Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Зеленова, Коммутативные подалгебры квантовых алгебр, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 2, 208–221

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm24>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 09:13:45

УДК 512.552

КОММУТАТИВНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ КВАНТОВЫХ АЛГЕБР

С. А. Зеленова

В настоящей работе доказывается общее утверждение о том, что в любой ассоциативной алгебре $\mathcal{A}$ без делителей нуля, обладающей нормой и согласованной с ней полунормой, степень трансцендентности произвольной коммутативной подалгебры не превышает максимального количества независимых попарно псевдокоммутирующих элементов некоторого базиса алгебры $\mathcal{A}$. Автором показано, что в качестве подобной алгебры $\mathcal{A}$ могут быть рассмотрены алгебры квантовых лорановских многочленов, квантовые аналоги алгебры Вейля, а также некоторые универсальные кодействующие алгебры. В случае алгебры $\mathcal{L}$ квантовых лорановских многочленов доказано, что степень трансцендентности максимальной коммутативной подалгебры алгебры $\mathcal{L}$ совпадает с максимальным количеством независимых попарно коммутирующих элементов мономиального базиса алгебры $\mathcal{L}$.

Библиография: 8 названий.

Введение

В настоящей работе изучаются коммутативные подалгебры некоторых квантовых алгебр.

Напомним, что в работе [1] показано, что в теле частных $k_q(X, Y)$ алгебры квантовых многочленов $\Lambda = k_q[X, Y]$ централизатор любого элемента, отличного от константы, коммутативен и потому является максимальным подполем в $k_q(X, Y)$. Идея доказательства восходит к [2]. В статье [3] эта ситуация обобщена на случай трех и более переменных в предположении, что поле k имеет нулевую характеристику. В работе [4] ограничение на характеристику снимается и предлагается более простое доказательство. Кроме того, в той же работе показано, что в алгебре квантовых многочленов размерность Крулля любой коммутативной подалгебры не выше 1, и построена коммутативная подалгебра, не являющаяся чисто трансцендентным расширением k .

В работах [1], [3] поставлен вопрос об описании подполей в теле частных алгебры общих квантовых многочленов.

В настоящей работе доказывается общее утверждение о том, что в любой ассоциативной алгебре $\mathcal{A}$ без делителей нуля, обладающей нормой и согласованной с ней полунормой, степень трансцендентности произвольной коммутативной подалгебры не превышает максимального количества независимых попарно псевдокоммутирующих элементов некоторого базиса алгебры $\mathcal{A}$.

Автором показано, что в качестве подобной алгебры $\mathcal{A}$ могут быть рассмотрены алгебры квантовых лорановских многочленов, квантовые аналоги алгебры Вейля (см. [5]), а также некоторые универсальные кодействующие алгебры (см. [6]).

В случае алгебры $\mathcal{L}$ квантовых лорановских многочленов доказано, что степень трансцендентности максимальной коммутативной подалгебры алгебры $\mathcal{L}$ совпадает с максимальным количеством независимых попарно коммутирующих элементов мономиального базиса алгебры $\mathcal{L}$.

Рассматриваемые в настоящей работе алгебры представляют большой интерес с точки зрения некоммутативной алгебраической геометрии и теории квантовых групп. Общие вопросы, связанные с квантовыми алгебрами, изучаются в монографии [7].

Автор выражает искреннюю благодарность В. А. Артамонову за постановку задачи и руководство работой.

1. Предварительные сведения

Вначале дадим несколько вспомогательных определений.

Через $\sigma(\mathbf{v})$ будем обозначать сумму элементов целочисленного кортежа $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Рассмотрим отношение порядка $\succ$ на множестве $\mathbb{Z}^n$. Положим

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \succ (v_1, \dots, v_n) = \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n,$$

если выполнено одно из условий

- 1) $\sigma(\mathbf{u}) > \sigma(\mathbf{v})$;
- 2) $\sigma(\mathbf{u}) = \sigma(\mathbf{v})$ и существует такое $j \in \{1, \dots, n\}$, что $u_i = v_i$ для всех $i = 1, \dots, j-1$ и $u_j > v_j$.

Иными словами, кортежи из $\mathbb{Z}^n$ сначала сравниваются по сумме своих координат, а в случае равенства таких сумм порядок $\succ$ совпадает с лексикографическим.

ЛЕММА 1.2. Введенный порядок обладает следующими свойствами:

- 1) $\mathbf{u} + \mathbf{t} \succ \mathbf{u}$, если $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{N}_0^n$;
- 2) $\mathbf{u} + \mathbf{t} \succ \mathbf{v} + \mathbf{t}$, если $\mathbf{u} \succ \mathbf{v}$ для всех $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^n$;
- 3) в $\mathbb{N}_0^n$ не существует бесконечной убывающей относительно $\prec$ цепочки (здесь $\mathbb{N}_0$ обозначает множество неотрицательных целых чисел);
- 4) зафиксируем элемент $\mathbf{d} \in \mathbb{N}_0^n$; пусть подмножество $M \subset \mathbb{N}_0^n$ таково, что $\mathbf{v} \preceq \mathbf{d}$ для всех $\mathbf{v} \in M$; тогда M конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1) и 2) проверяются непосредственно.

3) Элементов $\mathbb{N}_0^n$ с одинаковой фиксированной суммой координат конечное число, поэтому любой элемент $\mathbb{N}_0^n$ имеет конечное число меньших.

4) Будем доказывать искомое утверждение индукцией по n . При $n = 1$ оно очевидно.

Пусть наше утверждение доказано для всех натуральных чисел меньших n . Фиксируем первую координату v_1 кортежа $\mathbf{v}$. Поскольку $\mathbf{v} \preceq \mathbf{d}$, то $\sigma(\mathbf{v}) \preceq \sigma(\mathbf{d})$. Поэтому $(v_2, \dots, v_n) \prec (d_1 + d_2 + 1, d_3, \dots, d_n)$. По предположению индукции таких кортежей $(v_2, \dots, v_n)$ конечное число. Теперь заметим, что на первую координату кортежа $\mathbf{v}$ накладывается условие $0 \leq v_1 \leq \sigma(\mathbf{v}) \leq \sigma(\mathbf{d})$, т.е. вариантов для v_1 также конечное число.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Абсолютным значением* кортежа $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ назовем кортеж из абсолютных значений элементов $\mathbf{z}$:

$$|(z_1, \dots, z_n)| = (|z_1|, \dots, |z_n|).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4. *Для произвольных кортежей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ выполняется неравенство $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \preceq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольных вещественных чисел x, y имеем $|x+y| \leq |x| + |y|$. Поэтому

$$\sigma(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|) = \sum_{i=1}^n |u_i + v_i| \leq \sum_{i=1}^n |u_i| + |v_i| = \sigma(|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|).$$

Равенство выполняется только тогда, когда для всех $i = 1, \dots, n$ выполнены равенства $|u_i + v_i| = |u_i| + |v_i|$, т.е. когда кортежи $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$ и $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ равны.

