Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Островский, Точная асимптотика интегралов Лапласа для негладких функций, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 6, 886–890

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm236>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:29:29

УДК 517.928

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛОВ ЛАПЛАСА ДЛЯ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Е. И. Островский

В заметке вычисляется точная асимптотика с остаточным членом интегралов типа Лапласа в произвольном пространстве без каких-либо предположений о гладкости функций. В качестве частного случая выводится классический результат. Рассмотрены примеры.

Библиография: 6 названий.

Введение и обозначения. Пусть (X, B, μ) – измеримое пространство с ограниченной мерой μ , $\mu(X) < \infty$; $S(x)$, $g(x)$ – измеримые числовые функции, причем $S(x)$ существенно ограничена:

$$M = \operatorname{vrai\,sup}_{x \in X} S(x) < \infty,$$

и $g(x)$ нетривиальна: $\mu\{x: g(x) = 0\} = 0$, ограничена по модулю: $\operatorname{vrai\,sup}_x |g(x)| < \infty$. Положим

$$I(\lambda) = \int_X g(x) \exp(\lambda S(x)) \mu(dx). \quad (1)$$

Здесь и далее λ – “большой” числовой параметр: $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \geq 2$. Интеграл в (1) понимается в смысле Лебега; из сформулированных условий вытекает его абсолютная сходимость.

В заметке вычисляется точная асимптотика, причем с остаточным членом $I(\lambda)$ в терминах, весьма близких к рассматривавшимся в [1].

Как следствие выводим классическую формулу Лапласа в различных ее модификациях и некоторые применения в теории вероятностей.

Никаких условий гладкости на исходные функции $g(\cdot)$, $S(\cdot)$ (непрерывность, дифференцируемость и др.) мы не накладываем; более того, на множестве X не предполагается наличие какой-либо топологической структуры.

В работе [1] (см. также [2, с. 141]) выведены *логарифмические асимптотики* для $I(\lambda)$ и отмечены их применения в теории вероятностей. Автор хотел бы добавить, что в последнее время в этой науке отчетливо выявился интерес именно к *точным асимптотикам*. К примеру, в [3, с. 74–89] и далее вычисляется точная асимптотика распределений максимума гауссовских полей, в [4] – кратных стохастических интегралов, в [5] описаны и другие применения.

Введем необходимые обозначения. Положим (частично по аналогии с [1], [2]) при $u \geq 0$

$$\begin{aligned} X(u) &= \{x: x \in X, M > S(x) > M - u\}, \quad Y = \{x, x \in X, S(x) = M\}, \\ Z &= \{x: x \in X, S(x) < M\}, \quad H(u) = \int_{X(u)} g(x) \mu(dx), \\ I_0(\lambda) &= \int_Z g(x) \exp(\lambda S(x)) \mu(dx). \end{aligned}$$

Отметим, что при $u \leq 0$ выполнено равенство $H(u) = 0$.

Далее символы C, C_j – конечные положительные константы, δ, δ_j – малые положительные константы, $\delta = \delta_1 < 1/2, \delta_{j+1} < \delta_j, \Gamma(\cdot)$ – гамма функция,

$$\begin{aligned} K &= \int_Y g(x) \mu(dx), \quad K_1(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}, \quad K_2(n) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \\ K_3(n, v, \beta, \gamma) &= v\beta^{-1} K_2(n) \Gamma\left(1 + \frac{n-\gamma-1}{\beta}\right), \\ L(\lambda) &= L(M, C, r, m; \lambda) = C\Gamma(r+1) \exp(M\lambda) \lambda^{-r} \ln^m(\lambda), \\ J(\lambda) &= J(M, C, r, m; \lambda) = \frac{I_0(\lambda) - L(\lambda)}{L(\lambda)}. \end{aligned}$$

(Параметры C, r, m будут введены чуть ниже.) Символ $A \sim B$ в том или ином предельном переходе $\lambda \rightarrow \infty, u \rightarrow 0$ и т.д. означает *точную асимптотику*: $\lim A/B = 1$.

1. Формулировка основного результата. Поскольку $I(\lambda) = K \exp(M\lambda) + I_0(\lambda)$, то далее будем анализировать только интеграл $I_0(\lambda)$.

