Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Соколов, Замечание об отделимости подгрупп в классе конечных π -групп, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 6, 904–909

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm239>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:55:32

УДК 512.543

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ПОДГРУПП В КЛАССЕ КОНЕЧНЫХ π -ГРУПП

Е. В. Соколов

В статье доказано, что если группа G аппроксимируема в классе $\mathcal{N}$, то для каждой $\mathcal{N}$ -подгруппы группы G множество π' -корней из этой подгруппы является π -отделимой $\mathcal{N}$ -подгруппой.

Библиография: 5 названий.

1. Формулировка результатов. Пусть $\mathcal{K}$ – некоторый класс групп. Напомним (см. [1]), что группа X называется *аппроксимируемой в классе $\mathcal{K}$* (*$\mathcal{K}$ -аппроксимируемой*), если для любого неединичного элемента $g \in X$ существует гомоморфизм группы X на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, переводящий g в элемент, отличный от 1. Подгруппа Y группы X называется *отделимой в классе $\mathcal{K}$* (*$\mathcal{K}$ -отделимой*), если для всякого элемента $g \in X \setminus Y$ можно указать такой гомоморфизм φ группы X на группу из $\mathcal{K}$, что $g\varphi \notin Y\varphi$.

Очевидно, что если все группы из класса $\mathcal{K}$ в свою очередь аппроксимируемы в некотором классе $\mathcal{L}$, то каждая $\mathcal{K}$ -аппроксимируемая группа является $\mathcal{L}$ -аппроксимируемой. Очевидно также, что если $\mathcal{P}$ – гомоморфно замкнутый класс групп и в произвольной группе из класса $\mathcal{K}$ все $\mathcal{P}$ -подгруппы (т.е. подгруппы, принадлежащие классу $\mathcal{P}$) являются $\mathcal{L}$ -отделимыми, то из $\mathcal{K}$ -отделимости всех $\mathcal{P}$ -подгрупп произвольной группы X следует их $\mathcal{L}$ -отделимость. Именно на этом замечании основаны, например, доказательства большинства известных результатов о финитной отделимости всех конечно порожденных или всех циклических подгрупп свободного произведения с объединенной подгруппой, использующие тот факт, что в свободном произведении с объединенной подгруппой двух конечных групп все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

Ситуация оказывается более сложной, если $\mathcal{L}$ -отделимость $\mathcal{P}$ -подгрупп данной группы зависит от того, как подгруппы расположены в этой группе. Примером может служить отделимость в классе конечных π -групп (*π -отделимость*).

Напомним, что если π – некоторое множество простых чисел, то подгруппа Y группы X называется *π -изолированной* в X , если для всякого элемента $g \in X$ и для всякого простого числа $q \in \pi$ из $g^q \in Y$ следует, что $g \in Y$. Наименьшая π -изолированная подгруппа, содержащая подгруппу Y группы X , называется *π -изолятором* Y (об изоляторах в нильпотентных группах см., например, [2, § 4]). Как обычно, π' обозначает множество всех простых чисел, не принадлежащих π .

Легко видеть, что произвольная π -отделимая подгруппа должна быть π' -изолированной. Очевидно также, что π' -изолятор подгруппы Y содержит множество π' -корней из Y , т.е. множество всех таких элементов, которые в некоторой π' -степени лежат в Y (мы будем обозначать его через $\sqrt[\pi']{Y}$).

Обратные утверждения, вообще говоря, не имеют места. Известно, однако, что для всякой подгруппы Y произвольной нильпотентной группы множество $\sqrt[\pi']{Y}$ является подгруппой (там же). Можно утверждать также, что в конечно порожденной нильпотентной группе без кручения подгруппа $\sqrt[\pi']{Y}$ π -отделима (см. замечание в конце п. 3). Естественно возникает вопрос, справедливы ли аналогичные утверждения для подгрупп произвольной группы, аппроксимируемой в классе $\mathcal{N}$ всех конечно порожденных нильпотентных групп без кручения. В этом направлении здесь будет доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть группа G аппроксимируема в классе $\mathcal{N}$. Тогда для каждой $\mathcal{N}$ -подгруппы группы G множество π' -корней из этой подгруппы является π -отделимой $\mathcal{N}$ -подгруппой. В частности, каждая π' -изолированная $\mathcal{N}$ -подгруппа группы G π -отделима.