Теперь утверждение очевидно.

ЛЕММА 1.5. *Зафиксируем элемент $\mathbf{d} \in \mathbb{N}_0^n$. Пусть подмножество $M \subset \mathbb{Z}^n$ таково, что $|\mathbf{v}| \preceq \mathbf{d}$ для всех $\mathbf{v} \in M$. Тогда M конечно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из пункта 4) леммы 1.2 и того, что для заданного $\mathbf{t} \in \mathbb{N}_0^n$ количество элементов $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $|\mathbf{v}| = \mathbf{t}$, конечно.

2. Теорема об алгебраической зависимости

Пусть k – основное поле и пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра без делителей нуля над этим полем.

Предположим, что существует отображение η алгебры $\mathcal{A}$ в множество $\mathbb{Z}^n$, удовлетворяющее следующим соотношениям:

N1) $\eta(\alpha f) = \eta(f)$ для всех ненулевых $f \in \mathcal{A}$ и $\alpha \in k^*$;

N2) $\eta(f + g) \preceq \max\{\eta(f), \eta(g)\}$ для всех ненулевых $f, g \in \mathcal{A}$;

N3) $\eta(fg) = \eta(f) + \eta(g)$ для всех ненулевых $f, g \in \mathcal{A}$.

Кроме того, предположим, что существует базис $\mathfrak{B} = \{b_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ алгебры $\mathcal{A}$, рассматриваемой как векторное пространство, такой, что выполнены следующие условия:

N4) $\eta(b_i) \neq \eta(b_j)$ для любых $b_i \neq b_j$, $b_i, b_j \in \mathfrak{B}$;

N5) если $f = \sum_{s=1}^{r_f} \alpha_s b_s$ разложение произвольного элемента $f \in \mathcal{A}$ по базису $\mathfrak{B}$, то

$$\eta(f) = \max_{s=1, \dots, r_f} \eta(b_s),$$

здесь максимум берется относительно порядка $\prec$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем называть $\eta(f)$ *нормой* элемента f .

Из свойств N1)–N5) нормы сразу вытекает следующее простое утверждение.

ЛЕММА 2.2. *Если $\eta(f) = \eta(g) = \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^n$, то существуют ненулевые $\alpha, \beta \in k$ такие, что $\eta(\alpha f + \beta g) \prec \mathbf{t}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойства N4) разложение произвольного элемента h алгебры $\mathcal{A}$ по базису $\mathfrak{B}$ содержит единственный элемент базиса, норма которого совпадает с нормой самого h . Поскольку нормы f и g равны, то такой элемент базиса у них общий. Обозначим его через b . Тогда $f = \beta b + f'$, $g = \alpha b + g'$, где $\eta(f') \prec \eta(f) = \mathbf{t}$, $\eta(g') \prec \eta(g) = \mathbf{t}$, а α, β – ненулевые элементы поля k . Для линейной комбинации $\alpha f - \beta g$ по свойству N2) имеем

$$\eta(\alpha f - \beta g) = \eta(\alpha \beta b + f' - \beta \alpha b + g') = \eta(f' - g') \preceq \max\{\eta(f'), \eta(g')\} \prec \mathbf{t},$$

что и требовалось.

Пусть f – произвольный ненулевой элемент $\mathcal{A}$, и пусть $f = \sum_{s=1}^{r_f} \alpha_s b_s$ – его разложение в базисе $\mathfrak{B}$. Определим отображение ρ алгебры $\mathcal{A}$ в множество $\mathbb{N}_0^n$, связанное с нормой η . По определению

$$\rho(f) = \max_{s=1, \dots, r_f} |\eta(b_s)|.$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства этого отображения.

ЛЕММА 2.3. *Отображение ρ обладает следующими свойствами:*

- 1) $\rho(\alpha f) = \rho(f)$ для всех ненулевых $f \in \mathcal{A}$ и $\alpha \in k^*$;
- 2) $\rho(f + g) \preceq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$ для всех ненулевых $f, g \in \mathcal{A}$, причем строгое неравенство возможно только при $\rho(f) = \rho(g)$;
- 3) если $f = \sum_{s=1}^{r_f} \alpha_s b_s$ в базисе $\mathfrak{B}$, то

$$\rho(f) = \max_{s=1, \dots, r_f} \rho(b_s),$$

здесь максимум берется относительно порядка $\prec$;

- 4) $|\eta(f)| \preceq \rho(f)$ для любого ненулевого $f \in \mathcal{A}$;
- 5) если M – подмножество алгебры $\mathcal{A}$ и $\rho(f) \preceq \mathbf{d}$ для всех $f \in M$ и фиксированного $\mathbf{d} \in \mathbb{N}_0^n$, то множество норм элементов M конечно;
- 6) множество элементов базиса $\mathfrak{B}$ с фиксированной полунормой конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1), 2) непосредственно следуют из определения.

3) Из определения отображения ρ следует, что $\rho(b) = |\eta(b)|$ для любого $b \in \mathfrak{B}$. Отсюда $\rho(f) = \max_{s=1, \dots, r_f} |\eta(b_s)| = \max_{s=1, \dots, r_f} \rho(b_s)$.

4) Имеем $|\eta(f)| = |\max_{s=1, \dots, r_f} \eta(b_s)| \preceq \max_{s=1, \dots, r_f} |\eta(b_s)| = \rho(f)$.

5) Из 4) получаем $|\eta(f)| \preceq \rho(f) \preceq \mathbf{d}$ для всех $f \in M$. Для доказательства утверждения теперь достаточно использовать лемму 1.5.

6) Утверждение следует из 5) и свойства N4) нормы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Будем называть отображение ρ *полунормой*, согласованной с нормой η , если оно удовлетворяет свойству

$$\rho(fg) \preceq \rho(f) + \rho(g) \quad \text{для всех ненулевых } f, g \in \mathcal{A}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\mathcal{A}$ – некоторая ассоциативная алгебра без делителей нуля, обладающая нормой η и согласованной с ней полунормой ρ .

