Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Слюсарчук, Необходимые и достаточные условия
липшицевой обратимости нелинейного дифференциального
отображения $d/dt - f$ в пространствах $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$,
Матем. заметки, 2003, том 73, выпуск 6, 891–903

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 03:50:16

УДК 517.9

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЛИПШИЦЕВОЙ ОБРАТИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ $d/dt - f$ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$

В. Е. Слюсарчук

Получены необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости дифференциального отображения $d/dt - f$, где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывное отображение, в пространствах $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$.

Библиография: 19 названий.

Обозначим через $L_p = L_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, банахово пространство измеримых и суммируемых в степени p при $p \in [1, \infty)$ (существенно ограниченных при $p = \infty$) на $\mathbb{R}$ функций $x = x(t)$ со значениями в $\mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\|_{L_p} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, & \text{если } p \in [1, \infty), \\ \text{vrai sup}_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|, & \text{если } p = \infty \end{cases}$$

(функции, совпадающие почти всюду, отождествляются). Через W_p^1 , $1 \leq p \leq \infty$, обозначим банахово пространство функций $x \in L_p$, для которых $dx/dt \in L_p$ и

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \frac{dx(s)}{ds} ds$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, с нормой

$$\|x\|_{W_p^1} = \|x\|_{L_p} + \left\| \frac{dx}{dt} \right\|_{L_p}.$$

Отображение $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$, $X, Y \in \{L_p, W_p^1\}$, назовем *липшицевым*, если

$$\sup_{u, v \in X, u \neq v} \frac{\|\mathcal{A}u - \mathcal{A}v\|_Y}{\|u - v\|_X} < +\infty.$$

Рассмотрим непрерывное отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{u, v \in \mathbb{R}, u \neq v} \left| \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \right| \quad \text{и} \quad m \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{u, v \in \mathbb{R}, u \neq v} \left| \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \right|.$$

Будем предполагать, что

$$M < \infty \quad \text{при } p \in [1, \infty] \tag{1}$$

и

$$f(0) = 0 \quad \text{при } p \in [1, \infty). \quad (2)$$

Примером липшицевого дифференциального отображения, действующего из W_p^1 в L_p , является отображение $\mathcal{L}$, определенное равенством

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx(t)}{dt} - f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $x \in W_p^1$.

Очевидно, что выполнение соотношений (1) и (2) не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы $\{\mathcal{L}x : x \in W_p^1\} \subset L_p$ и отображение $\mathcal{L} : W_p^1 \rightarrow L_p$ было липшицевым.

Выясним, когда отображение $\mathcal{L} : W_p^1 \rightarrow L_p$ имеет обратное липшицево отображение.

Заметим, что в классе нелинейных дифференциальных отображений отображение $\mathcal{L}$ является наиболее простым. Однако, несмотря на это, решение задачи о липшицевой обратимости отображения $\mathcal{L}$ не является тривиальным. Это обусловлено, во-первых, нелинейностью этого отображения (предложенные, например, в [1]–[15] методы исследования обратимости линейных и слабо нелинейных отображений неприменимы к $\mathcal{L}$) и, во-вторых, тем, что элементы пространства L_p при $p \in [1, \infty)$ могут быть существенно неограниченными (это затрудняет применение к $\mathcal{L}$, например, методов монотонных [16] или s -непрерывных [7], [17] отображений). Рассматриваемый здесь метод исследования отображения $\mathcal{L}$ базируется на разностной аппроксимации этого отображения и существенно использует локально сходящиеся последовательности элементов пространств L_p , $1 \leq p \leq \infty$.

1. Формулировка основных результатов. Основными результатами статьи являются следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются соотношения (1) и (2). Для того чтобы отображение $\mathcal{L} : W_p^1 \rightarrow L_p$ имело обратное липшицево отображение $\mathcal{L}^{-1}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$m > 0. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются соотношения (1)–(3). Тогда

$$\|\mathcal{L}^{-1}h_1 - \mathcal{L}^{-1}h_2\|_{L_p} \leq \frac{1}{m}\|h_1 - h_2\|_{L_p}, \quad (4)$$

$$\|\mathcal{L}^{-1}h_1 - \mathcal{L}^{-1}h_2\|_{W_p^1} \leq \frac{M + m + 1}{m}\|h_1 - h_2\|_{L_p} \quad (5)$$

для всех $h_1, h_2 \in L_p$ и

$$\|\mathcal{L}^{-1}h\|_{L_p} \leq \frac{1}{m}\|h + f(0)\|_{L_p}, \quad (6)$$

$$\|\mathcal{L}^{-1}h\|_{W_p^1} \leq \frac{M + m + 1}{m}\|h + f(0)\|_{L_p} \quad (7)$$

для всех $h \in L_p$.

Обоснование этих теорем осуществляется с помощью ряда вспомогательных утверждений.

