i-1}{2} x_i(\Delta') = 9$. Итак, $x_4 = 0$ и $x_3 = 6$.

ЛЕММА 7. Пусть $\Delta = \{a_1, \dots, a_3; b_1, \dots, b_n\}$ является $(3, n)$ -подграфом псевдогеометрического графа Γ для обобщенного четырехугольника порядка $(4, 8)$, $K_i = K_i(\Delta)$, $x_i = |K_i|$. Тогда

$$x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = 3n^2 - 28n + 81.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $N = n + 3$, $M = 3n$, $\sum \binom{d_i}{2} = 3n(n + 1)/2$. По лемме 1 получим $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = 3n^2 - 28n + 81$.

ЛЕММА 8. Пусть псевдогеометрический граф Γ для обобщенного четырехугольника порядка $(4, t)$ содержит 4-клику Δ , не лежащую в 5-клике, $K_i = K_i(\Delta)$, $x_i = |K_i|$. Тогда

- (1) $x_0 + x_3 = 4t + 3$;
- (2) если $e \in K_3$, $d \in \Delta - [e]$, $\Delta' = \Delta \cup \{e\}$, $L_i = K_i(\Delta')$, $y_i = |L_i|$, то треугольник $\Delta \cap [e]$ изолирован в $[d] \cap [e]$, $y_0 = y_0 + \sum_i \binom{i-1}{2} y_i = t + 2$, $y_2 = t + 4$ и если $t \geq 6$, то L_0 - коклика и каждая вершина из L_0 смежна с $t + 1$ точкой из L_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подсчитав число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и число 2-путей с началом и концом в Δ и средней вершиной вне Δ , получим систему уравнений

$$\sum_i x_i = 20t + 1, \quad \sum_i ix_i = 16t + 4, \quad x_0 + \sum_i \binom{i-1}{2} x_i = 6.$$

Вычитая второе уравнение из суммы первого с третьим, получим первое утверждение леммы.

Пусть $x_3 \neq 0$, $\Omega = \Gamma - (d^\perp \cup e^\perp)$. Тогда $|\Omega| = 13t - 4$ и окрестности различных вершин треугольника $\Delta \cap [e]$ не пересекаются в Ω . Покажем, что треугольник $\Delta \cap [e] = \{a, b, c\}$ изолирован в $[d] \cap [e]$. Пусть вершина a смежна с некоторой вершиной $w \in ([d] \cap [e]) - \Delta$. Тогда $[w]$ содержит не менее $4t - 3$ вершин из Ω , $|[a] \cap \Omega| = 4t - 1$, $[b]$ и $[c]$ содержат не менее, чем по $4t - 2$ вершин из Ω . Итак, $|\Omega - ([a] \cup [b] \cup [c])| \leq t + 1$, а $[w] \cap \Omega$ содержит не более одной вершины из $[a]$ и не более $2t - 4$ вершин из $[b] \cup [c]$, следовательно, $2t \leq t + 1$, $t = 1$, и $\mu = 2$, противоречие с тем, что μ -подграф $d^\perp \cup e^\perp$ содержит треугольник.

Теперь каждая вершина из $\{a, b, c\}$ смежна с $4t - 2$ вершинами из Ω , поэтому $y_0 = y_0 + \sum_i \binom{i-1}{2} y_i = t + 2$. Далее, L_2 содержит $t - 2$ вершин из $[d] \cap [e]$ и по одной вершине из $[d] \cap [z]$, $[z] \cap [e]$ для $z \in \{a, b, c\}$, поэтому $y_2 = t + 4$. Если $f \in L_0$, то $|[f] \cap [z]| = t + 1$ для $z \in \Delta'$, следовательно, $[f]$ содержит не менее $t + 1$ вершин из L_2 .

Если $t \geq 6$, то $[f] \cap [g]$ содержит не менее $t - 2$ вершин из L_2 для любых $f, g \in L_0$, поэтому L_0 является кокликкой и $[f]$ содержит точно $t + 1$ вершин из L_2 для любой вершины $f \in L_0$. Лемма доказана.