Рассмотрим произвольную подалгебру $\mathcal{P}$ алгебры $\mathcal{A}$.

Разобьем $\mathcal{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества следующим образом. Пусть $\mathbf{t} \in \mathbb{N}_0^n$. Через $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}$ обозначим множество всех тех элементов $\mathcal{P}$, полунорма которых равна $\mathbf{t}$.

Обозначим через $\nu_{\mathbf{t}}(p)$ проекцию элемента p на конечномерное векторное пространство, порожденное элементами $\{b \in \mathfrak{B} \mid \rho(b) = \mathbf{t}\}$.

Поскольку образ проекции $\nu_{\mathbf{t}}(\mathcal{P})$ является конечномерным векторным пространством, в нем можно выбрать конечный базис.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^r$ – произвольный базис пространства $\nu_{\mathbf{t}}(\mathcal{P})$. Всякую систему $\{h_i\}_{i=1}^r$, где $h_i \in \nu_{\mathbf{t}}^{-1}(e_i)$, будем называть *базой* подмножества $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.6. *Существует база $\{h_i\}_{i=1}^r$ множества $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}$, обладающая следующими свойствами:*

- (*) *нормы h_i различны;*
- (**) *$\eta(h_i) \preceq \eta(h)$ для всякого $h \in \nu_{\mathbf{t}}^{-1}(\nu_{\mathbf{t}}(h_i))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{h_i^0\}_{i=1}^r$ – произвольная база множества $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}$. В силу утверждения 5 леммы 2.3 множество норм элементов $\nu_{\mathbf{t}}^{-1}(\nu_{\mathbf{t}}(h_i^0))$ конечно, т.е. мы можем выбрать в $\nu_{\mathbf{t}}^{-1}(\nu_{\mathbf{t}}(h_i^0))$ элемент с минимальной нормой. Поэтому мы можем считать, что база $\{h_i^0\}_{i=1}^r$ удовлетворяет свойству (**).

Пусть эта база упорядочена по возрастанию норм, т.е. $\eta(h_i^0) \preceq \eta(h_{i+1}^0)$ для всех $i = 1, \dots, r-1$.

Предположим, что $\eta(h_{r-1}^0) = \eta(h_r^0)$. Тогда по лемме 2.2 найдутся такие ненулевые коэффициенты $\beta_1, \beta_2 \in k$, что

$$\eta(\beta_1 h_{r-1}^0 + \beta_2 h_r^0) \prec \eta(h_r^0).$$

Положим

$$h'_{r-1} = \beta_1 h_{r-1}^0 + \beta_2 h_r^0, \quad h'_i = h_i^0 \quad \text{при } i \neq r-1.$$

Очевидно, система $\{h'_i\}_{i=1}^r$ останется базой.

Далее, как и ранее, мы можем преобразовать эту базу в базу, удовлетворяющую свойству (**). Переупорядочим элементы новой базы так, чтобы нормы их не убывали при возрастании индексов. Повторяя предыдущие рассуждения, приходим к системе $\{h_i\}_{i=1}^r$, в которой $\eta(h_{r-1}) \prec \eta(h_r)$.

Теперь перейдем к системе $\{h_i\}_{i=1}^{r-1}$. Если $\eta(h_{r-2}) \prec \eta(h_{r-1})$, то переходим к системе $\{h_i\}_{i=1}^{r-2}$. Если же нормы h_{r-1} и h_{r-2} равны, то, делая необходимые замены элементов, приходим к системе, в которой $\eta(h_{r-2}) \prec \eta(h_{r-1})$, и т.д.

Для каждого $\mathbf{t} \in \mathbb{N}_0^n$ зафиксируем базу $\{h_i^{\mathbf{t}}\}_{i=1}^{r_{\mathbf{t}}}$ множества $\mathcal{P}_{\mathbf{t}}$, удовлетворяющую условиям предыдущего утверждения. Пусть $\{h_i^{\mathbf{t}_1}\}_{i=1}^{r_{\mathbf{t}_1}}, \{h_i^{\mathbf{t}_2}\}_{i=1}^{r_{\mathbf{t}_2}}$ – две такие базы, причем $\mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2$.

ЛЕММА 2.7. *При любых $i = 1, \dots, r_{\mathbf{t}_1}$, $j = 1, \dots, r_{\mathbf{t}_2}$ нормы элементов $h_i^{\mathbf{t}_1}$ и $h_j^{\mathbf{t}_2}$ различны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторых i, j нормы элементов $h_i^{t_1}, h_j^{t_2}$ равны. Пусть для определенности $t_1 \prec t_2$. Тогда по лемме 2.2 существует такое ненулевое $\beta \in k$, что $\eta(\beta h_i^{t_1} + h_j^{t_2}) \prec \eta(h_j^{t_2})$.

Элемент $h = \beta h_i^{t_1} + h_j^{t_2}$ лежит в $\mathcal{P}_{t_2}$. В самом деле, в силу утверждения 2 леммы 2.3 выполняется равенство $\rho(h) = \rho(\beta h_i^{t_1} + h_j^{t_2}) = \rho(h_j^{t_2}) = t_2$, поскольку $\rho(h_i^{t_1}) = t_1 \prec t_2 = \rho(h_j^{t_2})$.

Кроме того, $\nu_{t_2}(h) = \nu_{t_2}(h_j^{t_2})$, т.е. свойство $(**)$ в базисе $\{h_i^{t_2}\}_{i=1}^{r_{t_2}}$ не выполнено, что неверно.

Совокупность баз $\{h_i^{t_1}\}_{i=1}^{r_{t_1}}$ для всех $t \in \mathbb{N}_0^n$ назовем *базой множества $\mathcal{P}$* . Будем обозначать эту совокупность $\mathcal{B}$. Предыдущая лемма, таким образом, утверждает, что все элементы базы $\mathcal{B}$ имеют различные нормы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.8. *Всякий элемент из $\mathcal{P}$ может быть представлен в виде линейной комбинации элементов базы $\mathcal{B}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный элемент p множества $\mathcal{P}$. Будем вести доказательство индукцией по полунорме p .

Пусть $\rho(p) = t$. По предположению индукции все элементы $\mathcal{P}$ с полунормой, меньшей t , представимы в виде линейной комбинации элементов базы $\mathcal{B}$.