2. Банахово пространство $L_{p,\varepsilon}$ и отображение S_ε . Пусть $p \in [1, \infty]$ и $\varepsilon \in (0, \infty)$. Обозначим через $L_{p,\varepsilon}$ подпространство пространства L_p , для каждого из элементов y которого выполняется соотношение

$$y(t) = y(\varepsilon[t/\varepsilon]) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R},$$

где $[t/\varepsilon]$ – целая часть числа t/ε , с нормой $\|y\|_{L_{p,\varepsilon}} \stackrel{\text{def}}{=} \|y\|_{L_p}$. Вследствие полноты пространства L_p пространство $L_{p,\varepsilon}$ также является полным. Определим с помощью равенства

$$(S_\varepsilon y)(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon[t/\varepsilon] - \varepsilon}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} y(s) ds, \quad y \in L_p, \quad t \in \mathbb{R},$$

линейное отображение $S_\varepsilon: L_p \rightarrow L_{p,\varepsilon}$.

ЛЕММА 1. Для каждой $p \in [1, \infty]$ и $\varepsilon \in (0, \infty)$ норма отображения $S_\varepsilon: L_p \rightarrow L_{p,\varepsilon}$ равна 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon \in (0, \infty)$, $x \in L_p$ и $\|x\|_{L_p} = 1$. Тогда при $p \in [1, \infty)$ с учетом неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} \|S_\varepsilon x\|_{L_{p,\varepsilon}} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |(S_\varepsilon x)(t)|^p dt \right)^{1/p} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon[k/\varepsilon] - \varepsilon}^{\varepsilon[k/\varepsilon]} x(s) ds \right|^p dt \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^{1-p} \left| \int_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} x(s) ds \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^{1-p} \left(\left(\int_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} |x(s)|^p ds \right)^{1/p} \left(\int_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} 1 ds \right)^{(p-1)/p} \right)^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} |x(s)|^p ds \right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |x(s)|^p ds \right)^{1/p} = 1, \end{aligned}$$

а при $p = \infty$

$$\|S_\varepsilon x\|_{L_{p,\varepsilon}} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon[t/\varepsilon] - \varepsilon}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} \|x\|_{L_p} ds = 1,$$

т.е. $\|S_\varepsilon\|_{L(L_p, L_{p,\varepsilon})} \leq 1$ для всех $p \in [1, \infty]$ и $\varepsilon \in (0, \infty)$. Поскольку также для функций

$$x_\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, \varepsilon), \\ 0, & \text{если } t \notin [0, \varepsilon), \end{cases} \quad \text{и} \quad y_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} S_\varepsilon x_\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [\varepsilon, 2\varepsilon), \\ 0, & \text{если } t \notin [\varepsilon, 2\varepsilon), \end{cases}$$

очевидно, $\|S_\varepsilon x_\varepsilon\|_{L_{p,\varepsilon}} = \|y_\varepsilon\|_{L_{p,\varepsilon}} = 1$ для всех $\varepsilon \in (0, \infty)$ и $p \in [1, \infty]$, то утверждение леммы обосновано.

3. Разностное отображение $\mathcal{D}_\varepsilon: L_{p,\varepsilon} \rightarrow L_{p,\varepsilon}$. Рассмотрим разностное отображение $\mathcal{D}_\varepsilon: L_{p,\varepsilon} \rightarrow L_{p,\varepsilon}$ и отображение сдвига $T_\tau: L_p \rightarrow L_p$, $\tau \in \mathbb{R}$, определенные равенствами

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\varepsilon x)(t) &= x(t) - x(t - \varepsilon) - \varepsilon f(x(t - \varepsilon)), \\ (T_\tau y)(t) &= y(t + \tau), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon \in (0, \infty)$, $p \in [1, \infty]$, $x \in L_{p,\varepsilon}$ и $y \in L_p$.

ЛЕММА 2. Пусть выполняются соотношения (1)–(3) и $\varepsilon \in (0, 1/M)$. Тогда

а) уравнение

$$\mathcal{D}_\varepsilon z_\varepsilon = \varepsilon S_\varepsilon h \quad (8)$$

для каждого $h \in L_p$ имеет единственное решение $z_\varepsilon \in L_{p,\varepsilon}$, для которого

$$\|z_\varepsilon\|_{L_{p,\varepsilon}} \leq \frac{1}{m} \|h + f(0)\|_{L_p} \quad (9)$$

и

$$\|z_\varepsilon - T_\tau z_\varepsilon\|_{L_p} \leq \begin{cases} \tau^{1/p} \varepsilon^{(p-1)/p} \left(1 + \frac{M}{m}\right) \|h\|_{L_p} & \text{при } p \in [1, \infty), \\ \varepsilon \left(1 + \frac{M}{m}\right) \|h + f(0)\|_{L_\infty} & \text{при } p = \infty \end{cases} \quad (10)$$

для всех $\tau \in [0, \varepsilon]$;

б) для решений $z_{\varepsilon,1}$ и $z_{\varepsilon,2}$ уравнения (8) соответственно при $h = h_1$ и $h = h_2$, $h_1, h_2 \in L_p$, выполняется соотношение

$$\|z_{\varepsilon,1} - z_{\varepsilon,2}\|_{L_{p,\varepsilon}} \leq \frac{1}{m} \|h_1 - h_2\|_{L_p}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение а). Рассмотрим случай, когда функция $f(t)$ является убывающей на $\mathbb{R}$. Согласно (1) и (3)

$$1 - \varepsilon M \leq \frac{u + \varepsilon f(u) - v - \varepsilon f(v)}{u - v} \leq 1 - \varepsilon m, \quad \text{если } u \neq v. \quad (12)$$

