Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. З. Шаваровский, Полная система инвариантов пары матриц четного порядка со специальной формой Смита ее характеристической матрицы относительно подобия, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 6, 923–941

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm237>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 03:53:11

УДК 512.64

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ИНВАРИАНТОВ ПАРЫ МАТРИЦ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ФОРМОЙ СМИТА ЕЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДОБИЯ

Б. З. Шаваровский

Исследуется подобие пары матриц четного порядка со специальной формой Смита и некоторыми условиями разложимости ее характеристической матрицы. В этой связи найдена полная система инвариантов выделенного класса пар матриц относительно подобия. Полученные результаты формулируются в классических терминах рангов, минимальных индексов, элементарных делителей матриц (“конечных” и “бесконечных”).

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Предварительные предложения. Рассматриваемые в предлагаемой работе вопросы относятся к проблематике подобия пар матриц. Актуальность последней не вызывает сомнения, несмотря на наличие обширной литературы в этом направлении (см., например, [1]–[4]). Классификация пар матриц с точностью до подобия – в общем случае важная и трудная задача. Она так же сложна, как и задача классификации наборов матриц относительно подобия. Поэтому удовлетворительная классификация пар матриц с точностью до подобия, по общему признанию, возможна лишь в отдельных случаях (см., например, [1], [3]). Указанная задача, в частности, включает в себя два вопроса: 1) нахождение полной системы инвариантов; 2) построение канонической формы пары матриц в классе подобных. В некоторых случаях возникает задача об одновременном приведении к канонической форме пары матриц с некоторыми условиями симметричности посредством специального подобия (например, унитарного [4]).

В настоящей статье делается попытка найти полную систему инвариантов пары матриц с некоторыми ограничениями на вид и свойства формы Смита ее характеристической матрицы. Разработанную при этом методику можно применить к исследованию разрешимости линейных двусторонних уравнений типа $MX - YN = 0$ в множестве неособенных блочно-диагональных матриц (численные методы решения матричных уравнений см. в [5]).

Характеристической матрицей пары (A, B) квадратных матриц назовем многочленную матрицу $A(x) = Ex^2 + Ax + B$, где E – единичная матрица. Рассмотрим пару (A, B) матриц четного порядка $n = 2k$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с канонической формой Смита ее характеристической матрицы $A(x)$ вида

$$\text{diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{\delta(x), \dots, \delta(x)}_k\right),$$

где инвариантный многочлен $\delta(x)$ не имеет кратных корней (мы будем называть это *условием* (а)). Очевидно, $\deg \delta = 4$ и $\delta(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_4)$, $\alpha_i \neq \alpha_j$. При таких условиях многочленная матрица $A(x)$ имеет простую структуру и согласно теореме [6, раздел I, § 2] разлагается на линейные регулярные множители. Предположим далее, что матрица $A(x)$ допускает выделение влево линейного регулярного множителя с характеристическими корнями α_1, α_2 кратности k (мы будем называть это *условием* (б)). Можно доказать, что для $n = 4$ условие (а) влечет за собой условие (б). Однако это неверно уже для $n = 6$. Например, первая из пар

$$\left(\left\| \begin{pmatrix} -0,5 & 1 \\ 0,75 & -1,5 \end{pmatrix} \oplus \left\| \begin{pmatrix} -0,5 & 1 \\ 3,75 & -1,5 \end{pmatrix} \oplus \left\| \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|, \right. \right. \\ \left. \left. \left\| \begin{pmatrix} -0,75 & -0,5 \\ -0,375 & -0,25 \end{pmatrix} \oplus \left\| \begin{pmatrix} 0,75 & -0,5 \\ -1,875 & 1,25 \end{pmatrix} \oplus \left\| \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\| \right\| \right), \right. \\ \left. \left(\left\| \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & 4/3 & 0 & -2/3 \\ -10 & 1 & -8 & 10/3 & 0 & -8/3 \\ 2 & 0 & 1 & -2/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -12 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -7/3 & 0 & 2/3 \\ -6 & 0 & -12 & 2 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 & 2/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 12 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| \right) \right)$$

удовлетворяет только условию (а), а вторая – обоим условиям (а), (б).

Определенный вышеизложенными условиями (а), (б) класс пар матриц $\{(A, B)\}$ обозначим через K . Поиску инвариантов пары $(A, B) \in K$ относительно одновременно го преобразования подобия $(A, B) \cong (T^{-1}AT, T^{-1}BT)$ и посвящена настоящая работа. Поэтому всюду, где это не отмечено, мы рассматриваем пары из класса K . Следует заметить, что подобие наборов матриц, характеристические матрицы которых имеют форму Смита вида $\text{diag}(1, \dots, 1, \delta(x))$, при отсутствии кратных характеристических корней рассмотрено в [7].

Далее через E_s и 0_s обозначим единичную и нулевую (квадратную) матрицы соответственно, хотя индекс иногда опускается. Тогда 0 будет означать также и нулевую прямоугольную матрицу надлежащего размера.

Приведем некоторые определения, обозначения и результаты из работ [6], [8], которые используются в данной статье. Пусть заданы произвольные прямоугольная многочленная матрица $G(x)$ и многочлен $\varphi(x)$, записанный своим каноническим разложением $\varphi(x) = a(x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_m)^{k_m}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [6, раздел II, § 2, определение 1]. *Значением матрицы $G(x)$ на системе корней многочлена $\varphi(x)$ называется числовая матрица вида*

$$M_{G(x)}(\varphi(x)) = \left\| \begin{array}{c} G(\alpha_1) \\ G'(\alpha_1) \\ \vdots \\ G^{(k_1-1)}(\alpha_1) \\ \vdots \\ G(\alpha_m) \\ G'(\alpha_m) \\ \vdots \\ G^{(k_m-1)}(\alpha_m) \end{array} \right\|,$$

где $G'(x), \dots, G^{(t)}(x)$ – производные матрицы $G(x)$ порядков $1, \dots, t$.

Матрицу $M_{G(x)}(\varphi(x))$ будем обозначать также через $M_{G(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \dots, \alpha_m^{(k_m)}]$, если зафиксирована нумерация корней многочлена $\varphi(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [6, раздел II, § 2, предложение 4]. Если L и $R(x)$ – обратимые матрицы соответственно над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}[x]$, то

$$\text{rang } M_{R(x)G(x)L}(\varphi(x)) = M_{G(x)}(\varphi(x)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [6, раздел II, § 2, предложение 6]. Имеет место равенство

$$M_{G(x)\psi(x)}(\varphi(x)\psi(x)) = M_{G(x)}(\varphi(x)).$$

ТЕОРЕМА 1 [6, раздел II, § 4, теорема 2]. Пусть $\varphi(x)$ – унитарный делитель степени n характеристического многочлена $\Delta(x) = \det G(x)$ матрицы $G(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$, т.е. $\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x)$. Если $\text{НОД}(\varphi(x), \psi(x)) = 1$, то для существования разложения

$$G(x) = (E_n x - B)D(x), \quad \text{где} \quad \det(E_n x - B) = \varphi(x),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang } M_{G_*(x)}(\varphi(x)) = n$$

(здесь $G_*(x)$ – взаимная матрица к матрице $G(x)$).