Поскольку система $\{h_i^{t_1}\}_{i=1}^{r_{t_1}}$ является базой для $\mathcal{P}_t$, то

$$\nu_t(p) = \sum_{i=1}^{r_t} \alpha_i \nu_t(h_i^{t_1}) = \nu_t\left(\sum_{i=1}^{r_t} \alpha_i h_i^{t_1}\right).$$

Поэтому $\rho(p - \sum_{i=1}^{r_t} \alpha_i h_i^{t_1}) \prec \rho(p)$. Используя индуктивное предположение, получаем искомый результат.

Утверждение 2.8 и то свойство, что нормы различных элементов базы $\mathcal{B}$ различны, дают такое простое

СЛЕДСТВИЕ 2.9. *Норма всякого элемента $\mathcal{P}$ совпадает с нормой некоторого элемента базы $\mathcal{B}$.*

Обозначим через $\mathcal{N}$ множество всех норм элементов $\mathcal{P}$. В силу следствия 2.9 и того, что $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{N}$ совпадает с множеством всех норм элементов базы $\mathcal{B}$.

Пусть множество $\mathcal{N}$ порождает модуль $\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^n$ ранга m .

ТЕОРЕМА 2.10. *Всякая система из $m+1$ элементов $p_1, \dots, p_{m+1} \in \mathcal{P}$ алгебраически зависима. Именно, существует многочлен $F(x_1, \dots, x_{m+1}) \in k[x_1, \dots, x_{m+1}]$ такой, что $F(p_1, \dots, p_{m+1}) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного $\mathbf{d} \in \mathbb{N}_0^n$ рассмотрим множество $\psi_{\mathbf{d}}$ всевозможных произведений $\pi = p_1^{l_1} \dots p_{m+1}^{l_{m+1}}$ с неотрицательными степенями l_i , удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{m+1} l_i \rho(p_i) \preceq \mathbf{d}.$$

Множество $\psi_{\mathbf{d}}$ лежит в $\mathcal{P}$, поэтому всякий его элемент может быть представлен в виде некоторой линейной комбинации элементов базы $\mathcal{B}$:

$$\pi = \sum_{\substack{|\eta(h)| \leq \rho(\pi), \\ h \in \mathcal{B}}} \beta_h h.$$

Рассмотрим множество $\phi_{\mathbf{d}}$ всех элементов $h \in \mathcal{B}$, входящих в линейное разложение какого-либо элемента $\pi \in \psi_{\mathbf{d}}$.

Если $h \in \phi_{\mathbf{d}}$, то

$$|\eta(h)| \leq \rho(\pi) \leq \sum_{i=1}^{m+1} l_i \rho(p_i) \leq \mathbf{d}.$$

Заметим, что мощность пересечения модуля $\mathcal{M}$ с множеством элементов $\mathbb{Z}^n$, абсолютные значения которых ограничены сверху элементом $\mathbf{d}$, ограничивается сверху значениями многочлена m -й степени от $\sigma(\mathbf{d})$. Поскольку $\eta(\phi_{\mathbf{d}})$ является подмножеством этого пересечения, и нормы всех элементов $\phi_{\mathbf{d}}$ различны, то

$$\text{card } \phi_{\mathbf{d}} = \text{card } \eta(\phi_{\mathbf{d}}) \leq P_m(\sigma(\mathbf{d})),$$

где $P_m(x)$ – многочлен m -й степени от x с действительными коэффициентами.

Теперь оценим снизу мощность $\psi_{\mathbf{d}_s}$, где $\mathbf{d}_s = s \sum_{i=1}^{m+1} \rho(p_i)$. Все кортежи $(l_1, \dots, l_{m+1}) \in \mathbb{N}_0^{m+1}$, у которых $l_i \leq s$ для любого $i = 1, \dots, m+1$, удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{m+1} l_i \rho(p_i) \leq \mathbf{d}$. Количество таких кортежей

$$s^{m+1} = \left(\frac{\sigma(\mathbf{d}_s)}{\sum_{i=1}^{m+1} \sigma(\rho(p_i))} \right)^{m+1} = P_{m+1}(\sigma(\mathbf{d}_s)),$$

т.е. мощность множества $\psi_{\mathbf{d}_s}$ ограничена снизу значениями многочлена $(m+1)$ -й степени от $\sigma(\mathbf{d}_s)$:

$$\text{card } \psi_{\mathbf{d}_s} \geq P_{m+1}(\sigma(\mathbf{d}_s)),$$

где $P_{m+1}(x)$ – многочлен $(m+1)$ -й степени от x с действительными коэффициентами.

Поэтому, для некоторого $\mathbf{d}_s$ выполняется оценка

$$\text{card } \phi_{\mathbf{d}_s} \leq P_m(\sigma(\mathbf{d}_s)) < P_{m+1}(\sigma(\mathbf{d}_s)) \leq \text{card } \psi_{\mathbf{d}_s}.$$

Это означает, что элементы множества $\psi_{\mathbf{d}_s}$ линейно зависимы, поскольку являются линейными комбинациями символов $h \in \phi_{\mathbf{d}_s}$ в количестве, меньшем мощности $\psi_{\mathbf{d}_s}$.

Итак, мы нашли равную нулю линейную комбинацию произведений элементов $p_1, \dots, p_{m+1}$ вида $p_1^{l_1} \dots p_{m+1}^{l_{m+1}}$, где степени l_i неотрицательны, что и требовалось.

Пусть заданы попарно коммутирующие, алгебраически независимые элементы $g_1, \dots, g_m$ алгебры $\mathcal{A}$.

Рассмотрим множество

$$\mathcal{P} = \{p(g_1, g_2, \dots, g_m) \mid p \in k[x_1, x_2, \dots, x_m], m \in \mathbb{N}_0\}$$

полиномов от этих элементов.

Это множество, очевидно, является подалгеброй $\mathcal{A}$. Поэтому к нему применима теорема 2.10.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.11. *Существует система $p_1, \dots, p_m$ многочленов от g_i , $i = 1, \dots, t$, нормы которых образуют линейно независимую систему.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2.10 и алгебраической независимости элементов $g_1, \dots, g_t$ следует, что ранг модуля $\mathcal{M}$, порожденного нормами элементов $\mathcal{P}$, не может быть меньше t . То есть существует искомая система многочленов $p_1, \dots, p_m$, нормы которых образуют линейно независимую систему.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. Пусть элементы b_1, b_2 базиса $\mathfrak{B}$ таковы, что $\eta([b_1, b_2]) \prec \eta(b_1) + \eta(b_2)$. Будем называть базисные элементы, обладающие указанным свойством, *псевдокоммутирующими*.