В леммах 9–11 предполагается, что выполнены условия леммы 8 и K_3 содержит точку e , не смежную с точкой $d \in \Delta$. Зафиксируем обозначения

$$\Lambda = \{L_0 \cup \{d, e\}; L_2\}, \quad \Lambda_1 = L_0 \cup \{d, e\}, \quad \Lambda_2 = L_2.$$

ЛЕММА 9. Параметр t не больше 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Положим $\Omega = L_2 \cap [d] \cap [e]$. Тогда $|\Omega| = t - 2$.

Для $w \in L_2$ число 2-путей с началом w , концом в Δ' и средней вершиной в $\Gamma - \Delta'$ равно $3t + 3$, если w смежна с d и e ; равно $3t + 2$, если w смежна с единственной вершиной из $\{d, e\}$. Если $[w]$ содержит γ точек из L_2 , то $[w]$ содержит $\gamma + t - 1$ точек из L_0 , если $w \in \Omega$, и $[w]$ содержит $\gamma + t$ точек из L_0 , если $w \in L_2 - \Omega$. Значит, $[u] \cap [w]$ содержит не менее $t - 2$ точек из L_0 для любого ребра uw из L_2 . Для $t \geq 6$ подграф L_2 является кокликкой, причем каждая точка из Ω смежна с $t - 1$ вершиной из L_0 , а каждая точка из $L_2 - \Omega$ смежна с t точками из L_0 . Допустим, что $t > 8$.

Пусть f, g — такие две вершины из L_0 , что $[f] \cap [g]$ содержит 5-элементное подмножество Ω_0 из Ω . Положим $\Phi = \{d, e, f, g; \Omega_0\}$, $M_i = K_i(\Phi)$, $z_i = x_i(\Phi)$. По лемме 4 $z_0 + \sum \binom{i-1}{2} z_i = 6$. Если Φ содержится в $(5, 5)$ -подграфе Ψ , то каждая вершина из $L_0 - \Psi$ смежна со всеми точками из $L_2 - \Omega_0$. Этот случай возникает лишь при $t \leq 6$. Значит, $z_5 = 0$. Каждая вершина из $L_0 - (M_3 \cup M_4 \cup \{f, g\})$ смежна со всеми точками из $L_2 - \Omega_0$; а вершина из $L_0 \cap M_3$ не смежна с единственной точкой из $L_2 - \Omega_0$. В худшем случае (при $t = 8$ и $z_3 = 6$) мы построим $K_{4,5}$ -подграф с долями, лежащими в L_0 и $L_2 - \Omega$, причем не менее 4 вершин из M_3 смежно с 4 точками этого $K_{4,5}$ -подграфа. Противоречие с леммой 4.

Итак, $[f] \cap [g]$ содержит не более четырех вершин из Ω для любых различных $f, g \in L_0$. Отсюда $t \leq 8$.

ЛЕММА 10. Если $t = 8$, то двудольный подграф Λ не содержит $K_{4,5}$ - и $K_{3,6}$ -подграфов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t = 8$. Тогда $|\Lambda| = 24$ и каждая вершина из доли Λ_i не смежна точно с 3 точками из доли Λ_{3-i} . Допустим, что Λ содержит двудольный подграф Σ . Положим $\Sigma_i = \Sigma \cap \Lambda_i$, $\Lambda'_i = \Lambda_i - \Sigma_i$. Допустим, что Σ является $K_{4,5}$ -подграфом. Без ограничения общности $|\Sigma_1| = 4$.

Число ребер между Σ_2 и Λ'_1 равно 25, и если Λ'_1 содержит α_i точек из $K_i(\Sigma)$, то $\sum \alpha_i = 8$, $\sum i\alpha_i = 25$. Поэтому $\alpha_4 = \alpha_2 + 1$, $\alpha_3 = 7 - 2\alpha_2$. Противоречие с тем, что $\alpha_3 + 3\alpha_4 \leq 6$.