Поэтому определенное равенством

$$(A_\varepsilon z)(t) = z(t - \varepsilon) + \varepsilon(f(z(t - \varepsilon)) - f(0))$$

отображение $A_\varepsilon: L_{p,\varepsilon} \rightarrow L_{p,\varepsilon}$ является сжимающим отображением [18] при $\varepsilon \in (0, 1/M)$, поскольку $0 < 1 - \varepsilon m < 1$ и на основании (12)

$$\|A_\varepsilon x - A_\varepsilon y\|_{L_{p,\varepsilon}} \leq (1 - \varepsilon m) \|x - y\|_{L_{p,\varepsilon}} \quad (13)$$

для всех $x, y \in L_{p,\varepsilon}$. Следовательно, при $\varepsilon \in (0, 1/M)$ уравнение (8), которое можно представить в виде

$$z_\varepsilon(t) = z_\varepsilon(t - \varepsilon) + \varepsilon(f(z_\varepsilon(t - \varepsilon)) - f(0)) + \varepsilon(S_\varepsilon(h + f(0)))(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

имеет единственное решение $z_\varepsilon \in L_{p,\varepsilon}$ для каждого $h \in L_p$ (заметим, что $\varepsilon S_\varepsilon(h + f(0)) \in L_{p,\varepsilon}$ согласно определению отображения S_ε).

Оценим норму $\|z_\varepsilon\|_{L_{p,\varepsilon}}$ при $\varepsilon \in (0, 1/M)$. Из (12) и (14) следует, что

$$|z_\varepsilon(t)| \leq (1 - \varepsilon m) |z_\varepsilon(t - \varepsilon)| + \varepsilon |S_\varepsilon(h + f(0))|(t)|$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому с учетом леммы 1

$$\|z_\varepsilon\|_{L_{p,\varepsilon}} \leq (1 - \varepsilon m) \|z_\varepsilon\|_{L_{p,\varepsilon}} + \varepsilon \|h + f(0)\|_{L_p}$$

и, следовательно, выполняется соотношение (9) для всех $\varepsilon \in (0, 1/M)$.

Теперь рассмотрим случай, когда функция $f(t)$ является возрастающей на $\mathbb{R}$. Тогда согласно (1) и (3) имеет место неравенство

$$1 + \varepsilon m \leq \frac{u + \varepsilon f(u) - v - \varepsilon f(v)}{u - v} \leq 1 + \varepsilon M, \quad \text{если } u \neq v, \quad (15)$$

и отображение A_ε удовлетворяет соотношению

$$\|A_\varepsilon x - A_\varepsilon y\|_{L_{p,\varepsilon}} \geq (1 + \varepsilon m)\|x - y\|_{L_{p,\varepsilon}} \quad (16)$$

для всех $x, y \in L_{p,\varepsilon}$ и $\varepsilon \in (0, \infty)$. Таким образом, если уравнение (8), а, следовательно, и уравнение (14), имеет решение $z_\varepsilon \in L_{p,\varepsilon}$, то

$$\|z_\varepsilon\|_{L_{p,\varepsilon}} \geq (1 + \varepsilon m)\|z_\varepsilon\|_{L_{p,\varepsilon}} - \varepsilon\|h + f(0)\|_{L_p},$$

откуда вытекает неравенство (9).

Покажем, что уравнение (14) имеет в пространстве $L_{p,\varepsilon}$ единственное решение.

Из (15) следует, что функция $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} t + \varepsilon(f(t) - f(0))$ является строго возрастающей на $\mathbb{R}$. Поэтому она имеет обратную функцию и, следовательно, отображение $A_\varepsilon: L_{p,\varepsilon} \rightarrow L_{p,\varepsilon}$ также имеет обратное отображение

$$(A_\varepsilon^{-1}x)(t) = g^{-1}(x(t + \varepsilon)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in (0, \infty), \quad (17)$$

для которого согласно (16)

$$\|A_\varepsilon^{-1}x - A_\varepsilon^{-1}y\|_{L_{p,\varepsilon}} \leq (1 + \varepsilon m)^{-1}\|x - y\|_{L_{p,\varepsilon}} \quad (18)$$

для всех $x, y \in L_{p,\varepsilon}$.

Очевидно, что уравнение (14) равносильно уравнению

$$z_\varepsilon(t) = g^{-1}(z_\varepsilon(t + \varepsilon) - \varepsilon(S_\varepsilon(h + f(0)))(t + \varepsilon)), \quad t \in \mathbb{R},$$

к которому в силу (17) и (18) применим принцип сжимающих отображений. Следовательно, уравнение (14) имеет в пространстве $L_{p,\varepsilon}$ единственное решение для каждого $h \in L_p$ и $\varepsilon \in (0, \infty)$.

Теперь докажем, что выполняется соотношение (10).