Заметим, что хотя формулировка теоремы не требует явно отделимости конечно порожденных нильпотентных подгрупп группы G в классе $\mathcal{N}$, здесь это условие выполняется автоматически (см. предложение 1 ниже). Приведем два утверждения, непосредственно вытекающих из сформулированной теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть группа G является прямым произведением семейства свободных групп. Тогда для каждой конечно порожденной абелевой подгруппы группы G множество π' -корней является π -отделимой конечно порожденной абелевой подгруппой.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть F – свободная группа, w – элемент группы F , порождающий в F свой централизатор, и $G = \langle F * X; w = x^n \rangle$ – свободное произведение с объединенной подгруппой группы F и бесконечной циклической группы X с порождающим x , $n \geq 1$. Тогда для каждой циклической подгруппы группы G множество π' -корней является π -отделимой циклической подгруппой.

Действительно, аппроксимируемость свободной группы в классе $\mathcal{N}$ хорошо известна, а для группы G из формулировки следствия 2 аналогичное утверждение доказано в работе [3].

Отметим также, что следствие 1 является обобщением известного результата о том, что всякая π' -изолированная циклическая подгруппа свободной группы является π -отделимой (см., например, [4]).

2. Об отделимости подгрупп в классах групп без кручения. Аппроксимируемость в некотором классе групп (равносильная отделимости единичной подгруппы), вообще говоря, не влечет за собой отделимости даже циклических подгрупп. В этой связи представляет интерес следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{L}$ – класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей,

группа G $\mathcal{L}$ -аппроксимируема, H – произвольная полициклическая подгруппа группы G . Тогда

- 1) подгруппа H $\mathcal{L}$ -отделима;
- 2) существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{L}$, инъективный на подгруппе H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала второе утверждение. Воспользуемся индукцией по рангу Гирша $r(H)$ подгруппы H , т.е. по числу бесконечных факторов в произвольном полициклическом ряде подгруппы H .

Так как группа G без кручения, произвольная ее полициклическая подгруппа ранга 0 тривиальна, и утверждение в этом случае очевидно.

Пусть теперь $r(H) > 0$. Обозначим через Ω семейство всех нормальных подгрупп группы G , фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{L}$. Ввиду условий, наложенных на класс $\mathcal{L}$, пересечение конечного числа подгрупп из Ω снова принадлежит Ω .

Пусть h – некоторый элемент подгруппы H , отличный от 1, и $N \in \Omega$ – подгруппа, не содержащая h . Положим $H_1 = H \cap N$. Тогда группа H/H_1 содержит элемент бесконечного порядка hH_1 и, следовательно, $r(H_1) < r(H)$. В силу индуктивного предположения найдется подгруппа $N_1 \in \Omega$ такая, что $H_1 \cap N_1 = 1$. Отсюда $H \cap (N \cap N_1) = H_1 \cap N_1 = 1$.

Доказательство отделимости будем вести индукцией по минимальной длине полициклического ряда подгруппы H .

В случае, когда $H = 1$, искомое утверждение следует из $\mathcal{L}$ -аппроксимируемости группы G . Поэтому будем считать, что H является расширением своей нормальной $\mathcal{L}$ -отделимой подгруппы H_1 при помощи циклической группы.

Предположим, что существует такой элемент $g \in G \setminus H$, что для всякой подгруппы $M \in \Omega$ выполнено $g \in HM$.

Выберем подгруппу $N \in \Omega$ таким образом, чтобы $H \cap N = 1$ и $g \notin H_1N$. Пусть также h – порождающий подгруппы H по модулю H_1 . Тогда для каждой подгруппы $M \in \Omega$ выполнено $h^{-m(M)}g \in H_1M$ для некоторого целого числа $m(M)$, отличного от нуля.

Если подгруппа $M \in \Omega$ лежит в N , то $h^{m(M)-m(N)} \in H_1N$, но $H \cap N = 1$, поэтому $h^{m(M)-m(N)} \in H_1$ и $h^{-m(N)}g \in H_1M$. Поскольку подгруппа H_1 $\mathcal{L}$ -отделима, отсюда следует, что $h^{-m(N)}g \in H_1$ и $g \in H$. Получаем противоречие с выбором элемента g . Предложение 1 доказано полностью.