ТЕОРЕМА. Если $H(u) \sim Cu^r |\ln u|^m, u \rightarrow 0+, r = \text{const} > 0, s = \text{const}, C = \text{const} \neq 0$, то

$$I_0(\lambda) \sim L(M, C, r, m; \lambda). \quad (2)$$

Пусть теперь при всех достаточно малых $u: u \in (0, \delta), \delta = \text{const} \in (0, 1/2), u \rightarrow 0+$ и при тех же возможных значениях r, m, s, l

$$H(u) = Cu^r |\ln u|^m + O(u^s |\ln u|^l), \quad s, l = \text{const},$$

где предполагается, что $s > r$, либо $s = r, l < m$. Тогда при $m = 0$

$$J(\lambda) = O(\lambda^{r-s} \ln^l(\lambda));$$

если же $m \neq 0$, но

а) $s > r$, то

$$J(\lambda) = O(\ln^{-1}(\lambda));$$

б) при $s = r$

$$J(\lambda) = O(\ln^{\max(m-1, l)-m}(\lambda)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как отмечалось в [1], условие на функцию $H(u)$ при соответствующих условиях может быть проверено с помощью результатов статьи [6].

2. Доказательство теоремы. Далее без ограничения общности будем считать $M = 0$.

ЛЕММА. Пусть $\psi: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ — измеримая числовая функция такая, что

$$\int_X |g(x)\psi(S(x))| \mu(dx) < \infty.$$

Тогда

$$\int_X g(x)\psi(S(x)) \mu(dx) = \int_0^\infty \psi(u) dH(u). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проводится элементарными для теории меры методами. Обе части равенства (3) представляют собой линейные непрерывные в норме

$$\|\psi(\cdot)\| = \int_X |g(x)| |\psi(S(x))| \mu(dx)$$

функционалы от $\psi(\cdot)$. Поскольку обе части (3) совпадают для функций таких, что $\psi(S) = 1$ при $S \in [C_1, C_2]$ и $\psi(S) = 0$ при $S \notin [C_1, C_2]$, то лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Лемма может служить некоторой заменой формуле интегрирования по поверхностям уровня (равенство (3.24) из [2, с. 117], основанное на дифференциальной форме Лере–Гельфанда) в негладком случае.

Возвращаясь к доказываемой теореме, заметим, что из (2), непрерывности $H(u)$ в нуле и формулы интегрирования по частям следует

$$I_0(\lambda) = \lambda \int_0^\infty \exp(-\lambda u) H(u) du.$$

Первое утверждение теоремы следует теперь из теоремы 1.7 монографии [2, с. 76]; докажем второе. Как и в [1], [2], выводим, что

$$I_0(\lambda) = \lambda \int_0^\delta \exp(-\lambda u) H(u) du + O(\exp(-\delta\lambda)).$$

Интеграл в правой части оценивается либо с помощью леммы Ватсона [2, с. 57–58]:

$$\lambda \int_0^\delta u^r \exp(-\lambda u) du = \Gamma(r+1) \lambda^{-r} + O(\exp(-\delta_1 \lambda)),$$

либо ее обобщений

$$\lambda \int_0^\delta e^{-\lambda u} u^r \ln^m(u) du = L(\lambda) (1 + O(\ln^{-1}(\lambda)))$$

[2, с. 76]; вид остаточного члена в этих утверждениях различен. Выполняя несложные вычисления и выделяя остаточный член, приходим к утверждению теоремы.

3. Примеры.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим классический метод Лапласа для кратных интегралов

$$F(\lambda) = \int_G g(x) \exp(\lambda S(x)) dx, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, содержащая начало координат, $g(x)$ – непрерывная в нуле ограниченная функция, $S(\cdot) \in C^\infty([G])$ и достигает единственного максимума в точке $x = 0$. Без ограничения общности считаем, что $g(x) = 1$, $S(x) < S(0) = 0$, $x \neq 0$,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}(0) = \Delta(i, j) = 1, \quad i = j,$$

и $\Delta(i, j) = 0$ в противном случае. Тогда

$$\text{mes}\{x: S(x) \leq u\} \sim \text{mes}\left\{x: \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq u\right\} \sim K_1(n) u^{n/2}, \quad u \rightarrow 0+,$$

где mes – мера Лебега. Подставляя в (2), получаем классический результат [2, с. 122]. Разумеется, строгое доказательство возможно на основе теоремы Морса, согласно которой после гладкой замены переменных с единичным якобианом в некоторой окрестности нуля $S(x)$ имеет в точности вид, указанный выше. Аналогично рассматривается случай нескольких, граничных или вырожденных точек максимума. Таким образом, классический факт вытекает из нашего результата.