Фиксируем произвольные $p \in [1, \infty]$ и $\varepsilon \in (0, 1/M)$. Пусть z_ε — единственное решение уравнения (14). Согласно включению $z_\varepsilon \in L_{p,\varepsilon}$ для функции $w \stackrel{\text{def}}{=} f(z_\varepsilon(t - \varepsilon)) - f(0)$ имеет место равенство

$$f(z_\varepsilon(t - \varepsilon)) - f(0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon[t/\varepsilon] - \varepsilon}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} (f(z_\varepsilon(s)) - f(0)) ds$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, причем вследствие (1), леммы 1 и (9)

$$\|w\|_{L_{p,\varepsilon}} \leq M\|T_{-\varepsilon}z_\varepsilon\|_{L_{p,\varepsilon}} = M\|z_\varepsilon\|_{L_{p,\varepsilon}} \leq \frac{M}{m}\|h + f(0)\|_{L_p}.$$

Отсюда, из соотношения

$$|z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \varepsilon)| \leq \varepsilon|f(z_\varepsilon(t - \varepsilon)) - f(0)| + \varepsilon|(S_\varepsilon(h + f(0)))(t)|, \quad t \in \mathbb{R},$$

вытекающего из (14), с учетом леммы 1 получаем, что

$$\|z_\varepsilon - T_{-\varepsilon} z_\varepsilon\|_{L_{p,\varepsilon}} \leq \varepsilon \left(1 + \frac{M}{m}\right) \|h + f(0)\|_{L_p}. \quad (19)$$

Покажем, что

$$\|z_\varepsilon - T_{-\tau} z_\varepsilon\|_{L_p} \leq \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{1/p} \|z_\varepsilon - T_{-\varepsilon} z_\varepsilon\|_{L_{p,\varepsilon}} \quad (20)$$

для всех $p \in [1, \infty)$ и $\tau \in [0, \varepsilon]$. Очевидно, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} & \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \tau)|^p dt \\ &= \int_{k\varepsilon}^{k\varepsilon + \tau} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \tau)|^p dt + \int_{k\varepsilon + \tau}^{(k+1)\varepsilon} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \tau)|^p dt \\ &= \int_{k\varepsilon}^{k\varepsilon + \tau} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \varepsilon)|^p dt + \int_{k\varepsilon + \tau}^{(k+1)\varepsilon} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t)|^p dt \\ &= \frac{\tau}{\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \varepsilon)|^p dt. \end{aligned}$$

Поэтому для каждого $p \in [1, \infty)$ и $\tau \in [0, \varepsilon]$

$$\begin{aligned} \|z_\varepsilon - T_{-\tau} z_\varepsilon\|_{L_p} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \tau)|^p dt \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \tau)|^p dt \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\tau}{\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \varepsilon)|^p dt \right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right)^{1/p} \|z_\varepsilon - T_{-\varepsilon} z_\varepsilon\|_{L_{p,\varepsilon}}, \end{aligned}$$

т.е. соотношение (20) выполняется. Следовательно, на основании (19) и (20) выполняется соотношение (10) при $p \in [1, \infty)$. При $p = \infty$ это соотношение выполняется вследствие (19) и того, что при $\tau \in (0, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} \|z_\varepsilon - T_{-\tau} z_\varepsilon\|_{L_\infty} &= \sup_{t \in \mathbb{R}} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \tau)| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{k\varepsilon \leq t < (k+1)\varepsilon} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \tau)| \\ &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} \max \left\{ \sup_{k\varepsilon \leq t < k\varepsilon + \tau} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \tau)|, \sup_{k\varepsilon + \tau \leq t < (k+1)\varepsilon} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \tau)| \right\} \\ &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{k\varepsilon \leq t < k\varepsilon + \tau} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \tau)| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{k\varepsilon \leq t < k\varepsilon + \tau} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \varepsilon)| \\ &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{k\varepsilon \leq t < (k+1)\varepsilon} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \varepsilon)| = \|z_\varepsilon - T_{-\varepsilon} z_\varepsilon\|_{L_{\infty,\varepsilon}} \end{aligned}$$

(здесь учтено то, что $\sup_{k\varepsilon + \tau \leq t < (k+1)\varepsilon} |z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \tau)| = 0$).

Следовательно, утверждение а) доказано.

Докажем утверждение б). На основании (12) и (15) соответственно получаем, что для всех $t \in \mathbb{R}$

$$|z_{\varepsilon,1}(t) - z_{\varepsilon,2}(t)| \leq (1 - \varepsilon m)|z_{\varepsilon,1}(t - \varepsilon) - z_{\varepsilon,2}(t - \varepsilon)| + \varepsilon|(S_\varepsilon(h_1 - h_2))(t)|,$$

если функция $f(s)$ является убывающей на $\mathbb{R}$, и

$$|z_{\varepsilon,1}(t) - z_{\varepsilon,2}(t)| \geq (1 + \varepsilon m)|z_{\varepsilon,1}(t - \varepsilon) - z_{\varepsilon,2}(t - \varepsilon)| - \varepsilon|(S_\varepsilon(h_1 - h_2))(t)|,$$

если функция $f(s)$ является возрастающей на $\mathbb{R}$. Поэтому с учетом леммы 1

$$\|z_{\varepsilon,1} - z_{\varepsilon,2}\|_{L_{p,\varepsilon}} \leq (1 - \varepsilon m)\|z_{\varepsilon,1} - z_{\varepsilon,2}\|_{L_{p,\varepsilon}} + \varepsilon\|h_1 - h_2\|_{L_p}$$

или

$$\|z_{\varepsilon,1} - z_{\varepsilon,2}\|_{L_{p,\varepsilon}} \geq (1 + \varepsilon m)\|z_{\varepsilon,1} - z_{\varepsilon,2}\|_{L_{p,\varepsilon}} - \varepsilon\|h_1 - h_2\|_{L_p}.$$

Отсюда вытекает неравенство (11).