Допустим теперь, что Σ является $K_{3,6}$ -подграфом. Без ограничения общности, $|\Sigma_1| = 3$. Число ребер между Σ_2 и Λ'_1 равно 36 и по первому утверждению леммы Λ'_1 не пересекает $K_5(\Sigma)$. Поэтому Λ'_1 содержит 9 точек из $K_4(\Sigma)$. Противоречие с тем, что по лемме 7 верно равенство $x_0(\Sigma) + \sum \binom{i-1}{2} x_i(\Sigma) = 21$.

ЛЕММА 11. Если $t = 8$, то Λ не содержит $K_{3,5}$ -подграфов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t = 8$, Λ содержит $K_{3,5}$ -подграф Σ . Положим $\Sigma_i = \Sigma \cap \Lambda_i$, $\Lambda'_i = \Lambda_i - \Sigma_i$. Без ограничения общности, $|\Sigma_1| = 3$.

Число ребер между Σ_2 и Λ'_1 равно 30, а между Σ_1 и Λ'_2 – равно 12. Покажем сначала, что $K_0(\Sigma)$ не пересекает Λ'_2 . В противном случае Λ'_2 содержит точку w из $K_0(\Sigma)$ и 6 точек $f_1, \dots, f_6$ из $K_2(\Sigma)$. Далее, $\Lambda'_1 \subset [w]$ и $[f_i]$ содержит 7 точек из Λ'_1 . Из леммы 10 следует, что для любых различных $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ подграф $[f_i] \cap [f_j]$ содержит точно 5 точек из Λ'_1 и $\Lambda'_1 \subset [f_i] \cup [f_j]$. Таким образом, пары точек из Λ'_1 , не смежные с f_i , должны попарно не пересекаться. Противоречие с тем, что $|\Lambda'_1| = 9$.

Итак, $K_0(\Sigma)$ не пересекает Λ'_2 и Λ'_2 содержит 2 точки w_1, w_2 из $K_1(\Sigma)$ и 5 точек $f_1, \dots, f_5$ из $K_2(\Sigma)$. Пусть a – точка из Σ_1 , не смежная с w_1 и w_2 . Тогда a не смежна с некоторой точкой f_i и мы получим $K_{3,5}$ -подграф $\Sigma' = \{w_1, w_2, f_i; [w_1] \cap [w_2] \cap [f_i] \cap \Lambda_1\}$, причем $a \in K_0(\Sigma')$, противоречие. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Можно считать, что μ -подграф $[d] \cap [e]$ содержит треугольник, поэтому выполняются леммы 8–11. Число ребер между $L_2 - ([d] \cap [e])$ и L_0 равно 48, поэтому некоторая точка f из L_0 смежна не более, чем с 4 вершинами из $L_2 - ([d] \cap [e])$ и мы получим $K_{3,5}$ -подграф $\{d, e, f; [d] \cap [e] \cap [f]\}$. Противоречие с леммой 11. Предложение 3 доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Браувер А. Е., ван Линт Й. Х. Сильно регулярные графы и частичные геометрии // Кибернетический сборник. 1987. Т. 24. С. 186–229.
- [2] Paine S., Thas J. Finite generalized quadrangles. Boston: Pitman, 1985.
- [3] Haemers W. There exists no $(76, 21, 2, 7)$ strongly regular graph // Finite Geometries and Combinatorics, London Math. Soc. Lecture Notes / ed. F. De Clerck et. al. V. 191. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. P. 175–176.
- [4] Махнев А. А. Опсевдогеометрических графах некоторых частичных геометрий // Вопросы алгебры. Вып. 11. Гомель: Изд-во Гомельского университета, 1997. С. 60–67.
- [5] Wilbrink H. A., Brouwer A. E. $(57, 14, 1)$ strongly regular graph does not exist // Proc. Kon. Nederl. Akad. Ser. A. 1983. V. 45. № 1. P. 117–121.