ЛЕММА 2.13. Пусть два элемента $f, g \in \mathcal{A}$ с нормами $\eta(f) = t_1$ и $\eta(g) = t_2$ коммутируют между собой. Тогда базисные элементы b_1, b_2 такие, что $\eta(b_1) = t_1$ и $\eta(b_2) = t_2$, являются псевдокоммутирующими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = f' + \alpha b_1, g = g' + \beta b_2$, где $\eta(f') \prec \eta(f)$ и $\eta(g') \prec \eta(g)$. По условию $fg = (f' + \alpha b_1)(g' + \beta b_2) = (g' + \beta b_2)(f' + \alpha b_1) = gf$, т.е. $\alpha\beta(b_1b_2 - b_2b_1) = [g', f'] + [g', \alpha b_1] + [\beta b_2, f']$. Из свойств N1)–N3) нормы получаем

$$\eta([b_1, b_2]) = \eta([g', f'] + [g', \alpha b_1] + [\beta b_2, f']) \prec \eta(f) + \eta(g) = \eta(b_1) + \eta(b_2).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.14. Элементы базиса $\mathfrak{B}$, имеющие линейно независимые нормы, будем называть *независимыми*.

ТЕОРЕМА 2.15. *Максимальное количество N алгебраически независимых коммутирующих друг с другом элементов алгебры $\mathcal{A}$ не превышает максимального количества M независимых, псевдокоммутирующих друг с другом элементов базиса $\mathfrak{B}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_1, \dots, g_N$ – максимальная алгебраически независимая система коммутирующих элементов алгебры $\mathcal{A}$.

По утверждению 2.11 существует система $p_1, \dots, p_N$ многочленов от элементов $g_1, \dots, g_N$ такая, что нормы $p_1, \dots, p_N$ линейно независимы.

Многочлены $p_1, \dots, p_N$ попарно коммутируют, так как $g_1, \dots, g_N$ система коммутирующих элементов. Поэтому базисные элементы $b_1, \dots, b_N$, где $\eta(b_1) = \eta(p_1), \dots, \eta(b_N) = \eta(p_N)$, по лемме 2.13 являются попарно псевдокоммутирующими и имеют линейно независимые нормы.

3. Примеры

Алгебра квантовых лорановских многочленов. Пусть задана матрица $Q = (q_{ij}) \in \text{Mat}(n, k^*)$, где $n \geq 2$, со следующими свойствами: $q_{ii} = 1$, $q_{ij} = q_{ji}^{-1}$.

Алгеброй квантовых лорановских многочленов над полем k будем называть ассоциативную алгебру

$$\mathcal{L} = k_Q[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$$

над k , порожденную $2n$ элементами $X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}$, с определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} X_i X_i^{-1} &= X_i^{-1} X_i = 1, & 1 \leq i \leq n, \\ X_i X_j &= q_{ij} X_j X_i, & 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

Из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{L}$ видно, что всякий элемент $X_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots X_{i_r}^{\varepsilon_r}$, где все $\varepsilon_i = \pm 1$, однозначно представим в виде $\alpha X_1^{t_1} \dots X_n^{t_n}$ при некоторых целых $t_1, \dots, t_n$ и $\alpha \in k^*$. Поэтому всякий элемент f алгебры $\mathcal{L}$ однозначно представляется в виде линейной комбинации элементов вида $X_1^{t_1} \dots X_n^{t_n}$, т.е. множество $\{X_1^{t_1} \dots X_n^{t_n} \mid (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n\}$ является базисом алгебры $\mathcal{L}$. В дальнейшем, элементы этого базиса будем называть *мономами* и для краткости писать $X^{\mathbf{t}}$ вместо $X_1^{t_1} \dots X_n^{t_n}$. Кортеж $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ будем называть *степенью* монома $X^{\mathbf{t}}$.

Введем нормирование на $\mathcal{L}$, связанное с порядком $\succ$. Для ненулевого многочлена f норма $\|f\|_{\mathcal{L}}$ – это кортеж из $\mathbb{Z}^n$, являющийся максимальным (относительно $\succ$) в множестве степеней мономов, входящих в f .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Нормирование $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ обладает следующими свойствами:*

- 1) $\|fg\|_{\mathcal{L}} = \|f\|_{\mathcal{L}} + \|g\|_{\mathcal{L}}$,
- 2) $\|f + g\|_{\mathcal{L}} \preceq \max\{\|f\|_{\mathcal{L}}, \|g\|_{\mathcal{L}}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Любой моном из разложения fg является произведением монома m_1 из разложения f и монома m_2 из разложения g . Поэтому степень монома из разложения fg – это сумма степеней $\|m_1\|_{\mathcal{L}} = \mathbf{t}_1$ и $\|m_2\|_{\mathcal{L}} = \mathbf{t}_2$. В силу свойств 1), 2) порядка $\succ$ моном максимальной степени из разложения fg – это произведение монома максимальной степени из разложения f и монома максимальной степени из разложения g .

2) Мономы, входящие в разложение суммы $f + g$ – это либо мономы из разложения f , либо из разложения g .

Из утверждения 3.1 и определения нормирования $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ ясно, что оно удовлетворяет всем свойствам нормы η из предыдущего раздела, если в качестве базиса $\mathfrak{B}$ выбрать мономиальный базис.

Поэтому мы можем определить для $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ соответствующее отображение $\rho_{\mathcal{L}}$. Для ненулевого многочлена f значение отображения $\rho_{\mathcal{L}}$ – это кортеж из $\mathbb{N}_0^n$, являющийся максимальным (относительно $\succ$) в множестве абсолютных значений степеней мономов, входящих в f .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Отображение $\rho_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет условию*

$$\rho_{\mathcal{L}}(fg) \preceq \rho_{\mathcal{L}}(f) + \rho_{\mathcal{L}}(g),$$

т.е. является полунормой, согласованной с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любым моном из fg является произведением монома m_1 из f и монома m_2 из g . Поэтому степень монома из fg – это сумма степеней $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$. По утверждению 1.4 имеет место оценка $|\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2| \preceq |\mathbf{t}_1| + |\mathbf{t}_2|$. Поэтому

$$\max_{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2} \{|\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2|\} \preceq \max_{\mathbf{t}_1} \{|\mathbf{t}_1|\} + \max_{\mathbf{t}_2} \{|\mathbf{t}_2|\}.$$

Итак, алгебра $\mathcal{L}$ удовлетворяет всем требованиям раздела 2, т.е. для нее выполнена теорема 2.10.