3. Изоляторы в группах, аппроксимируемых конечными π -группами. Будем говорить, что порядок элемента g группы X по модулю некоторой подгруппы Y конечен и равен n , если $g^n \in Y$ и $g^m \notin Y$ для каждого m такого, что $0 < m < n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть группа X аппроксимируема конечными π -группами, Y – нильпотентная подгруппа группы X степени s . Тогда множество $\pi'\sqrt{Y}$ является нильпотентной подгруппой группы X степени s . Если подгруппа Y конечно порождена и порядки всех элементов из $\pi'\sqrt{Y}$ по модулю подгруппы Y ограничены в совокупности, то и подгруппа $\pi'\sqrt{Y}$ является конечно порожденной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будучи аппроксимируемой конечными π -группами, группа X вкладывается в декартово произведение семейства конечных π -групп X_i , $i \in I$. Обозначим через Y_i проекцию подгруппы Y на группу X_i .

Очевидно, что проекция π' -изолятора U подгруппы Y на каждую группу X_i совпадает с Y_i . Поэтому подгруппа U вкладывается в декартово произведение нильпотентных групп Y_i , каждая из которых имеет ступень не выше s , и, следовательно, сама является нильпотентной группой ступени s . Отсюда сразу же следует, что $U = \sqrt[s]{Y}$ [2].

Предположим теперь, что подгруппа Y конечно порождена и порядки всех элементов из U по модулю подгруппы Y ограничены в совокупности числом q (представляющим собой, очевидно, π' -число), но при этом подгруппа U не является конечно порожденной. Тогда найдется фактор $\xi_{i+1}(U)/\xi_i(U)$ верхнего центрального ряда группы U , не являющийся конечно порожденной группой.

Ввиду отсутствия π' -крючения в группе X подгруппа $\xi_i(U)$ π' -изолирована в U и фактор-группа $U/\xi_i(U)$ – это группа с однозначным извлечением π' -корней [2, лемма 4.7]. Поэтому отображение подгруппы $\xi_{i+1}(U)/\xi_i(U)$, переводящее элемент x в x^q , является вложением этой подгруппы в конечно порожденную нильпотентную группу $Y/\xi_i(U) \cap Y$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Приведем одно простое следствие предложения 2.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть X – некоторая группа, π – произвольное непустое множество простых чисел, $1 \leq s < \infty$, и пусть для любого числа $p \in \pi$ выполнены следующие условия:

- 1) группа X аппроксимируема конечными p -группами;
- 2) все p' -изолированные нильпотентные подгруппы группы X ступени не выше s p -отделимы.

Тогда все π' -изолированные нильпотентные подгруппы группы X ступени не выше s π -отделимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть Y – π' -изолированная нильпотентная подгруппа группы X ступени не выше s , $g \in X$ – произвольный элемент, не принадлежащий Y . Из предложения 2 следует, что для любого числа $p \in \pi$ множество $\sqrt[p]{Y}$ является нильпотентной подгруппой группы X , p' -изолированной, а значит, и p -отделимой. Если порядок g по модулю подгруппы Y конечен и равен n , то для любого простого делителя p числа n выполнено $g \notin \sqrt[p]{Y}$. Если же порядок g по модулю подгруппы Y бесконечен, то $g \notin \sqrt[p]{Y}$ для каждого числа $p \in \pi$.

Заметим, что в конечно порожденной нильпотентной группе без кручения для любого простого числа p каждая p' -изолированная подгруппа p -отделима [5]. Последнее утверждение позволяет распространить этот результат на случай произвольного множества простых чисел π . Впрочем, это можно сделать и непосредственно, модифицировав соответствующее рассуждение из [5].

4. Доказательство теоремы. Используя предложение 2, мы докажем утверждение, несколько более общее, чем то, что было сформулировано в теореме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{K}$ – класс групп без кручения, аппроксимируемых конечными π -группами, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, и пусть в любой группе из $\mathcal{K}$ для каждой $\mathcal{N}$ -подгруппы ступени не выше s , $1 \leq s < \infty$, множество π' -корней является π -отделимой $\mathcal{N}$ -подгруппой. Если группа G $\mathcal{K}$ -аппроксимируема, то и в G

для каждой $\mathcal{N}$ -подгруппы ступени не выше s множество π' -корней является π -отделимой $\mathcal{N}$ -подгруппой.

Пусть снова Ω обозначает семейство всех нормальных подгрупп группы G , факторгруппы по которым принадлежат классу $\mathcal{K}$, H – конечно порожденная нильпотентная подгруппа группы G ступени не выше s . В соответствии с условием для каждой подгруппы $M \in \Omega$ множество $\pi'\sqrt{HM/M}$ является конечно порожденной нильпотентной π -отделимой подгруппой группы G/M . Отсюда следует, в частности, что подгруппа HM/M имеет конечный индекс в $\pi'\sqrt{HM/M}$ [2].