Лемма 2 доказана.

4. Локально сходящиеся последовательности и локальная предкомпактность множества $\{z_{1/k} : k \in \mathbb{N} \cap (M, \infty)\}$. Обозначим через $P_{[-a,a]}$, где $a \in (0, \infty)$, действующее в пространствах L_p , $p \in [1, \infty]$, отображение, определенное равенством

$$(P_{[-a,a]}y)(t) = \begin{cases} y(t), & \text{если } t \in [-a, a], \\ 0, & \text{если } t \notin [-a, a]. \end{cases}$$

Будем говорить, что ограниченная последовательность x_k , $k \geq 1$, элементов пространства L_p *локально сходится* к $x \in L_p$ при $k \rightarrow \infty$, и обозначать

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.}, L_p} x \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

если для каждого $a > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_{[-a,a]}(x_k - x)\|_{L_p} = 0.$$

ЛЕММА 3. Пусть

- 1) $p \in [1, \infty]$;
- 2) $\mathcal{M}$ — ограниченное подмножество пространства L_p ;
- 3) множество $P_{[-a,a]}\mathcal{M}$ предкомпактно в L_p для каждого $a > 0$.

Тогда найдутся последовательность $x_k \in \mathcal{M}$, $k \geq 1$, и элемент $x \in L_p$ такой, что

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.}, L_p} x \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

и

$$\|x\|_{L_p} \leq \sup\{\|z\|_{L_p} : z \in \mathcal{M}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании условий леммы можно построить последовательности

$$x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{ln}, \dots, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

для которых

- 1) $x_{ij} \in \mathcal{M}$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$;
- 2) $\{x_{1l} : l \in \mathbb{N}\} \supset \{x_{2l} : l \in \mathbb{N}\} \supset \dots \supset \{x_{kl} : l \in \mathbb{N}\} \supset \dots$;
- 3) последовательности

$$P_{[-l, l]}x_{l1}, P_{[-l, l]}x_{l2}, \dots, P_{[-l, l]}x_{ln}, \dots, \quad l \in \mathbb{N},$$

являются сходящимися.

Эти свойства последовательностей (21) позволяют рассмотреть элементы

$$y_l = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{[-l, l]}x_{ln} \in L_p, \quad l \in \mathbb{N},$$

для которых, очевидно, $y_l(t) = y_{l-1}(t)$ для всех $t \in [-l+1, l-1]$ и $l \geq 2$. Также, очевидно, что

$$\|y_l\|_{L_p} \leq \mu \quad \text{для всех } l \geq 1, \quad (22)$$

где $\mu = \sup\{\|z\|_{L_p} : z \in \mathcal{M}\}$.

Пусть $x = x(t)$ – такая определенная на $\mathbb{R}$ функция, что

$$x|_{[-l, l]} = y_l|_{[-l, l]} \quad \text{для всех } l \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

Тогда на основании (22) $x \in L_p$ и $\|x\|_{L_p} \leq \mu$. Рассмотрим диагональную последовательность $x_{11}, x_{22}, \dots, x_{ll}, \dots$. Согласно (23) и свойствам последовательностей (21)

$$x_{ll} \xrightarrow{\text{лок., } L_p} x \quad \text{при } l \rightarrow \infty.$$

Лемма 3 доказана.

Ограниченное подмножество $\mathcal{P}$ пространства L_p , $p \in [1, \infty]$, назовем *локально предкомпактным*, если множество $P_{[-a, a]} \mathcal{P}$ предкомпактно в L_p для каждого $a > 0$.

Рассмотрим множество $\Gamma = \{z_{1/k} : k \in \mathbb{N} \cap (M, \infty)\}$, где $z_{1/k}$ – решение уравнения (8) при $\varepsilon = 1/k$.

ЛЕММА 4. Множество Γ предкомпактно в L_p , $p \in [1, \infty]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что вследствие неравенства (9) множество Γ ограничено для каждого $p \in [1, \infty]$, а вследствие неравенства (10) и критерия М. Рисса (см., например, [18, с. 135]) множество $P_{[-a, a]} \Gamma$ предкомпактно для каждого $p \in [1, \infty]$ и $a > 0$. При $p = \infty$ и каждом $a > 0$ множество $P_{[-a, a]} \Gamma$ также предкомпактно. Действительно, рассмотрим линейное отображение $\Lambda_\varepsilon : L_{\infty, \varepsilon} \rightarrow L_\infty$, определенное равенством

$$(\Lambda_\varepsilon x)(t) = \frac{\varepsilon + \varepsilon[t/\varepsilon] - t}{\varepsilon} x(t) + \frac{t - \varepsilon[t/\varepsilon]}{\varepsilon} x(t + \varepsilon),$$