ТЕОРЕМА 2 [6, раздел III, § 2, теорема 3]. Пусть матрица $G(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$ удовлетворяет условию $\deg \det G(x) = sn$. Для существования обратной матрицы $R(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$ такой, что матрица

$$G(x)R(x) = D_0 x^s + D_1 x^{s-1} + \dots + D_{s-1} x + D_s$$

регулярная, т.е. $\det D_0 \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы ранг значения многочленной матрицы

$$G_{s-1}(x) = G_*(x) \| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{s-1} \|$$

на системе корней многочлена $\Delta(x) = \det G(x)$ равнялся sn .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [6, раздел IV, § 1], [8]). Матрицы $G(x), H(x) \in M_{m \times n}(\mathbb{C}[x])$ будем называть полускалярно эквивалентными (обозначение: $G(x) \sim H(x)$), если существуют такие неособенная числовая матрица Q и обратимая матрица $R(x)$ над $\mathbb{C}[x]$ надлежащих порядков, что

$$H(x) = Q G(x) R(x).$$

ТЕОРЕМА 3 (см. [6, раздел IV, § 1], [8]). Матрица $G(x) \in M_{m \times n}(\mathbb{C}[x])$, $m < n$, ранга m полускалярно эквивалентна матрице вида

$$QG(x)R(x) = \left\| \begin{array}{cccccc} \varepsilon_1(x) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \varepsilon_2(x) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & * & & \varepsilon_m(x) & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|,$$

где $\varepsilon_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, – инвариантные многочлены матрицы $G(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [8, следствие 2]. Унитарные многочленные матрицы $G(x)$, $H(x)$ подобны, т.е. $H(x) = T^{-1}G(x)T$, тогда и только тогда, когда треугольные формы этих матриц (см. теорему 3) полускалярно эквивалентны.

Согласно теореме 3 характеристическая матрица $A(x)$ пары (A, B) полускалярно эквивалентна матрице $\tilde{A}(x)$ вида

$$CA(x)Q(x) = \left\| \begin{array}{c|c} E_k & 0_k \\ \hline F(x) & \delta(x)E_k \end{array} \right\| = \tilde{A}(x), \quad (1)$$

где C , $Q(x)$ – обратимые матрицы, $F(x)$ – многочленная $(k \times k)$ -матрица, причем $\deg F < \deg \delta = 4$. Учитывая вид взаимной матрицы $\tilde{A}_*(x)$, на основании предложений 1, 2 и теоремы 1 будем иметь

$$\text{rang } M_{\tilde{A}_*(x)}[\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}] = \text{rang } M_{\|F(x) \ E_k\|}[\alpha_1, \alpha_2] = n.$$

Поэтому матрицу $\tilde{A}(x)$ можно выбрать так, что

$$F(\alpha_1) = 0_k, \quad F(\alpha_2) = E_k. \quad (2)$$

Пусть (A_1, B_1) – некоторая другая пара матриц из класса K и $A_1(x) = Ex^2 + A_1x + B_1$ – ее характеристическая матрица. Очевидно, для подобия $(A, B) \cong (A_1, B_1)$ необходимо, чтобы матрица $A_1(x)$ полускалярно эквивалентными преобразованиями приводилась к виду

$$C_1A_1(x)Q_1(x) = \left\| \begin{array}{c|c} E_k & 0_k \\ \hline G(x) & \delta(x)E_k \end{array} \right\| = \tilde{A}_1(x), \quad (3)$$

причем матрицу $\tilde{A}_1(x)$ можно выбрать так, что

$$G(\alpha_1) = 0_k, \quad G(\alpha_2) = E_k. \quad (4)$$

По матрицам (1), (3) построим числовые матрицы $\|F_{ij}\|_1^2$ и $\|G_{ij}\|_1^2$ порядка n , где F_{ij} и G_{ij} – $(k \times k)$ -блоки, причем $F_{i1} = F(\alpha_{i+2})$, $G_{i1} = G(\alpha_{i+2})$, $F_{i2} = E_k - F_{i1}$, $G_{i2} = E_k - G_{i1}$, $i = 1, 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Матрицы M и N порядка $n = 2k$ называются k -блочно-диагонально эквивалентными (k -б.-д.э., обозначение: $M \overset{k}{\approx} N$), если существуют матрицы $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \text{GL}(k, \mathbb{C})$ такие, что $M = [P_1 \oplus P_2]N[Q_1 \oplus Q_2]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для строгой (скалярной) эквивалентности матриц M и N будем применять обозначение $M \approx N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пары (A, B) , (A_1, B_1) матриц порядка $n = 2k$ подобны тогда и только тогда, когда матрицы $\|F_{ij}\|_1^2$, $\|G_{ij}\|_1^2$ k -б.-д.э.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $(A, B) \cong (A_1, B_1)$. Тогда $A(x) \sim A_1(x)$. Поэтому существуют матрицы $S \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$, $R(x) \in \text{GL}(n, \mathbb{C}[x])$ такие, что

$$S\tilde{A}(x) = \tilde{A}_1(x)R(x). \quad (5)$$

Перейдя в последнем равенстве к взаимным матрицам, а потом к значениям матриц на системе корней многочлена $(\delta(x))^k$, учитывая предложения 1, 2, получим равенство

$$M_{\|F(x) \ E_k\|}S_*[\alpha_1, \dots, \alpha_4] = M_{R_{22}(x)\|G(x) \ E_k\|}[\alpha_1, \dots, \alpha_4], \quad (6)$$

где S_* – взаимная к матрице S , а $R_{22}(x)$ – правый нижний $(k \times k)$ -блок взаимной $R_*(x) = \|R_{ij}(x)\|_1^2$ к матрице $R(x)$. Из равенства (6) можем записать

$$M_{\|F(x) \ F_0(x)\| \tilde{S}}[\alpha_1, \dots, \alpha_4] = [R_1 \oplus \dots \oplus R_4] M_{\|G(x) \ G_0(x)\|}[\alpha_1, \dots, \alpha_4], \quad (7)$$

где

$$F_0(x) = E_k - F(x), \quad G_0(x) = E_k - G(x), \quad R_m = R_{22}(\alpha_m), \quad m = 1, \dots, 4.$$

Отсюда, принимая во внимание условия (2) и (4), будем иметь, что неособенная матрица $\tilde{S}$ имеет k -блочно-диагональный вид и, учитывая обратимость матрицы $R_*(x)$, из (5) находим, что каждый из блоков R_m , $m = 1, \dots, 4$, неособенный. Этим первая часть предложения доказана.

Достаточность. Если $\|F_{ij}\|_1^2 \approx \|G_{ij}\|_1^2$, то выполнено равенство (7), где

$$\tilde{S} = S_1 \oplus S_2, \quad \det S_i, \det R_m \neq 0, \quad i = 1, 2, \quad m = 1, \dots, 4.$$

Проведем далее все рассуждения в обратном, по сравнению с доказательством необходимости, порядке и от равенства (7) перейдем к равенству (5), где $S, R(x)$ – обратимые матрицы. Потом, применяя предложение 3, получим подобие матриц $A(x), A_1(x)$, а это значит, что $(A, B) \cong (A_1, B_1)$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. Ранги блоков F_{ij} , составляющих матрицу $\|F_{ij}\|_1^2$, являются инвариантами пары (A, B) относительно подобия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. В матрице $\|F_{ij}\|_1^2$ ранг каждой блочной строки и каждого блочного столбца равен k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опираясь на теорему 2, имеем, что

$$\text{rang } M_{\|A_*(x) \ xA_*(x)\|}(\delta^k(x)) = 2n.$$

Отсюда, учитывая предложения 1, 2, вид матрицы $A_*(x)$ и свойства (2) матрицы $F(x)$, получаем, что ранг матрицы

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0_k & E_k & 0_k & \alpha_1 E_k \\ E_k & E_k & \alpha_2 E_k & \alpha_2 E_k \\ F(\alpha_3) & E_k & \alpha_3 F(\alpha_3) & \alpha_3 E_k \\ F(\alpha_4) & E_k & \alpha_4 F(\alpha_4) & \alpha_4 E_k \end{array} \right\|$$

равен $2n$. После несложных преобразований этой матрицы находим, что

$$\text{rang } \|(\alpha_{i+2} - \alpha_{3-i})F_{ij}\|_1^2 = n,$$

откуда и следует наше предложение.