ЛЕММА 3.3. *Псевдокоммутирующие мономы $X^{\mathbf{t}_1}, X^{\mathbf{t}_2}$ коммутируют друг с другом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\|[X^{\mathbf{t}_1}, X^{\mathbf{t}_2}]\|_{\mathcal{L}} \prec \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$. Поскольку $X^{\mathbf{t}_1} X^{\mathbf{t}_2} = \alpha X^{\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2}$ и $X^{\mathbf{t}_2} X^{\mathbf{t}_1} = \beta X^{\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2}$, для коммутанта получаем $[X^{\mathbf{t}_1}, X^{\mathbf{t}_2}] = (\alpha - \beta) X^{\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2}$, откуда $\alpha - \beta = 0$, т.е. $[X^{\mathbf{t}_1}, X^{\mathbf{t}_2}] = 0$.

В силу леммы 3.3 теорема 2.15 в случае алгебры $\mathcal{L}$ принимает следующий вид.

ТЕОРЕМА 3.4. *Максимальное количество N алгебраически независимых коммутирующих друг с другом элементов алгебры $\mathcal{L}$ совпадает с максимальным количеством M независимых коммутирующих друг с другом мономов из $\mathcal{L}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $N \geq M$. С другой стороны, по теореме 2.15 $N \leq M$, поскольку по лемме 3.3 всякая система псевдокоммутирующих мономов является системой коммутирующих мономов.

ЛЕММА 3.5. *Попарно коммутирующие мономы, имеющие линейно независимые нормы, алгебраически независимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть мономы $X^{\mathbf{d}_1}, \dots, X^{\mathbf{d}_r}$ удовлетворяют условию леммы.

Если бы существовал такой многочлен $F(x_1, \dots, x_r) \in k[x_1, \dots, x_r]$, что $F(X^{\mathbf{d}_1}, \dots, X^{\mathbf{d}_r}) = 0$, то произведения вида $(X^{\mathbf{d}_1})^{i_1} \dots (X^{\mathbf{d}_r})^{i_r}$, входящие в выражение $F(X^{\mathbf{d}_1}, \dots, X^{\mathbf{d}_r})$ должны были бы сокращаться друг с другом. Но равенство

$$(X^{\mathbf{d}_1})^{i_1} \dots (X^{\mathbf{d}_r})^{i_r} = (X^{\mathbf{d}_1})^{j_1} \dots (X^{\mathbf{d}_r})^{j_r}$$

в силу линейной независимости $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_r$ равносильно равенству $(i_1, \dots, i_r) = (j_1, \dots, j_r)$, поэтому многочлен F должен быть тождественным нулем.

В силу леммы 3.5 теорему 3.4 можно переформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.6. *Максимальное количество N алгебраически независимых коммутирующих друг с другом многочленов из кольца $\mathcal{L}$ совпадает с максимальным количеством M алгебраически независимых коммутирующих друг с другом мономов из $\mathcal{L}$.*

Бруксом в работе [8] показано, что мощность максимальной системы независимых попарно коммутирующих элементов мономиального базиса алгебры $\mathcal{L}$ совпадает с размерностью Крулля этой алгебры. Из этого результата и предыдущей теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.7. *Максимальное количество N алгебраически независимых коммутирующих друг с другом многочленов из алгебры $\mathcal{L}$ совпадает с размерностью Крулля этой алгебры.*

Квантовые многочлены, квантовый аналог алгебр Вейля и универсальные кодействующие. Еще один пример алгебры, обладающей нормой и согласованной с ней полунормой, дает следующая конструкция.

Пусть матрица $Q = (q_{ij}) \in \text{Mat}(n, k^*)$ такая же, как в предыдущем пункте.

Рассмотрим ассоциативную алгебру $\mathfrak{A}_n^{Q, \alpha}$ над полем k с порождающими $X_1, \dots, X_n$ и со следующими определяющими соотношениями:

$$X_i X_j = q_{ij} X_j X_i + \sum_{\mathbf{t} \prec \delta(X_i X_j)} \alpha_{\mathbf{t}}^{ij} X^{\mathbf{t}}, \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (1)$$

Здесь, как и раньше, символ $X^{\mathbf{t}}$ означает произведение $X_1^{t_1} \dots X_n^{t_n}$, причем $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{N}_0^n$, а $\delta(X^{\mathbf{t}})$ равно $\mathbf{t}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. Пусть $X_{i_1} \dots X_{i_r}$ – некоторое произведение образующих $X_1, \dots, X_n$. Если переставить символы в последовательности $X_{i_1} \dots X_{i_r}$ так, чтобы индексы не убывали, мы получим некоторый моном $X^{\mathbf{t}}$. Кортеж $\mathbf{t}$ будем называть *степенью* произведения $X_{i_1} \dots X_{i_r}$.

Таким образом, использованное в определении алгебры $\mathfrak{A}_n^{Q, \alpha}$ отображение δ сопоставляет моному $X^{\mathbf{t}}$ его степень $\mathbf{t}$.

ЛЕММА 3.9. *Всякое произведение $X_{i_1} \dots X_{i_r}$ в алгебре $\mathfrak{A}_n^{Q, \alpha}$ представимо в виде*

$$X_{i_1} \dots X_{i_r} = \gamma X^{\mathbf{t}} + \sum_{\mathbf{d} \prec \mathbf{t}} \beta_{\mathbf{d}} X^{\mathbf{d}}, \quad \gamma \in k^*, \quad \beta_{\mathbf{d}} \in k,$$

где $X^{\mathbf{t}}$ – моном, получающийся из произведения $X_{i_1} \dots X_{i_r}$ перестановкой порождающих X_i в порядке неубывания индексов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому произведению $X_{i_1} \dots X_{i_r}$ мы можем сопоставить его степень $\mathbf{t}$ указанным выше способом. Кроме того, мы можем сопоставить этому произведению количество “беспорядков”, т.е. пар индексов (i_{j_1}, i_{j_2}) , $1 \leq j_1, j_2 \leq r$, для которых $i_{j_1} > i_{j_2}$, но $j_1 < j_2$.