где $x \in L_{\infty, \varepsilon}$ и $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, что для каждой функции $x \in L_{\infty, \varepsilon}$

- 1) $(\Lambda_\varepsilon x)(t)$ – непрерывная на $\mathbb{R}$ функция;
- 2) $(\Lambda_\varepsilon x)(k\varepsilon) = x(k\varepsilon)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$;

- 3) $(\Lambda_\varepsilon x)(t)$ – линейная функция на каждом отрезке $[k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]$, $k \in \mathbb{Z}$;
 4) имеет место оценка

$$\left| \frac{d(\Lambda_\varepsilon x)(t)}{dt} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|x - T_\varepsilon x\|_{L_{\infty, \varepsilon}} \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R} \setminus \{k\varepsilon : k \in \mathbb{Z}\};$$

$$5) \|x - \Lambda_\varepsilon x\|_{L_\infty} \leq \|x - T_\varepsilon x\|_{L_{\infty, \varepsilon}}.$$

Далее рассмотрим множество $\Gamma_\Lambda = \{\Lambda_\varepsilon z_\varepsilon : \varepsilon = 1/n, n \in (M, \infty) \cap \mathbb{N}\}$. Это множество ограничено в силу ограниченности множества Γ , свойства 5) и неравенства (10). Функции этого множества также равностепенно непрерывны на $\mathbb{R}$ на основании свойств отображения Λ_ε и неравенства (10). Поэтому на основании теоремы Арцела–Асколи [18, с. 131] множество $P_{[-a, a]} \Gamma_\Lambda$ предкомпактно в L_∞ для каждого $a > 0$. Тогда согласно свойству 5) и неравенству (10) множество $P_{[-a, a]} \Gamma$ также предкомпактно в L_∞ для каждого $a > 0$.

Лемма 4 доказана.

5. Обоснование основных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Необходимость. Пусть отображение $\mathcal{L}: W_p^1 \rightarrow L_p$ имеет обратное липшицево отображение.

Покажем, что для $f(t)$ выполняется соотношение (3).

Предположим противное. Тогда найдутся числа $u_k, v_k \in \mathbb{R}$, $u_k \neq v_k$, $k \in \mathbb{N}$, для которых

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(u_k) - f(v_k)}{u_k - v_k} = 0. \quad (24)$$

В случае $p = \infty$ рассмотрим элементы $x_k, y_k \in W_\infty^1$, для которых $x_k(t) = u_k$ и $y_k(t) = v_k$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда $(\mathcal{L}x_k)(t) = -f(u_k)$, $(\mathcal{L}y_k)(t) = -f(v_k)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathcal{L}x_k - \mathcal{L}y_k\|_{L_\infty}}{\|x_k - y_k\|_{W_\infty^1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{f(u_k) - f(v_k)}{u_k - v_k} \right|,$$

что согласно (24) противоречит липшицевости отображения $\mathcal{L}^{-1}$.

В случае $p \in [1, \infty)$ рассмотрим элементы $\tilde{x}_k = u_k \gamma_k$, $\tilde{y}_k = v_k \gamma_k$, $k \in \mathbb{N}$, пространства W_p^1 , где

$$\gamma_k = \begin{cases} 1, & \text{если } |t| \leq k, \\ k+1-|t|, & \text{если } |t| \in (k, k+1], \\ 0, & \text{если } |t| > k+1. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{L}\tilde{x}_k - \mathcal{L}\tilde{y}_k\|_{L_p} &= \left(\int_{-k-1}^{k+1} |(\mathcal{L}\tilde{x}_k)(t) - (\mathcal{L}\tilde{y}_k)(t)|^p dt \right)^{1/p} \\
 &\leq \left(\int_{-k-1}^{k+1} \left| \frac{d(\tilde{x}_k(t) - \tilde{y}_k(t))}{dt} \right|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_{-k-1}^{k+1} |f(\tilde{x}_k(t)) - f(\tilde{y}_k(t))|^p dt \right)^{1/p} \\
 &\leq 2^{1/p} |u_k - v_k| + \left(\int_{-k-1}^{-k} |f(\tilde{x}_k(t)) - f(\tilde{y}_k(t))|^p dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_k^{k+1} |f(\tilde{x}_k(t)) - f(\tilde{y}_k(t))|^p dt + 2k |f(u_k) - f(v_k)|^p \right)^{1/p} \\
 &\leq 2^{1/p} |u_k - v_k| + \left(2M^p |u_k - v_k|^p + 2k |f(u_k) - f(v_k)|^p \right)^{1/p} \\
 &\leq 2^{1/p} (1 + M) |u_k - v_k| + (2k)^{1/p} |f(u_k) - f(v_k)|
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{x}_k - \tilde{y}_k\|_{W_p^1} &= \left(\int_{-k-1}^{k+1} |\tilde{x}_k(t) - \tilde{y}_k(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_{-k-1}^{k+1} \left| \frac{d(\tilde{x}_k(t) - \tilde{y}_k(t))}{dt} \right|^p dt \right)^{1/p} \\
 &\leq 2^{1/p} (k+1)^{1/p} |u_k - v_k| + 2^{1/p} |u_k - v_k| \\
 &= 2^{1/p} ((k+1)^{1/p} + 1) |u_k - v_k|.
 \end{aligned}$$