Из доказательства предложения 5 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеем*

$$\text{rang} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & \gamma F_{22} \end{pmatrix} = n,$$

где $\gamma = (\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)/(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_2) \neq 0$.

Обозначим через h число неособенных $(k \times k)$ -блоков F_{ij} в матрице $\|F_{ij}\|_1^2$ и рассмотрим далее каждый из следующих возможных случаев:

- 1) $h > 2$;
- 2) $h = 2$ и неособенные блоки расположены в одной блочной строке или в одном блочном столбце;
- 3) $h = 2$ и неособенные блоки расположены в разных блочных столбцах;
- 4) $h = 1$;
- 5) $h = 0$.

2. Случай 1), т.е. $h > 2$. Предположим для определенности, что в матрицах $\|F_{ij}\|_1^2$, $\|G_{ij}\|_1^2$ блоки $F_{11}, F_{12}, F_{21}, G_{11}, G_{12}, G_{21}$ неособенные. Тогда верна

ТЕОРЕМА 4. *Для подобия пар матриц (A, B) , (A_1, B_1) порядка $n = 2k$ необходимо и достаточно подобия матриц*

$$F_1 = F_{11}F_{21}^{-1}F_{22}F_{12}^{-1}, \quad G_1 = G_{11}G_{21}^{-1}G_{22}G_{12}^{-1}$$

порядка k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Приведем матрицы $\|F_{ij}\|_1^2, \|G_{ij}\|_1^2$ посредством k -б.-д.э. преобразований соответственно к матрицам $\|\tilde{F}_{ij}\|_1^2, \|\tilde{G}_{ij}\|_1^2$, где

$$\tilde{F}_{11} = \tilde{F}_{12} = \tilde{F}_{21} = \tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{12} = \tilde{G}_{21} = E_k, \quad \tilde{F}_{22} = F_1, \quad \tilde{G}_{22} = G_1.$$

Из подобия $(A, B) \cong (A_1, B_1)$ и свойства транзитивности k -б.-д.э. преобразований в силу предложения 4 вытекает условие

$$\|\tilde{F}_{ij}\|_1^2 \stackrel{k}{\approx} \|\tilde{G}_{ij}\|_1^2,$$

откуда, как легко проверить, $F_1 \cong G_1$.

Достаточность. Все рассуждения в обратном, по сравнению с доказательством необходимости, порядке.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Набор элементарных делителей матрицы*

$$F_1 = F_{11}F_{21}^{-1}F_{22}F_{12}^{-1}$$

порядка k является полной системой инвариантов пары (A, B) матриц порядка $n = 2k$ относительно подобия.

3. Случай 2), т.е. $h = 2$ и неособенные блоки расположены в одной блочной строке или одном блочном столбце. Пусть в матрицах $\|F_{ij}\|_1^2, \|G_{ij}\|_1^2$ блоки $F_{11}, F_{12}, G_{11}, G_{12}$ – неособенные матрицы. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. *Для подобия пар матриц (A, B) , (A_1, B_1) порядка $n = 2k$ необходимо и достаточно строгий эквивалентности пучков матриц*

$$F_1(x) = F_{21}F_{11}^{-1}x - F_{22}F_{12}^{-1}, \quad G_1(x) = G_{21}G_{11}^{-1}x - G_{22}G_{12}^{-1}$$

порядка k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проследить справедливость следующих эквивалентностей:

$$(A, B) \cong (A_1, B_1) \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{c|c} E_k & -E_k \\ \hline F_{21}F_{11}^{-1} & -F_{22}F_{12}^{-1} \end{array} \right\| \stackrel{k}{\approx} \left\| \begin{array}{c|c} E_k & -E_k \\ \hline G_{21}G_{11}^{-1} & -G_{22}G_{12}^{-1} \end{array} \right\| \Leftrightarrow F_1(x) \approx G_1(x).$$

Из доказанной теоремы и теоремы Кронекера (см. [9, гл. XII]) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. *Наборы минимальных индексов и (“конечных” и “бесконечных”) элементарных делителей пучка матриц $F_1(x) = F_{21}F_{11}^{-1}x - F_{22}F_{12}^{-1}$ порядка k образуют полную систему инвариантов пары (A, B) матриц порядка $n = 2k$ относительно подобия.*

4. Случай 3), т.е. $h = 2$ и неособенные блоки расположены в разных блочных строках и разных блочных столбцах. Пусть в матрицах $\|F_{ij}\|_1^2, \|G_{ij}\|_1^2$ блоки $F_{11}, F_{22}, G_{11}, G_{22}$ – неособенные матрицы. Как нетрудно убедиться, для k -б.-д.э. этих матриц необходимо подобие матриц

$$F' = F_{11}^{-1}F_{12}F_{22}^{-1}F_{21}, \quad G' = G_{11}^{-1}G_{12}G_{22}^{-1}G_{21}$$

(кроме совпадения рангов соответствующих блоков F_{ij}, G_{ij}). Однако этого недостаточно, о чем свидетельствует следующий

ПРИМЕР. Матрицы

$$\|F_{ij}\|_1^2 = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 1 \ 0 \ 0 \\ & 0 \ 1 \ 0 \\ & 0 \ 0 \ 0 \\ \hline 0 \ 0 \ 1 & 1 \\ 0 \ 0 \ 0 & 1 \\ 0 \ 1 \ 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad \|G_{ij}\|_1^2 = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 1 \ 0 \ 0 \\ & 0 \ 1 \ 0 \\ & 0 \ 0 \ 0 \\ \hline 0 \ 0 \ 1 & 1 \\ 0 \ 0 \ 0 & 1 \\ 1 \ 0 \ 0 & 1 \end{array} \right\|$$

не являются 3-б.-д.э., хотя $F_{11}^{-1}F_{12}F_{22}^{-1}F_{21} \cong G_{11}^{-1}G_{12}G_{22}^{-1}G_{21}$.

ТЕОРЕМА 6. *Если $F_{12} = G_{12} = 0_k$ (соответственно $F_{21} = G_{21} = 0_k$), то для подобия пар (A, B) , (A_1, B_1) матриц порядка $n = 2k$ необходимо и достаточно эквивалентности матриц F_{21}, G_{21} (соответственно F_{12}, G_{12}) порядка k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить справедливость эквивалентности

$$\|F_{ij}\|_1^2 \stackrel{k}{\approx} \|G_{ij}\|_1^2 \Leftrightarrow F_{21} \approx G_{21}$$

и применить предложение 5.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если $F_{12} = 0_k$ (соответственно $F_{21} = 0_k$), то ранг блока F_{21} (соответственно F_{12}) составляет полную систему инвариантов пары (A, B) относительно подобия.*

Приведем далее матрицы $\|F_{ij}\|_1^2, \|G_{ij}\|_1^2$, в которых $\text{rang } F_{12} = \text{rang } G_{12} = r_1$, $0 < r_1 < k$, k -б.-д.э. преобразованиями соответственно к матрицам

$$\left\| \begin{array}{c|c} E_k & F_{12}^{(1)} \\ \hline F_{21}^{(1)} & E_k \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{c|c} E_k & G_{12}^{(1)} \\ \hline G_{21}^{(1)} & E_k \end{array} \right\|, \quad (8)$$

где

$$F_{12}^{(1)} = G_{12}^{(1)} = F_{r_1} \oplus 0_{k-r_1},$$

причем блоки $F_{21}^{(1)}, G_{21}^{(1)}$ представим в виде

$$F_{21}^{(1)} = \|F_{21}^{(ij)}\|_1^2, \quad G_{21}^{(1)} = \|G_{21}^{(ij)}\|_1^2,$$

где $F_{21}^{(11)}, G_{21}^{(11)}$ — $(r_1 \times r_1)$ -блоки. Из подобия пар $(A, B), (A_1, B_1)$ следует k -б.-д.э. матриц (8). Нетрудно видеть, что преобразующими при этом будут матрицы $P \oplus Q, P^{-1} \oplus Q^{-1}$, где блоки P и Q имеют соответственно верхний и нижний блочно-треугольные виды, согласованные с блочным видом матрицы $F_{12}^{(1)}$, т.е.