ПРИМЕР 2. Видоизменяя предыдущий случай, возьмем

$$S(x) = -|x|^\beta, \quad \beta = \text{const} > 0,$$

а в качестве $f(x)$ будем рассматривать функцию вида $f(x) = C_2 |x|^{-\gamma}$, $|x| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$, $\gamma = \text{const} \in (0, n)$. Тогда

$$H(u) \sim \int_{x: |x|^\beta < u} |x|^{-\gamma} dx \sim C_2 u^{(n-\gamma)/\beta},$$

откуда согласно теореме

$$I(\lambda) \sim C_2 \Gamma\left(\frac{(n-\gamma)}{\beta} + 1\right) \lambda^{(\gamma-n)/\beta}.$$

ПРИМЕР 3. Следующий пример фактически заимствован из [1], но мы находим точную асимпотику. Пусть

$$S(x) = -\left|\sum_{i=1}^n x_i^{2m(i)} - 1\right|^\beta, \quad g(x) = 1,$$

$\beta = \text{const} > 0$, $m(i)$ – целые числа, большие 1. Тогда $H(u) \sim Au^{1/\beta}$, $A = \text{const}$ [1]. По формуле (2) имеем

$$I(\lambda) \sim A \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \lambda^{-1/\beta}. \quad (4)$$

Формула (4) легко обобщается на случай любой невырожденной гладкой гиперповерхности.

ПРИМЕР 4. Последний пример – из теории вероятностей. Пусть ξ, η – одномерные случайные величины, определенные на вероятностном пространстве (Ω, B, P) , $\Omega = \{\omega\}$, причем $\text{vrai sup}_{\omega} |\eta(\omega)| < \infty$, $\text{vrai sup}_{\omega} \xi(\omega) = M < \infty$. Обозначим

$$I(\lambda) = \int_{\Omega} \eta \exp(\lambda \xi) P(d\omega), \quad q = P(\xi = M),$$

или, на вероятностном языке, $I(\lambda) = E\eta \exp(\lambda \xi)$, E – математическое ожидание на вероятностном пространстве (Ω, B, P) ,

$$H(u) = \int_{\omega: M > \xi > M-u} \eta(\omega) P(d\omega) = \iint_{x: M > x > M-u} y F(dx, dy),$$

$F(D_1, D_2) = P(\xi \in D_1, \eta \in D_2)$ – совместное распределение ξ, η . Нас интересует асимптотика $I(\lambda)$, $\lambda \rightarrow \infty$. (Случай, когда $M = \infty$, рассмотрен в [5, гл. 1].)

Пусть, как и ранее, $H(u) \sim Cu^r |\ln u|^m$, $u \rightarrow 0+$, $C \neq 0$; тогда на основании теоремы имеем

$$I(\lambda) = K \exp(\lambda M) + I_0(\lambda), \\ I_0(\lambda) \sim C\Gamma(r+1) \exp(M\lambda) \lambda^{-r} \ln^m(\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предложенный метод непосредственно не обобщается на случай чисто мнимой “фазы” $S(x)$, поскольку для метода стационарной фазы существенна еще и гладкость подынтегральных функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Маслов В.П., Федорюк М.В. Логарифмическая асимптотика интегралов Лапласа // Матем. заметки. 1981. Т. 30. С. 880–883.
- [2] Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
- [3] Питербарг В.И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: МГУ, 1984.
- [4] Островский Е.И. Точная асимптотика плотности распределения кратного стохастического интеграла // Проблемы передачи информации. 1992. Т. 61. № 6. С. 817–824.
- [5] Островский Е.И. Экспоненциальные оценки для случайных полей и их применения. Обнинск: ОИАТЭ, 1999.
- [6] Attiyah M.F. Resolution of singularities and division of distributions // Comm. Pure Appl. Math. 1970. V. 23. № 2. P. 145–150.

Институт индустриальной математики, г. Реховот, Израиль
E-mail: ignat@102.net.il

Поступило
10.08.2001
Исправленный вариант
08.04.2002