Для произведений, где $r = 2$, требуемые соотношения – это просто определяющие соотношения алгебры $\mathfrak{A}_n^{Q, \alpha}$.

Рассмотрим произвольное произведение $\chi = X_{i_1} \dots X_{i_r}$. Предположим, что утверждение леммы доказано для произведений, у которых степень меньше (относительно порядка $\prec$) степени χ , и для произведений, у которых степень равна степени χ , но количество беспорядков меньше, чем у χ .

Пусть i_j, i_{j+1} – соседние индексы, образующие беспорядок в χ . Тогда

$$\begin{aligned} X_{i_1} \dots X_{i_r} &= X_{i_1} \dots X_{i_{j-1}} \left(q_{i_{j+1}i_j}^{-1} X_{i_{j+1}} X_{i_j} + \sum_{\mathbf{t} \prec \eta(X_{i_{j+1}} X_{i_j})} \alpha_{\mathbf{t}}^{ij} X^{\mathbf{t}} \right) X_{i_{j+2}} \dots X_{i_r} \\ &= q_{i_{j+1}i_j}^{-1} X_{i_1} \dots X_{i_{j+1}} X_{i_j} \dots X_{i_r} + \sum_{\mathbf{t} \prec \eta(X_{i_{j+1}} X_{i_j})} \alpha_{\mathbf{t}}^{ij} X_{i_1} \dots X_{i_{j-1}} X^{\mathbf{t}} X_{i_{j+2}} \dots X_{i_r}. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что у произведения $X_{i_1} \dots X_{i_{j+1}} X_{i_j} \dots X_{i_r}$ количество беспорядков меньше, чем у χ , а у произведений $X_{i_1} \dots X_{i_{j-1}} X^{\mathbf{t}} X_{i_{j+2}} \dots X_{i_r}$ степень меньше степени χ , т.е. для них утверждение леммы верно. Записывая для этих произведений соответствующие соотношения, получаем искомый результат.

ЛЕММА 3.10. *Мономы $\{X^{\mathbf{t}} \mid \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{N}_0^n\}$ образуют линейно независимую систему в алгебре $\mathfrak{A}_n^{Q, \alpha}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\sum_{i=1}^r \beta_i X^{\mathbf{t}_i} = 0$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\mathbf{t}_1 \prec \dots \prec \mathbf{t}_r$.

Из леммы 3.9 следует, что всякое представление монома $X^{\mathbf{t}}$ в алгебре $\mathfrak{A}_n^{Q, \alpha}$ обязательно содержит произведение $X_{i_1} \dots X_{i_r}$, степень которого равна $\mathbf{t}$. Поэтому всякое представление суммы $\sum_{i=1}^r \beta_i X^{\mathbf{t}_i}$ содержит некоторое произведение $X_{i_1} \dots X_{i_r}$ степени $\mathbf{t}_r$ с ненулевым коэффициентом, так как другие мономы не могут дать слагаемое степени, большей их собственной степени. Следовательно, указанное равенство возможно лишь при всех β_i равных нулю.

Из лемм 3.9, 3.10 следует, что множество мономов $\{X^{\mathbf{t}} \mid \mathbf{t} \in \mathbb{N}_0^n\}$ образует базис алгебры $\mathfrak{A}_n^{Q, \alpha}$ как векторного пространства над k .

Пусть $f = \sum_{i=1}^r \beta_i X^{\mathbf{t}_i}$ – произвольный ненулевой элемент алгебры $\mathfrak{A}_n^{Q, \alpha}$. Положим $\delta(f) = \max\{\mathbf{t}_i \mid 1 \leq i \leq r\}$, здесь максимум берется относительно порядка $\prec$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.11. *Отображение δ обладает следующими свойствами:*

- 1) $\delta(fg) = \delta(f) + \delta(g)$;
- 2) $\delta(f + g) \preceq \max\{\delta(f), \delta(g)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 3.1.

Из доказанных лемм следует, что δ обладает всеми свойствами нормы η из раздела 2, если в качестве базиса $\mathfrak{B}$ взять базис $\{X^{\mathbf{t}} \mid \mathbf{t} \in \mathbb{N}_0^n\}$. Кроме того, соответствующее отображение ρ совпадает с δ , поскольку все значения δ лежат в $\mathbb{N}_0^n$, т.е. в силу утверждения 1) леммы 3.11 $\rho \equiv \delta$ является полунормой, согласованной с нормой δ .

Итак, для алгебры $\mathfrak{A}_n^{Q, \alpha}$ верны все результаты раздела 2.

Теперь рассмотрим несколько примеров алгебр $\mathfrak{A}_n^{Q, \alpha}$.

ПРИМЕР 1. При всех $\alpha_{\mathbf{t}}^{ij}$, равных нулю, получаем алгебру с соотношениями

$$X_i X_j = q_{ij} X_j X_i, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

– хорошо известную алгебру квантовых многочленов $k_Q[X_1, \dots, X_n]$.

ПРИМЕР 2. Алев и Дюма в работе [5] рассмотрели следующий квантовый аналог алгебр Вейля.

Пусть $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$ – кортеж ненулевых элементов поля k и Λ – матрица со свойствами $\lambda_{ii} = 1$, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}^{-1}$. Положим $\mu_{ij} = \lambda_{ij} q_i$ при $1 \leq i < j \leq n$. По определению *квантовой алгебры Вейля* $A_{\bar{q}, \Lambda}^{n, \Lambda}(k)$ называется ассоциативная алгебра над полем k с $2n$ порождающими $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ и с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} X_i X_j &= \mu_{ij} X_j X_i, \\ Y_i Y_j &= \lambda_{ij} Y_j Y_i, \\ X_i Y_j &= \lambda_{ji} Y_j X_i, \\ X_j Y_i &= \mu_{ij} Y_i X_j, \\ X_j Y_j &= 1 + q_j Y_j X_j + \sum_{1 \leq l < j} (q_l - 1) Y_l X_l, \quad 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что эта алгебра изоморфна алгебре $\mathfrak{A}_{2n}^{\mathcal{Q}, \alpha}$, для некоторых $\mathcal{Q}, \alpha$.

ПРИМЕР 3. Демидов в обзоре [6] рассматривает универсальные кодействующие на семейство $\mathcal{S}$ алгебры $M(\mathcal{S})$.