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} P_1 & P_2 \\ \hline 0 & P_3 \end{array} \right\|, \quad Q = \left\| \begin{array}{c|c} Q_1 & 0 \\ \hline Q_2 & Q_3 \end{array} \right\|, \quad (9)$$

причем $P_1 = Q_1 \in \text{GL}(r_1, \mathbb{C})$ и, кроме того, выполняется равенство

$$F_{21}^{(1)} P = Q G_{21}^{(1)}. \quad (10)$$

Из последнего, в частности, вытекает подобие блоков $F_{21}^{(11)}, G_{21}^{(11)}$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 7. Если в матрице $F_{21}^{(1)} = \|F_{21}^{(ij)}\|_1^2$ из (8) ранг r_0 первой блочной строки равен рангу ее первого блочного столбца, причем $r_0 = \text{rang } F_{21}^{(11)}$ либо $r_0 = r_1$, то для подобия пар $(A, B), (A_1, B_1)$ матриц порядка $n = 2k$ необходимо и достаточно эквивалентности матриц $F_{21}^{(1)}, G_{21}^{(1)}$ порядка k и подобия их блоков $F_{21}^{(11)}, G_{21}^{(11)}$ порядка $r_1 < k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна.

Достаточность. Не нарушая вида единичных блоков E_k и блоков $F_{12}^{(1)} = G_{12}^{(1)} = E_{r_1} \oplus 0_{k-r_1}$, можем привести матрицы (8) k -б.-д.э. преобразованиями соответственно к матрицам

$$\left\| \begin{array}{c|c} E_k & F_{12}^{(1)} \\ \hline \tilde{F}_{21}^{(1)} & E_k \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{c|c} E_k & G_{12}^{(1)} \\ \hline \tilde{G}_{21}^{(1)} & E_k \end{array} \right\|,$$

где

$$\tilde{F}_{21}^{(1)} = \tilde{G}_{21}^{(1)} = \left\| \begin{array}{c|c} J & I' \\ \hline I'' & 0 \end{array} \right\| \oplus E_{r_2} \oplus 0_{k-p};$$

J — $(r_1 \times r_1)$ -матрица Жордана; блоки I', I'' являются пустыми матрицами и $p = r_1 + r_2$, если $r_0 = \text{rang } J$; строки (столбцы) блока I' (соответственно I''), номера которых совпадают с номерами ненулевых строк (столбцов) матрицы J , являются нулевыми, а все остальные строки (столбцы) образуют единичную матрицу порядка $r_0 - \text{rang } J$ и $p = 2r_1 + r_2 - \text{rang } J$, если $r_0 = r_1$. Для завершения доказательства достаточно применить предложение 4.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если в $(k \times k)$ -матрице $F_{21}^{(1)} = \|F_{21}^{(ij)}\|_1^2$ из (8) выполняются условия теоремы 7, то ранг этой матрицы вместе с системой элементарных делителей ее $(r_1 \times r_1)$ -блока $F_{21}^{(11)}$ составляют полную систему инвариантов пары (A, B) матриц порядка $n = 2k$ относительно подобия.

Рассмотрим далее ситуацию, когда условия теоремы 7 не выполняются. Как уже отмечалось выше, для подобия пар матриц (A, B) , (A_1, B_1) необходимо подобие блоков $F_{21}^{(11)}$, $G_{21}^{(11)}$ матриц $F_{21}^{(1)}$, $G_{21}^{(1)}$ из (8). Разобьем систему элементарных делителей матрицы $F_{21}^{(11)}$ на две подсистемы:

- 1) с нулевыми собственными значениями;
- 2) с ненулевыми собственными значениями.

Упорядочим первую из них так, чтобы степени ее элементарных делителей не возрастали; зафиксируем некоторое упорядочение второй и обозначим через J_1 , J_2 матрицы Жордана, соответствующие этим подсистемам. Вторая из подсистем, возможно, пуста. Случай, когда первая подсистема пустая, охватывается теоремой 7. Предположим для определенности, что ранг первой блочной строки матрицы $F_{21}^{(1)}$ из (8) не меньше ранга ее первого блочного столбца и, не нарушая вида блоков $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, приведем матрицы (8) k -б.-д.э. преобразованиями соответственно к матрицам

$$\left\| \begin{array}{c|c} E_k & F_{12}^{(1)} \\ \hline \overline{F}_{21}^{(1)} & E_k \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{c|c} E_k & G_{12}^{(1)} \\ \hline \overline{G}_{21}^{(1)} & E_k \end{array} \right\|, \quad (11)$$

где

$$\overline{F}_{21}^{(1)} = \left\| \begin{array}{c|c|c} J_1 & 0 & I_1^{(1)} \\ \hline 0 & J_2 & 0 \\ \hline I_1^{(2)} & 0 & 0 \end{array} \right\| \oplus E_{r_2} \oplus 0, \quad \overline{G}_{21}^{(1)} = \left\| \begin{array}{c|c|c} J_1 & 0 & I_2^{(1)} \\ \hline 0 & J_2 & 0 \\ \hline I_2^{(2)} & 0 & 0 \end{array} \right\| \oplus E_{r'_2} \oplus 0.$$

В блоке $I_i^{(1)}$ все столбцы ненулевые, а их количество равно числу строк блока $I_i^{(2)}$, $i = 1, 2$. Строки (соответственно столбцы) блока $I_i^{(1)}$ (соответственно $I_i^{(2)}$), номера которых совпадают с номерами ненулевых строк (соответственно столбцов) блока J_1 , являются нулевыми, а каждая другая ее строка (соответственно каждый другой ее столбец) является либо нулевой (соответственно нулевым), либо строкой (соответственно столбцом) единичной матрицы, причем ненулевые строки (соответственно столбцы) блока $I_i^{(1)}$ (соответственно $I_i^{(2)}$) являются разными строками (соответственно столбцами) единичной матрицы, $i = 1, 2$. Кроме того, среди строк блока $I_i^{(1)}$, соответствующих нулевым строкам жордановых клеток одного и того же порядка, все нулевые строки расположены ниже ненулевых. Число последних (ненулевых строк) обозначим через m_{ij} , $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, l$ — количество разных жордановых клеток в J_1 . Обозначим также через m_{i1j} и m_{i2j} числа тех ненулевых столбцов блока $I_i^{(2)}$, которые продолжают нулевые столбцы жордановых клеток одного и того же порядка, нулевые строки которых продолжают в блоке $I_i^{(1)}$ соответственно ненулевыми и нулевыми строками, $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, l$. Верна следующая

ТЕОРЕМА 8. Для подобия пар (A, B) , (A_1, B_1) необходимо и достаточно, чтобы в матрицах (11) выполнялись следующие условия:

- 1) $r_2 = r'_2$;

- 2) $m_{1j} = m_{2j}$, $j = 1, \dots, l$;
 3) $(m_{11j}, m_{12j}) = (m_{21j}, m_{22j})$, $j = 1, \dots, l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность очевидна, ибо при условиях 1)–3) имеем $I_1^{(i)} = I_2^{(i)}$, $i = 1, 2$, $E_{r_2} = E_{r'_2}$, т.е. матрицы (11) совпадают, и остается лишь применить предложение 4.