Поэтому с учетом (24)

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathcal{L}\tilde{x}_k - \mathcal{L}\tilde{y}_k\|_{L_p}}{\|\tilde{x}_k - \tilde{y}_k\|_{W_p^1}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{1/p} (1 + M) |u_k - v_k| + (2k)^{1/p} |f(u_k) - f(v_k)|}{2^{1/p} ((k+1)^{1/p} + 1) |u_k - v_k|} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + M}{(k+1)^{1/p} + 1} + \frac{k^{1/p}}{(k+1)^{1/p} + 1} \left| \frac{f(u_k) - f(v_k)}{u_k - v_k} \right| \right) = 0,
 \end{aligned}$$

что также противоречит липшицевости отображения $\mathcal{L}^{-1}$.

Итак, соотношение (3) выполняется.

Следовательно, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполняются соотношения (1)–(3). Покажем, что этих условий достаточно для липшицевой обратимости отображения $\mathcal{L} : W_p^1 \rightarrow L_p$ для каждого $p \in [1, \infty]$.

Рассмотрим произвольную функцию $h \in L_p$. Покажем сначала, что уравнение

$$\mathcal{L}x = h \tag{25}$$

имеет единственное решение $x \in W_p^1$.

Согласно лемме 2 для каждого $\varepsilon \in (0, 1/M)$ найдется функция $z_\varepsilon \in L_{p, \varepsilon}$, удовлетворяющая соотношению (9), для которой

$$z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \varepsilon) - \varepsilon f(z_\varepsilon(t - \varepsilon)) = \int_{\varepsilon[t/\varepsilon] - \varepsilon}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} h(s) ds$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Это соотношение, очевидно, можно представить в виде

$$z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t - \varepsilon) - \int_{\varepsilon[t/\varepsilon] - \varepsilon}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} f(z_\varepsilon(s)) ds = \int_{\varepsilon[t/\varepsilon] - \varepsilon}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} h(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отсюда вытекает, что

$$z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(\mu) - \int_{\varepsilon[\mu/\varepsilon]}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} f(z_\varepsilon(s)) ds = \int_{\varepsilon[\mu/\varepsilon]}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} h(s) ds \quad (26)$$

для всех $\mu, t \in \mathbb{R}$. На основании лемм 3 и 4 найдутся последовательности $\varepsilon_l \in \{1/k : k \in \mathbb{N} \cap (M, \infty)\}$, $x_l \stackrel{\text{def}}{=} z_{\varepsilon_l}$, $l \in \mathbb{N}$, и функция $x \in L_p$, для которых

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \varepsilon_l = 0, \\ x_l \xrightarrow{\text{лок.}, L_p} x \quad \text{при } l \rightarrow \infty \quad (27)$$

и

$$\|x\|_{L_p} \leq \frac{1}{m} \|h + f(0)\|_{L_p}. \quad (28)$$

Поскольку

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \varepsilon_l [t/\varepsilon_l] = t$$

для каждого $t \in \mathbb{R}$ и функции $f(x_1(t)), f(x_2(t)), f(x_3(t)), \dots$ на основании (9), (10) и липшицевости отображения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы Лебега на каждом множестве конечной меры (функции $f(x(t))$ и $h(t)$ также обладают этим свойством как элементы пространства L_p), то вследствие (26), (27) и теоремы Витали [19, с. 144] о предельном переходе под знаком интеграла получаем, что

$$x(t) - x(\mu) - \int_\mu^t f(x(s)) ds = \int_\mu^t h(s) ds \quad (29)$$

для всех $\mu, t \in \mathbb{R}$.

Из этого равенства и абсолютной непрерывности интегралов $\int_\mu^t f(x(s)) ds, \int_\mu^t h(s) ds$ вытекает, что абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}$ является и функция $x(t)$. Поэтому почти везде на $\mathbb{R}$ существует производная $dx(t)/dt$ и имеет место равенство

$$\frac{dx(t)}{dt} - f(x(t)) = h(t).$$

Отсюда, из (1) и (28) следует, что $x \in W_p^1$.

Покажем, что x – единственное решение уравнения (25).

Предположим, что уравнение (25) имеет также решение $y \in W_p^1$, и пусть

$$x(\tau) \neq y(\tau) \quad (30)$$

для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$. Если $f(t)$ – возрастающая на $\mathbb{R}$ функция, то $x(t) \neq y(t)$ для всех $t \geq \tau$. Действительно, если для некоторого $\mu > \tau$

$$x(\mu) = y(\mu) \quad (31)$$

и $x(t) \neq y(\tau)$ для всех $t \in [\tau, \mu)$, то согласно (25)

$$\frac{d(x(t) - y(t))}{dt} = f(x(t)) - f(y(t))$$

почти для всех $t \in \mathbb{R}$ и поэтому вследствие абсолютной непрерывности функции $x(t) - y(t)$ на $\mathbb{R}$ и (3)

$$|x(t) - y(t)| \geq \exp\{m(t - \tau)\}|x(\tau) - y(\tau)|$$

для всех $t \in [\tau, \mu)$, что в силу (30) и непрерывности функции $x(t) - y(t)$ в точке μ противоречит (31).