В силу предложения 1 существует такая подгруппа $N \in \Omega$, что $H \cap N = 1$. Пусть также $k = [\pi'\sqrt{HN/N} : HN/N]$, q есть произведение всех π' -чисел, не превосходящих k . Покажем, что для каждой подгруппы $M \in \Omega$, лежащей в N , порядки элементов подгруппы $\pi'\sqrt{HM/M}$ по модулю HM/M не превосходят k .

Рассмотрим сначала произвольный элемент $h \in H$, порождающий в H π' -изолированную подгруппу. Из условия легко следует, что для каждой подгруппы $M \in \Omega$ π' -изолятор подгруппы $\langle hM \rangle$ в группе G/M снова будет циклической подгруппой.

Пусть $\langle uN \rangle$ – π' -изолятор в группе G/N подгруппы $\langle hN \rangle$. Тогда для некоторого π' -числа n выполнено равенство $(uN)^n = hN$, причем без ограничения общности можно считать, что $n > 0$. Так как $H \cap N = 1$, подгруппа $\langle hN \rangle$ π' -изолирована в HN/N , и потому число n является порядком uN по модулю подгруппы HN/N .

Если далее подгруппа $M \in \Omega$ лежит в N и $\langle vM \rangle$ – π' -изолятор подгруппы $\langle hM \rangle$ в группе G/M , $(vM)^m = hM$, то $(vN)^m = hN$ и, так как подгруппа $\langle uN \rangle$ π' -изолирована в G/N , $vN \in \langle uN \rangle$. Поскольку группа G/N без кручения, отсюда следует, что $m \mid n$.

Пусть теперь xM – произвольный элемент подгруппы $\pi'\sqrt{HM/M}$, и пусть для некоторого π' -числа r выполнено $(xM)^r \in HM/M$. Пусть также $\langle hM \rangle$ – π' -изолятор подгруппы $\langle (xM)^r \rangle$ в подгруппе HM/M , $\langle vM \rangle$ – π' -изолятор подгруппы $\langle hM \rangle$ в группе G/M .

Так как $H \cap M = 1$, подгруппа $\langle h \rangle$ π' -изолирована в H , и в силу доказанного выше $[\langle vM \rangle : \langle hM \rangle] \leq k$. Очевидно далее, что $xM \in \langle vM \rangle$, поэтому порядок элемента xM по модулю подгруппы $\langle hM \rangle \leq HM/M$ также не превосходит k .

Обозначим через Σ семейство всех нормальных подгрупп конечного π -индекса группы G и положим $K = \bigcap_{L \in \Sigma} HL$. Легко видеть, что подгруппа K является π -отделимой.

Пусть g – произвольный элемент из K . Тогда $g\varphi \in H\varphi$ при любом гомоморфизме φ группы G на конечную π -группу и, следовательно, $gM \in \pi'\sqrt{HM/M}$ для всякой подгруппы $M \in \Omega$. Из доказанного выше вытекает, что если M лежит в N , то $g^q \in HM$. Заметим теперь, что по предложению 1 подгруппа H $\mathcal{K}$ -отделима, поэтому $g^q \in H$ и $g \in \pi'\sqrt{H}$. Обратное включение $\pi'\sqrt{H} \subseteq K$ очевидно.

Таким образом, для любой $\mathcal{N}$ -подгруппы H ступени не выше s множество $\pi'\sqrt{H}$ является π -отделимой подгруппой в G . В частности, каждая π' -изолированная $\mathcal{N}$ -подгруппа группы G ступени не выше s π -отделима. Как было только что показано, порядки элементов $\pi'\sqrt{H}$ по модулю подгруппы H ограничены в совокупности. Из предложения 2 теперь следует, что множество $\pi'\sqrt{H}$ является конечно порожденной нильпотентной подгруппой в G . Предложение 3 доказано.

Автор выражает благодарность профессору Д. И. Молдавскому за ряд ценных советов и замечаний при написании этой статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Ученые записки Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
- [2] Холл Ф. Нильпотентные группы // Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей. № 1. М.: Мир, 1968. С. 3–36.
- [3] Baumslag G. On the residual nilpotence of certain one-relator groups // Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. № 5. P. 491–506.
- [4] Азаров Д. Н. О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 1. С. 3–8.
- [5] Логинова Е. Д. Фinitная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. матем. ж. 1999. Т. 40. № 2. С. 395–407.

Ивановский государственный университет
E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

Поступило
15.11.2001
Исправленный вариант
16.07.2002