Необходимость. Поскольку матрицы $\overline{F}_{21}^{(1)}$, $\overline{G}_{21}^{(1)}$ удовлетворяют равенству (10), учитывая вид (9) матриц P и Q , будем иметь

$$\text{rang} \left\| \begin{array}{c|c} J_1 & 0 \\ \hline 0 & J_2 \\ \hline I_1^{(2)} & 0 \end{array} \right\| = \text{rang} \left\| \begin{array}{c|c} J_1 & 0 \\ \hline 0 & J_2 \\ \hline I_2^{(2)} & 0 \end{array} \right\|, \quad \text{rang} \left\| \begin{array}{c|c|c} J_1 & 0 & I_1^{(1)} \\ \hline 0 & J_2 & 0 \end{array} \right\| = \text{rang} \left\| \begin{array}{c|c|c} J_1 & 0 & I_2^{(1)} \\ \hline 0 & J_2 & 0 \end{array} \right\|,$$

откуда следует условие 1). Из равенства (10) также имеем

$$\left[\left\| \begin{array}{c|c|c} J_1 & 0 & I_1^{(1)} \\ \hline 0 & J_2 & 0 \\ \hline I_1^{(2)} & 0 & 0 \end{array} \right\| \oplus E_{r_2} \oplus 0 \right] \left\| \begin{array}{c|c} P_1 & P_2 \\ \hline 0 & P_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} Q_1 & 0 \\ \hline Q_2 & Q_3 \end{array} \right\| \left[\left\| \begin{array}{c|c|c} J_1 & 0 & I_2^{(1)} \\ \hline 0 & J_2 & 0 \\ \hline I_2^{(2)} & 0 & 0 \end{array} \right\| \oplus E_{r'_2} \oplus 0 \right], \quad (12)$$

где $P_1 = Q_1$. Отсюда

$$[J_1 \oplus J_2]P_1 = P_1[J_1 \oplus J_2].$$

Поскольку жордановы матрицы J_1 , J_2 не имеют общих собственных значений, то матрица P_1 имеет блочно-диагональный вид, аналогичный виду $[J_1 \oplus J_2]$ (см. теорему 3 § 2 гл. VIII [9]), т.е. $P_1 = P_{11} \oplus P_{22}$ и $J_1 P_{11} = P_{11} J_1$. Напомним, что J_1 состоит только из жордановых клеток с нулевыми собственными значениями, причем порядки этих клеток на главной диагонали не возрастают. Условие 2) теоремы достаточно показать лишь для случая $l = 2$, когда матрица J_1 имеет вид

$$J_1 = \underbrace{J_{(m_1)} \oplus \dots \oplus J_{(m_1)}}_{l_1} \oplus \underbrace{J_{(m_2)} \oplus \dots \oplus J_{(m_2)}}_{l_2},$$

где $J_{(m_i)}$ – (верхняя) жорданова клетка порядка m_i , $i = 1, 2$, причем $m_1 > m_2$.

Согласно [9, гл. VIII, § 2], перестановочная с J_1 матрица P_{11} имеет вид

$$P_{11} = \left\| \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline D & B \end{array} \right\|,$$

где

$$A = \|A_{pq}\|_1^{l_1}, \quad B = \|B_{st}\|_1^{l_2}, \quad C = \|C_{pt}\|_1^{l_1, l_2}, \quad D = \|D_{sq}\|_1^{l_2, l_1},$$

$$A_{pq} = \left\| \begin{array}{ccc} a_{pq}^{(1)} & \ddots & a_{pq}^{(m_1)} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{pq}^{(1)} \end{array} \right\|, \quad B_{st} = \left\| \begin{array}{ccc} b_{st}^{(1)} & \ddots & b_{st}^{(m_2)} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & b_{st}^{(1)} \end{array} \right\|,$$

$$C_{pt} = \left\| \begin{array}{ccc} c_{pt}^{(1)} & \ddots & c_{pt}^{(m_2)} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & c_{pt}^{(1)} \end{array} \right\|_{m_1}, \quad D_{sq} = \left\| \begin{array}{ccc} d_{sq}^{(1)} & \ddots & d_{sq}^{(m_2)} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & d_{sq}^{(1)} \end{array} \right\|_{m_1},$$

$$p, q = 1, \dots, l_1, \quad s, t = 1, \dots, l_2.$$

Обозначим $I_{11}^{(1)}, I_{12}^{(1)}$ (соответственно $I_{21}^{(1)}, I_{22}^{(1)}$) – подматрицы матрицы $I_1^{(1)}$ (соответственно $I_2^{(1)}$), состоящие из продолжений нулевых строк клеток $J_{(m_1)}, J_{(m_2)}$ соответственно. Учитывая вид матрицы P_{11} , из (12) получаем

$$\left\| \frac{I_{11}^{(1)}}{I_{12}^{(1)}} \middle| 0 \right\| P_3 = \left\| \frac{A^{(1)}}{D^{(1)}} \middle| \frac{0}{B^{(1)}} \right\| \left\| \frac{I_{21}^{(1)}}{I_{22}^{(1)}} \middle| 0 \right\|, \quad (13)$$

где

$$A^{(1)} = \|a_{pq}^{(1)}\|_1^1, \quad B^{(1)} = \|b_{st}^{(1)}\|_1^{l_2}, \quad D^{(1)} = \|d_{sq}^{(1)}\|_1^{l_2, l_1}.$$

Поскольку $P_3, A^{(1)}, B^{(1)}$ – неособенные матрицы, то

$$m_{11} = \text{rang } I_{11}^{(1)} = \text{rang } I_{21}^{(1)} = m_{21}, \quad \text{rang } \left\| \frac{I_{11}^{(1)}}{I_{12}^{(1)}} \right\| = \text{rang } \left\| \frac{I_{21}^{(1)}}{I_{22}^{(1)}} \right\|,$$

откуда $m_{12} = \text{rang } I_{12}^{(1)} = \text{rang } I_{22}^{(1)} = m_{22}$. Этим условие 2) теоремы доказано.

Если обозначить далее $p_j = m_{1j} = m_{2j}$, $j = 1, 2$, то, как видно из равенства (13), матрицы $A^{(1)}, B^{(1)}, D^{(1)}$ имеют вид

$$A^{(1)} = \left\| \begin{array}{cccccc} a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1p_1}^{(1)} & a_{1p_1+1}^{(1)} & \dots & a_{1l_1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p_1 1}^{(1)} & \dots & a_{p_1 p_1}^{(1)} & a_{p_1 p_1+1}^{(1)} & \dots & a_{p_1 l_1}^{(1)} \\ 0 & \dots & 0 & a_{p_1+1 p_1+1}^{(1)} & \dots & a_{p_1+1 l_1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{l_1 p_1+1}^{(1)} & \dots & a_{l_1 l_1}^{(1)} \end{array} \right\|, \quad (14)$$

$$B^{(1)} = \left\| \begin{array}{cccccc} b_{11}^{(1)} & \dots & b_{1p_2}^{(1)} & b_{1p_2+1}^{(1)} & \dots & b_{1l_2}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p_2 1}^{(1)} & \dots & b_{p_2 p_2}^{(1)} & b_{p_2 p_2+1}^{(1)} & \dots & b_{p_2 l_2}^{(1)} \\ 0 & \dots & 0 & b_{p_2+1 p_2+1}^{(1)} & \dots & b_{p_2+1 l_2}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{l_2 p_2+1}^{(1)} & \dots & b_{l_2 l_2}^{(1)} \end{array} \right\|, \quad (15)$$

$$D^{(1)} = \left\| \begin{array}{cccccc} d_{11}^{(1)} & \dots & d_{1p_1}^{(1)} & d_{1p_1+1}^{(1)} & \dots & d_{1l_1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{p_2 1}^{(1)} & \dots & d_{p_2 p_1}^{(1)} & d_{p_2 p_1+1}^{(1)} & \dots & d_{p_2 l_1}^{(1)} \\ 0 & \dots & 0 & d_{p_2+1 p_1+1}^{(1)} & \dots & d_{p_2+1 l_1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & d_{l_2 p_1+1}^{(1)} & \dots & d_{l_2 l_1}^{(1)} \end{array} \right\|. \quad (16)$$