Итак,

$$|x(t) - y(t)| \geq \exp\{m(t - \tau)\}|x(\tau) - y(\tau)| \quad \text{для всех } t \geq \tau. \quad (32)$$

Если $f(t)$ — убывающая на $\mathbb{R}$ функция, то

$$|x(t) - y(t)| \geq \exp\{m(\tau - t)\}|x(\tau) - y(\tau)| \quad \text{для всех } t \leq \tau \quad (33)$$

(этот случай сводится к рассмотренному случаю заменой t на $-t$).

В силу (3) каждое из соотношений (32) и (33) противоречит включению $x - y \in W_p^1$.

Следовательно, предположение о выполнении соотношения (30) является ложным, т.е. $x = y$. Отсюда и из произвольности выбора $h \in L_p$ следует, что отображение $\mathcal{L}: W_p^1 \rightarrow L_p$ имеет обратное отображение $\mathcal{L}^{-1}$.

Покажем, что отображение $\mathcal{L}^{-1}: L_p \rightarrow W_p^1$ является липшицевым. Фиксируем произвольные $h_1, h_2 \in L_p$. Согласно лемме 2 для каждого $\varepsilon \in (0, 1/M)$ решения $z_{\varepsilon,1}$ и $z_{\varepsilon,2}$ уравнения (8) соответственно при $h = h_1$ и $h = h_2$ удовлетворяют соотношению (11), а согласно леммам 3, 4 и доказательству обратимости отображения $\mathcal{L}: W_p^1 \rightarrow L_p$ найдется последовательность $\varepsilon_l \in (0, 1/M)$, $l \in \mathbb{N}$, для которой

$$z_{\varepsilon_l,1} \xrightarrow{\text{лок.}, L_p} \mathcal{L}^{-1}h_1 \quad \text{при } l \rightarrow \infty, \quad z_{\varepsilon_l,2} \xrightarrow{\text{лок.}, L_p} \mathcal{L}^{-1}h_2 \quad \text{при } l \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (11) вытекает неравенство (4). Поскольку

$$\frac{d((\mathcal{L}^{-1}h_1)(t) - (\mathcal{L}^{-1}h_2)(t))}{dt} = f((\mathcal{L}^{-1}h_1)(t)) - f((\mathcal{L}^{-1}h_2)(t)) + h_1(t) - h_2(t)$$

почти для всех $t \in \mathbb{R}$ и, следовательно,

$$\left| \frac{d((\mathcal{L}^{-1}h_1)(t) - (\mathcal{L}^{-1}h_2)(t))}{dt} \right| \leq M|(\mathcal{L}^{-1}h_1)(t) - (\mathcal{L}^{-1}h_2)(t)| + |h_1(t) - h_2(t)|$$

почти для всех $t \in \mathbb{R}$, то согласно (4) и определению нормы в W_p^1 выполняется и неравенство (5).

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Соотношения (4) и (5) выполняются, что показано в заключительной части доказательства теоремы 1. Соотношение (6) выполняется согласно (28). Соотношение (7) — следствие определения нормы в W_p^1 , соотношения (6) и неравенства

$$\left| \frac{d(\mathcal{L}^{-1}h)(t)}{dt} \right| \leq M|(\mathcal{L}^{-1}h)(t)| + |h(t) + f(0)|, \quad t \in \mathbb{R},$$

вытекающего из тождества

$$\frac{d(\mathcal{L}^{-1}h)(t)}{dt} \equiv (f((\mathcal{L}^{-1}h)(t)) - f(0)) + (h(t) + f(0)).$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
- [2] Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970.
- [3] Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970.
- [4] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [5] Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. Киев: Наукова думка, 1990.
- [6] Курбатов В. Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990.
- [7] Мухамадиев Э. Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Матем. заметки. 1972. Т. 11. № 3. С. 269–274.
- [8] Слюсарчук В. Е. Обратимость почти периодических s -непрерывных функциональных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 116 (158). № 4 (12). С. 483–501.
- [9] Слюсарчук В. Е. Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Матем. сб. 1986. Т. 130 (172). № 1 (5). С. 86–104.
- [10] Слюсарчук В. Е. Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1987. Т. 42. № 2. С. 262–267.
- [11] Слюсарчук В. Е. Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. матем. ж. 1987. Т. 39. № 5. С. 660–662.
- [12] Слюсарчук В. Е. Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно s -непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. матем. ж. 1989. Т. 41. № 2. С. 201–205.
- [13] Баскаков А. Г. Некоторые условия обратимости линейных дифференциальных и разностных операторов // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 3. С. 282–284.
- [14] Баскаков А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его прилож. 1996. Т. 30. № 3. С. 1–11.
- [15] Тюрин В. М. Об обратимости линейных дифференциальных операторов в некоторых функциональных пространствах // Сиб. матем. ж. 1991. Т. 32. № 3. С. 160–165.
- [16] Трубников Ю. В., Перов А. И. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. Минск: Наука и техника, 1986.
- [17] Слюсарчук В. Е. Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. 1999. Т. 2. № 4. С. 523–537.
- [18] Антоневич А. Б., Радно Я. В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Минск: Изд-во “Университетское”, 1984.
- [19] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.