Пусть семейство $\mathcal{S}$ состоит из двух алгебр:

$$\begin{aligned} A_Q &= k\langle x_1, \dots, x_n \rangle / (x_i x_j - q_{ij}^{-1} x_j x_i), \\ B_P &= k\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle / (\xi_i \xi_j + p_{ij} \xi_j \xi_i, \xi_i^2), \end{aligned}$$

где $Q = (q_{ij})$, $P = (p_{ij})$ – матрицы параметров, причем

$$p_{ij}p_{ji} = q_{ij}q_{ji} = p_{ii} = q_{ii} = 1.$$

Тогда алгебра $M(\mathcal{P}) = M_{P,Q}$ оказывается ассоциативной алгеброй над полем k с n^2 порождающими z_i^j , $1 \leq i, j \leq n$, и с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} z_i^m z_j^m &= q_{ij}^{-1} z_j^m z_i^m, \\ z_i^m z_i^l &= p_{ml}^{-1} z_i^l z_i^m, \\ z_i^m z_j^l - q_{ij}^{-1} q_{ml} z_j^l z_i^m &= -q_{ml} z_i^l z_j^m + q_{ij}^{-1} z_j^m z_i^l, \\ z_i^m z_j^l - p_{ij} p_{ml}^{-1} z_j^l z_i^m &= p_{ml}^{-1} z_i^l z_j^m - p_{ij} z_j^m z_i^l, \end{aligned}$$

для всех $1 \leq i < j \leq n$ и $1 \leq m < l \leq n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.12. Пусть параметры p_{ij} , q_{ij} удовлетворяют соотношению $p_{ij}q_{ij} = c^{\text{sgn}(j-i)}$ для некоторого $c \in k^*$, $c \neq -1$. Тогда алгебра $M_{P,Q} = M_{P,Q,c}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A}_{n^2}^{\mathcal{Q},\alpha}$ для некоторых $\mathcal{Q}$, α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $p_{ij} = c^{\text{sgn}(j-i)} q_{ij}^{-1}$. Перепишем соотношения следующим образом:

$$z_i^m z_j^l - p_{ij} p_{ml}^{-1} z_j^l z_i^m - p_{ml}^{-1} q_{ml} z_j^l z_i^m + p_{ij} z_j^m z_i^l = z_i^m z_j^l - q_{ij}^{-1} q_{ml} z_j^l z_i^m - q_{ml} c^{-1} z_i^l z_j^m + q_{ij}^{-1} c z_j^m z_i^l.$$

Отсюда

$$q_{ml} z_i^l z_j^m - q_{ij}^{-1} z_j^m z_i^l = -q_{ml} c^{-1} z_i^l z_j^m + q_{ij}^{-1} c z_j^m z_i^l$$

или

$$q_{ml}(1 + c^{-1}) z_i^l z_j^m = q_{ij}^{-1}(1 + c) z_j^m z_i^l.$$

При $c \neq -1$ имеем

$$\begin{aligned} z_i^l z_j^m &= q_{ij}^{-1} q_{ml}^{-1} (1 + c) (1 + c^{-1})^{-1} z_j^m z_i^l = \lambda_{iljm} z_j^m z_i^l, \\ z_i^m z_j^l &= q_{ij}^{-1} q_{ml} z_j^l z_i^m + (q_{ml} c^{-1} - q_{ij}^{-1} c) \lambda_{iljm}^{-1} z_j^l z_i^m. \end{aligned}$$

Итак, все соотношения переписаны в виде

$$\begin{aligned} z_i^m z_j^m &= \lambda_{imjm} z_j^m z_i^m, \\ z_i^m z_i^l &= \lambda_{imil} z_i^l z_i^m, \\ z_i^l z_j^m &= \lambda_{iljm} z_j^m z_i^l, \\ z_i^m z_j^l &= \lambda_{imjl} z_j^l z_i^m + \mu_{imjl} z_i^l z_j^m, \end{aligned} \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad 1 \leq m < l \leq n,$$

при некоторых коэффициентах $\lambda_{imjl}, \mu_{imjl} \in k$, $\lambda_{imjl} \neq 0$.

Положим $z_i^m = X_{(i-1)n+m}$. Нетрудно видеть, что все произведения z_i^m , входящие в определяющие соотношения алгебры $M_{P,Q,c}$, являются мономами вида $X^{\mathbf{t}}$ и что для любой пары X_s, X_r , $1 \leq s, r \leq n^2$, среди определяющих соотношений найдется соответствующее коммутационное соотношение. Остается проверить, что последнее соотношение является соотношением вида (1). Действительно, пусть $1 \leq i < j \leq n$ и $1 \leq m < l \leq n$. Тогда $(i-1)n + l > (i-1)n + m$, т.е.

$$\delta(z_i^l z_j^m) = \delta(X_{(i-1)n+l} X_{(j-1)n+m}) \prec \delta(X_{(i-1)n+m} X_{(j-1)n+l}) = \delta(z_i^m z_j^l),$$

что и требовалось.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Artamonov V. A., Cohn P. M. The skew field of rational functions on the quantum plane // J. Math. Sci. 1999. V. 93. № 6. P. 824–829.
- [2] Cohn P. M. Centralisateur dans les corps libres // Ecole de Printemps d'Informatique Théorique, "Séries formelles en variables non commutatives et applications" / ed. J. Berstel: Vieux-Boucau les Bains (Landes), 1978. P. 45–54.
- [3] Артамонов В. А. Тело квантовых рациональных функций // УМН. 1999. Т. 54. № 4. С. 151–152.
- [4] Зеленова С. А. Коммутативные подалгебры кольца квантовых многочленов и тела квантовых лорановских рядов // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 3. С. 55–64.
- [5] Alev J., Dumas F. Sur le corps des fractions de certaines algèbres quantiques // J. of Algebra. 1994. V. 170. № 1. P. 229–265.
- [6] Демидов Е. Е. О некоторых аспектах теории квантовых групп // УМН. 1993. Т. 48. № 6. С. 39–74.
- [7] Brown K. A., Goodearl K. R. Lecture on algebraic quantum groups. Basel–Boston: Birkhäuser, 2002.
- [8] Brookes C. J. B. Crossed products and finitely presented groups // J. Group Theory. 2000. V. 3. P. 433–444.

Институт системного программирования РАН

Поступило
08.07.2002