Для матрицы $I_i^{(2)}$, $i = 1, 2$, которая является блоком матрицы (11), обозначим через I_{i11} и I_{i21} (соответственно I_{i12} и I_{i22}) ее подматрицы, состоящие из продолжений тех нулевых столбцов жордановых клеток $J_{(m_1)}$ (соответственно $J_{(m_2)}$), продолжения нулевых строк которых в блоке $I_i^{(1)}$ являются соответственно ненулевым и нулевым. Предположим, что $\text{rang } I_{111} > \text{rang } I_{211}$ (или, что то же, $m_{111} > m_{211}$). Тогда из равенства (12),

выделяя единичные блоки в такой последовательности:

$$E_{r_1}^{(1)}, E_{k-r_1}, E_{r_2}^{(2)}, E_{r_3}^{(3)}, E_{r_4}^{(4)}, E_{r_5}^{(5)}, E_{r_6}^{(6)}.$$

Здесь $r_2 < r_1 < k$, $k - r_1 = r_3 + r_4$, $r_4 = r_5 + r_6$. Порядки r_1, r_2 блоков $E_{r_1}^{(1)}, E_{r_2}^{(2)}$ являются, очевидно, инвариантами. Если $r_2 = 0$, то $r_3 = k - r_1$ (см. следствие 2), $r_4 = r_5 = r_6 = 0$, блоки $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)}, C_1^{(1)}, C_2^{(1)}$ пустые и ранги блоков F_{ij} матрицы $\|F_{ij}\|_1^2$ образуют полную систему искомым инвариантов пары (A, B) . Поэтому далее будем считать, что $\text{rang } F_1 + \text{rang } F_3 \neq k$, т.е. $r_2 > 0$, и $\text{rang } F_2 + \text{rang } F_3 \neq k$.

Если матрица

$$\left\| \begin{array}{c|c} E_k & G_1 \\ \hline G_2 & G_3 \end{array} \right\|,$$

которая имеет вид матрицы (18) и отличается от последней, возможно, порядками блоков $E_3, \dots, E_6$ и подматрицей

$$\left\| \begin{array}{cc} C_1^{(1)} & C_2^{(1)} \\ A_1^{(1)} & A_2^{(1)} \\ \underbrace{A_3^{(1)}}_{r_2-r_1} & \underbrace{A_4^{(1)}}_{r_1-r_2} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \} r_6 \\ \} r_2-r_4-r_6 \\ \} r_1-r_2 \end{array}, \quad (19)$$

является k -б.-д.э. матрице (18), то из равенства

$$[P_1 \oplus P_2] \left\| \begin{array}{c|c} E_k & F_1 \\ \hline F_2 & F_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} E_k & G_1 \\ \hline G_2 & G_3 \end{array} \right\| [Q_1 \oplus Q_2]$$

будем иметь

$$P_1 F_1 = G_1 Q_2, \quad P_2 F_2 = G_2 Q_1, \quad P_2 F_3 = G_3 Q_2, \quad P_1 = Q_1. \quad (20)$$

Из полученных равенств, учитывая вид каждой из матриц $F_s, G_s, s = 1, 2, 3$, следует, что матрицы P_1, P_2, Q_2 имеют следующую структуру:

$$P_1 = \left\| \begin{array}{cc} \underbrace{P_1^{(1)}}_{r_1} & 0 \\ P_1^{(2)} & P_1^{(3)} \end{array} \right\| \} r_1, \quad P_2 = \left\| \begin{array}{cc} P_2^{(1)} & P_2^{(2)} \\ 0 & P_2^{(3)} \end{array} \right\| \} r_1, \quad Q_2 = \left\| \begin{array}{cc} Q_2^{(1)} & 0 \\ \underbrace{Q_2^{(2)}}_{r_1} & Q_2^{(3)} \end{array} \right\| \} r_1, \quad (21)$$

где $P_1^{(3)} = Q_2^{(3)}, P_2^{(1)} = Q_2^{(1)}$, причем блоки $P_1^{(1)}, Q_2^{(1)}$ имеют вид

$$P_1^{(1)} = \left\| \begin{array}{cc} P_1^{(11)} & P_1^{(12)} \\ 0 & P_1^{(13)} \end{array} \right\| \} r_2, \quad Q_2^{(1)} = \left\| \begin{array}{cc} Q_2^{(11)} & 0 \\ \underbrace{Q_2^{(12)}}_{r_2} & Q_2^{(13)} \end{array} \right\| \} r_2, \quad (22)$$

где $P_1^{(11)} = Q_2^{(13)}$. Далее, из второго равенства (20) в силу блочно-треугольного строения (21) матриц $P_2, Q_1 = P_1$ и неособенности их диагональных блоков следует, что порядок r_3 блока $F_{r_3}^{(3)}$ матрицы F_2 есть инвариант. Тогда инвариантом будет также и

порядок r_4 блока $F_{r_4}^{(4)}$, поскольку согласно предложению 5 $\text{rang} \|F_2 \ F_3\| = k$. Если $r_4 = r_2 \neq 0$, то $r_5 = r_4$, $r_6 = 0$, в матрице (18) блоки $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)}, C_1^{(1)}, C_2^{(1)}$ пустые и числа $r_1, \dots, r_4$, $\text{rang} A_4^{(1)}$ образуют полную систему инвариантов пары (A, B) . Если же $r_4 = 0$, то $r_5 = r_6 = 0$, блоки $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}$ пустые и мы приходим к рассмотренному в п. 4 исследованию p -б.-д.э. матрицы

$$\left\| \begin{array}{c|c} E_p & \begin{array}{c} E_q \ 0 \\ 0 \ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} A_1^{(1)} & A_2^{(1)} \\ A_3^{(1)} & A_4^{(1)} \end{array} & E_p \end{array} \right\| \}^q, \quad (23)$$

где $p = r_1, q = r_2$.

Пусть, далее, $0 < r_4 < r_2$. Тогда из второго равенства (20) вытекает, что блоки $P_2^{(3)}, Q_1^{(3)}$ матриц P_2, Q_1 соответственно имеют вид

$$P_2^{(3)} = \left\| \begin{array}{cc} P_2^{(31)} & P_2^{(32)} \\ 0 & P_2^{(33)} \end{array} \right\| \}^{r_3}, \quad Q_1^{(3)} = P_1^{(3)} = \left\| \begin{array}{cc} P_1^{(31)} & 0 \\ P_1^{(32)} & P_1^{(33)} \end{array} \right\| \}^{r_3},$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{r_3} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{r_3}$

где $P_2^{(31)} = P_1^{(31)}$; блоки $P_1^{(11)}, Q_2^{(11)}$ в матрицах (22) имеют вид

$$P_1^{(11)} = Q_2^{(11)} = \left\| \begin{array}{cc} Q_2^{(111)} & 0 \\ Q_2^{(112)} & Q_2^{(113)} \end{array} \right\| \}^{r_4}, \quad (24)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{r_4}$

и, учитывая неособенность каждого диагонального блока в приведенных здесь блочно-треугольных матрицах, находим, что порядок r_5 блока $E_{r_5}^{(5)}$ и, следовательно, порядок r_6 блока $E_{r_6}^{(6)}$ матрицы (18) являются инвариантами ($r_5 + r_6 = r_4$, см. следствие 2).

Если $r_6 = 0$, то $r_4 = r_5$, блоки $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}$ из (18) являются пустыми и в силу строения матрицы (24) приходим к рассмотренной в п. 4 p -б.-д.э. матрицы вида (23), где $p = r_1 - r_4, q = r_2 - r_4$.

Если $r_6 \neq 0$, то на втором шаге, применяя к матрице (18) k -б.-д.э. преобразования, приходим к матрице, которая отличается от последней лишь тем, что вместо подматрицы (19) порядка $r_1 - r_4$ будет стоять блочная квадратная матрица вида

$$\left\| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} E_{r_7}^{(7)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & E_{r_8}^{(8)} & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{r_9}^{(9)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & C_1^{(2)} & C_2^{(2)} \\ \hline 0 & 0 & E_{r_{10}}^{(10)} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & A_1^{(2)} & A_1^{(2)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & A_3^{(2)} & A_4^{(2)} \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} \}^{r_6} \\ \\ \\ \}^{r_{10}} \\ \\ \}^{r_2 - r_4 - r_6 - r_8 - r_{10}} \\ \}^{r_1 - r_2} \end{array} \right\}^{r_8}. \quad (25)$$

$\underbrace{\hspace{3cm}}_{r_6} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{3cm}}_{r_1 - r_2}$

Без особых трудностей, как и на первом шаге, доказываем, что числа r_7, r_9 (и, следовательно, r_8, r_{10}) являются инвариантами матрицы $\|F_{ij}\|_1^2$ относительно k -б.-д.э. преобразований, т.е. эти числа вместе с числами r_1, r_3, r_5 являются инвариантами пары (A, B) относительно подобия.

Если $r_8 = r_6 \neq 0$, то в матрице (25) блоки $A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, A_3^{(2)}, C_1^{(2)}, C_2^{(2)}$ пустые и числа $r_1, \dots, r_6$, rang $A_4^{(2)}$ образуют полную систему инвариантов пары (A, B) . Если же $r_8 = 0$, то $r_9 = r_{10} = 0$ и блоки $C_1^{(2)}, C_2^{(2)}$ из (25) пустые. Это снова приводит нас к рассмотренному в п. 4 исследованию p -б.-д.э. матрицы вида (23) при $p = r_1 - r_4 - r_6$, $q = r_2 - r_4 - r_6$.

Поэтому положим $0 < r_8 < r_6$. Если $r_{10} = 0$, то $r_8 = r_9$, блоки $C_1^{(2)}, C_2^{(2)}$ в матрице (25) являются пустыми и мы, как и на первом шаге, приходим к p -б.-д.э. матрицы вида (23), где $p = r_1 - r_4 - r_6 - r_8$, $q = r_2 - r_4 - r_6 - r_8$. Но этот случай уже рассмотрен в п. 4.

Если же $r_{10} \neq 0$, то на третьем шаге, применяя k -б.-д.э. преобразования к матрице вида (18), где вместо подматрицы (19) стоит матрица (25), мы приходим к матрице вида (18), в которой вместо подматрицы

$$\left\| \begin{array}{cc} C_1^{(2)} & C_2^{(2)} \\ A_1^{(2)} & A_2^{(2)} \\ \underbrace{A_3^{(2)}}_{r_2 - r_4 - r_6 - r_8} & A_4^{(2)} \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} \} r_{10} \\ \} r_2 - r_4 - r_6 - r_8 - r_{10} \\ \} r_1 - r_2 \end{array} \right.$$

порядка $r_1 - r_4 - r_6 - r_8$ стоит блочная матрица

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} E_{r_{11}}^{(11)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & E_{r_{12}}^{(12)} & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{r_{13}}^{(13)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & C_1^{(3)} & C_2^{(3)} \\ \hline 0 & 0 & E_{r_{14}}^{(14)} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & A_1^{(3)} & A_1^{(3)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{A_3^{(3)}}_{r_1 - r_2} & \underbrace{A_4^{(3)}}_{r_1 - r_2} \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} \} r_{10} \\ \} r_{14} \\ \} r_{12} \\ \} r_2 - r_4 - r_6 - r_8 - r_{10} - r_{12} - r_{14} \\ \} r_1 - r_2 \end{array} \right.$$

Здесь числа r_{11}, r_{13} (и, следовательно, r_{12}, r_{14}) являются инвариантами матрицы $\|F_{ij}\|_1^2$ относительно k -б.-д.э. преобразований.

Поскольку, продолжая так и далее, каждый раз имеем дело с блоками матрицы вида (18) все меньшего порядка, то на некотором шаге мы получим полную систему инвариантов, которая будет состоять из чисел $r_2, \dots, r_{2j+2}$, rang $A_4^{(j)}$, или же на каком-то этапе окажемся в ситуации, описанной в п. 4, и тем самым также окончательно получим полную систему инвариантов пары (A, B) относительно подобия.

6. Случай 5) — $h = 0$. Сначала рассмотрим ситуацию, когда сумма рангов блоков некоторой блочной строки или некоторого блочного столбца матрицы $\|F_{ij}\|_1^2$ равна k .

$$\left\| \begin{array}{ccc|cc} A_{11} & 0 & 0 & 0 & A_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{r_2-r_3-r_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{r_4}^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{r_2-r_3-r_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 & 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{k-r_1} \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} r_3 \\ \\ \\ r_1-r_2 \end{array} \right\} \quad (29)$$

При этом выделяем единичные блоки в такой последовательности: $E_{r_1}^{(1)}$, E_{k-r_1} (дважды), $E_{r_2}^{(2)}$, $E_{r_1-r_2}$, $E_{r_3}^{(3)}$, $E_{r_4}^{(4)}$, $E_{r_2-r_3-r_4}$ (дважды, $r_3 > r_2 - r_3 - r_4$), $E_{r_5}^{(5)}$, ..., $E_{r_{11}}^{(11)}$. Чтобы не вводить новых обозначений для полученной матрицы, будем считать, что указанный выше вид (26)–(29) имеют уже блоки матрицы $\|F_{ij}\|_1^2$. Инвариантность порядков r_1 и r_2 единичных блоков $E^{(1)}$ и $E^{(2)}$ матрицы $\|F_{ij}\|_1^2$ относительно k -б.-д.э. преобразований очевидна.

Пусть $\|G_{ij}\|_1^2$ – некоторая другая матрица, $(k \times k)$ -блоки которой также имеют вид (26)–(29), т.е. матрицы $\|F_{ij}\|_1^2$, $\|G_{ij}\|_1^2$ отличаются друг от друга, возможно, лишь порядками единичных блоков $E^{(3)}$, ..., $E^{(11)}$ и подматрицей $\|A_{ij}\|_1^2$. Далее, из равенства

$$[P_1 \oplus P_2] \|F_{ij}\|_1^2 = \|G_{ij}\|_1^2 [Q_1 \oplus Q_2],$$

которое равносильно следующим четырем равенствам:

$$P_1 F_{11} = G_{11} Q_1, \quad P_1 F_{12} = G_{12} Q_2, \quad P_2 F_{21} = G_{21} Q_1, \quad P_2 F_{22} = G_{22} Q_2, \quad (30)$$

где $P_i, Q_i, i = 1, 2$, – неособенные $(k \times k)$ -блоки, на первом этапе, учитывая вид (26)–(29) блоков F_{ij} , G_{ij} , можем получить, что матрицы P_i, Q_i имеют следующий блочно-треугольный вид:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left\| \begin{array}{cc|c} \overbrace{P_1^{(11)} \quad P_1^{(12)}}^{r_2} & 0 \\ 0 & \overbrace{P_1^{(13)}}^{r_1} & 0 \\ \hline \overbrace{P_1^{(2)}}^{r_1} & P_1^{(3)} \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} r_2 \\ r_1 \end{array} \right\} r_1, & Q_1 &= \left\| \begin{array}{cc|c} \overbrace{Q_1^{(11)} \quad Q_1^{(12)}}^{r_2} & Q_1^{(21)} \\ 0 & \overbrace{Q_1^{(13)}}^{r_1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & Q_1^{(3)} \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} r_2 \\ r_1 \end{array} \right\} r_1, \\ P_2 &= \left\| \begin{array}{cc|c} \overbrace{Q_2^{(11)} \quad 0}^{r_2} & P_2^{(2)} \\ \overbrace{Q_2^{(12)} \quad Q_2^{(13)}}^{r_1} & P_2^{(3)} \\ \hline 0 & 0 & P_2^{(3)} \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} r_2 \\ r_1 \end{array} \right\} r_1, & Q_2 &= \left\| \begin{array}{cc|c} \overbrace{Q_2^{(11)} \quad 0}^{r_2} & 0 \\ \overbrace{Q_2^{(12)} \quad Q_2^{(13)}}^{r_1} & 0 \\ \hline \overbrace{Q_2^{(21)} \quad 0}^{r_1} & Q_2^{(3)} \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} r_2 \\ r_1 \end{array} \right\} r_1, \end{aligned}$$

причем

$$P_1^{(11)} = Q_2^{(11)}, \quad P_1^{(3)} = Q_2^{(3)}, \quad Q_1^{(3)} = P_2^{(3)}, \quad Q_1^{(13)} = P_1^{(13)}.$$

На основании этого в силу неособенности диагональных блоков матриц $P_i, Q_i, i = 1, 2$, получаем, что порядок r_3 блока $E^{(3)}$ является инвариантом матрицы $\|F_{ij}\|_1^2$ относительно k -б.-д.э. преобразований.

На втором этапе из равенств (30) находим, что блоки $P_1^{(11)}, Q_1^{(11)}$ имеют блочно-треугольный вид

$$P_1^{(11)} = \left\| \begin{array}{cc} P_1^{(111)} & P_1^{(112)} \\ \underbrace{0}_{r_3} & P_1^{(113)} \end{array} \right\| \}_{r_3}, \quad Q_1^{(11)} = \left\| \begin{array}{cc} Q_1^{(111)} & 0 \\ \underbrace{Q_1^{(112)}}_{r_3} & Q_1^{(113)} \end{array} \right\| \}_{r_3},$$

причем $P_1^{(111)} = Q_1^{(111)}$; порядок r_4 единичного блока $E^{(4)}$ матрицы $\|F_{ij}\|_1^2$ является инвариантом относительно k -б.-д.э. преобразований, а блоки $P_1^{(113)}, Q_1^{(113)}$ имеют блочно-треугольный вид

$$P_1^{(113)} = \left\| \begin{array}{cc} P_1^{(1131)} & P_1^{(1132)} \\ \underbrace{0}_{r_4} & P_1^{(1133)} \end{array} \right\| \}_{r_4}, \quad Q_1^{(113)} = \left\| \begin{array}{cc} Q_1^{(1131)} & 0 \\ \underbrace{Q_1^{(1132)}}_{r_4} & Q_1^{(1133)} \end{array} \right\| \}_{r_4},$$

причем $P_1^{(1131)} = Q_1^{(1131)}$.

Продолжая так и далее, мы шаг за шагом “дробим” блоки $P_i, Q_i, i = 1, 2$, и доказываем инвариантность порядков $r_1, \dots, r_{11}$ единичных блоков $E^{(1)}, \dots, E^{(11)}$ матрицы $\|F_{ij}\|_1^2$. Кроме того, из третьего равенства (30) можем извлечь, что блок $Q_1^{(111)} (= P_1^{(111)})$ матрицы $Q_1(P_1, Q_2)$ имеет блочно-треугольный вид

$$Q_1^{(111)} = \left\| \begin{array}{cc} Q_1^{(1111)} & Q_1^{(1112)} \\ \underbrace{0}_{2r_3+r_4-r_2} & Q_1^{(1113)} \end{array} \right\| \}_{2r_3+r_4-r_2}.$$

Поэтому, если представить блоки $Q_1^{(12)}, Q_2^{(12)}$ матриц Q_1, P_2 соответственно в виде

$$Q_1^{(12)} = \left\| \begin{array}{c} Q_1^{(1211)} \\ Q_1^{(1212)} \\ Q_1^{(122)} \end{array} \right\| \}_{2r_3+r_4-r_2} \}_{r_3}, \quad Q_2^{(12)} = \left\| \underbrace{Q_2^{(1211)} \quad Q_2^{(1212)}}_{2r_3+r_4-r_2} \quad Q_2^{(122)} \right\|_{r_3},$$

а подматрицу матрицы $\|G_{ij}\|_1^2$, которой последняя отличается от матрицы $\|F_{ij}\|_1^2$, обозначить через $\|B_{ij}\|_1^2$, то из третьего равенства (30) будем иметь, что

$$\left\| \begin{array}{cc} Q_1^{(1111)} & 0 \\ Q_2^{(1211)} & Q_2^{(12)} \end{array} \right\| \|A_{ij}\|_1^2 = \|B_{ij}\|_1^2 \left\| \begin{array}{cc} Q_1^{(1111)} & Q_1^{(1211)} \\ 0 & Q_1^{(13)} \end{array} \right\|,$$

где $\det Q_1^{(1111)}$, $\det Q_1^{(13)}$, $\det Q_2^{(13)} \neq 0$. Но это, как несложно убедиться, значит, что матрицы

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} & & E_q & 0 \\ & & \hline E_p & & 0 & 0 \\ & & \hline A_{11} & A_{12} & & \\ \hline A_{21} & A_{22} & & E_p \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cc|cc} & & E_q & 0 \\ & & \hline E_p & & 0 & 0 \\ & & \hline B_{11} & B_{12} & & \\ \hline B_{21} & B_{22} & & E_p \end{array} \right\|,$$

где $p = r_1 - 2r_2 + 2r_3 + r_4$, $q = 2r_3 + r_4 - r_2$, являются p -б.-д.э. И мы снова попадаем в ситуацию, рассмотренную в п. 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пределы применения полученных здесь результатов можно расширить, включая при этом, например, наборы $(A_1, \dots, A_s)$ из $s > 2$ матриц, форма Смита характеристической матрицы $A(x) = Ex^s + A_1x^{s-1} + \dots + A_s$ которых имеет вид

$$\text{diag}(\underbrace{\delta_1(x), \dots, \delta_1(x)}_k, \underbrace{\delta_2(x), \dots, \delta_2(x)}_k),$$

если только $\det \delta_1 = s - 2$, многочлен $\delta(x) = \delta_2(x)/\delta_1(x)$ не имеет кратных корней, и матрица $A(x)$ после сокращения ее элементов на $\delta_1(x)$ удовлетворяет условию (б).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из теорем 4–8 на основании предложения 4 можно извлечь критерий разрешимости уравнений вида $MX - YN = 0$, где $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, $n = 2k$, в множестве k -блочно-диагональных матриц $X = X_1 \oplus X_2$, $Y = Y_1 \oplus Y_2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Неразложимые представления группы Лоренца // УМН. 1968. Т. 23. № 2. С. 3–60.
- [2] Friedland S. Simultaneous similarity of matrices // Adv. in Math. 1983. V. 50. P. 189–265.
- [3] Сергейчук В. В., Галинский Д. В. Классификация пар линейных операторов в четырехмерном векторном пространстве // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 413–430.
- [4] Икрамов Х. Д. Об одном критерии квазидиагонализуемости вещественных матриц // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40. № 1. С. 6–20.
- [5] Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984.
- [6] Казімірський П. С. Розклад матричних многочленів на множники. Київ: Наукова думка, 1981.
- [7] Шаваровский В. З. Редукция матриц при помощи эквивалентных и подобных преобразований // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 5. С. 769–782.
- [8] Казімірський П. С., Петричкович В. М. Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. Київ: Наукова думка, 1977. С. 61–66.
- [9] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.