Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Анохин, О некоторых множествах групповых функций, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 3–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm240>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:05:55

УДК 512.54

О НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВАХ ГРУППОВЫХ ФУНКЦИЙ

М. И. Анохин

Пусть G – группа, A – абелева группа и n – целое число такое, что $n \geq -1$. В работе изучаются множества $\Phi_n(G, A)$ всех функций из G в A степени не более n . По существу, эти множества были введены О. А. Логачёвым, А. А. Сальниковым и В. В. Ященко. Описаны все случаи, когда любая функция из G в A имеет ограниченную и не обязательно ограниченную конечную степень. Кроме того, показано, что если G конечна, то изучение множества $\Phi_n(G, A)$ сводится к изучению множеств $\Phi_n(G/O^p(G), A_p)$ для простых чисел p , делящих $|G/G'|$. Здесь $O^p(G)$ – p -корадикал группы G , A_p – p -компонента группы A , а G' – коммутант группы G .

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Пусть G – произвольная группа и A – произвольная абелева группа. В работе [1] Логачёв, Сальников и Ященко построили для каждого целого $n \geq -1$ множество функций из G в A , которое мы обозначаем через $\Phi_n(G, A)$ (его определение см. в разделе 2). Отметим, что в вышеуказанной работе это множество обозначалось через $\text{RM}_n(G, A)$, что указывало на его связь с n -м кодом Рида–Маллера. Однако по мнению автора обобщением n -го кода Рида–Маллера более естественно считать образ $\Phi_n(G, A)$ в групповом кольце $\mathbb{Z}_e G$ при некотором изоморфизме, который определен в случае, когда G конечна и A является циклической порядка e (см. замечание 6). Кроме того, в работе [1] группы G и A предполагались конечными абелевыми.

Отметим, что $\Phi_n(G, A) \subseteq \Phi_{n+1}(G, A)$ для любого n . Как и в работе [1], каждой функции $\varphi: G \rightarrow A$ мы сопоставим ее *степень* $\deg \varphi$ следующим образом. Если

$$\varphi \in \Phi_*(G, A) = \bigcup_{n=-1}^{\infty} \Phi_n(G, A),$$

то $\deg \varphi = \min\{n \geq -1 \mid \varphi \in \Phi_n(G, A)\}$, а в противном случае $\deg \varphi = \infty$. Тогда $\Phi_n(G, A)$ при любом $n \geq -1$ – это множество всех функций из G в A степени не более n , а $\Phi_*(G, A)$ – множество всех функций из G в A , имеющих конечные степени.

Говоря неформально, основные результаты настоящей работы заключаются в следующем. Описаны все случаи, когда любая функция из G в A имеет ограниченную и не обязательно ограниченную конечную степень (см. соответственно теорему 1 и теорему 2). Предположим теперь, что группа G конечна. Тогда теорема 3 показывает,

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-00929 и № 99-01-00941.

что для $n \geq -1$ и $n = *$ изучение множества $\Phi_n(G, A)$ сводится к изучению множеств $\Phi_n(G/O^p(G), A_p)$ при простых числах p , делящих $|G/G'|$. Здесь $O^p(G)$ – p -корадикал группы G (см. раздел 2), A_p – p -компонента группы A (см. раздел 4), а G' – коммутант группы G . Отметим, что любая функция из $G/O^p(G)$ в A_p принадлежит $\Phi_*(G/O^p(G), A_p)$, так как $G/O^p(G)$ – конечная p -группа, а A_p – p -группа (см. теорему 2). В следствии 1 приводится некоторая формула для степени произвольной функции из $\Phi_*(G, A)$. Получен также некоторый критерий принадлежности произвольной функции из G в A множеству $\Phi_*(G, A)$ (следствие 2). Если G нильпотентна, то теорема 3 может быть записана в несколько более удобном виде (см. следствие 3).

Автор благодарит В.В. Ященко, который направил его усилия на изучение объектов настоящей работы. Автор признателен О.А. Логачёву, А.А. Сальникову и В.В. Ященко, а также руководителям и участникам семинара “Кольца и модули” кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ за полезные обсуждения данной работы.

2. Определения, обозначения и необходимые факты. Как обычно, через $\mathbb{Z}$ мы будем обозначать множество (кольцо) всех целых чисел. Пусть также $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k\}$ для произвольного $k \in \mathbb{Z}$. Если $m \in \mathbb{N}_1$, то через $\mathbb{Z}_m$ обозначается кольцо вычетов $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$; кроме того, положим $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z}$. Аддитивная группа кольца $\mathbb{Z}_m$ при $m \in \mathbb{N}_1 \cup \{\infty\}$ будет обозначаться так же, как и это кольцо. Для произвольных множеств X и Y через Y^X обозначается множество всех функций из X в Y . В работе используется постфиксная запись, т.е. значение функции $\varphi \in Y^X$ на элементе $x \in X$ записывается в виде $x\varphi$, а не $\varphi(x)$. Если $\varphi \in Y^X$ и $\psi \in Z^Y$, то $\varphi\psi$ будет обозначать композицию функций φ и ψ (в этом порядке), т.е. $x(\varphi\psi) = (x\varphi)\psi$ для любого $x \in X$. Через $\langle S \rangle$ обозначается подгруппа, порожденная подмножеством S некоторой группы. Если s – элемент какой-либо группы, то вместо $\langle \{s\} \rangle$ мы будем писать $\langle s \rangle$.

На протяжении всей работы через G будет обозначаться некоторая группа, а через A – некоторая абелева группа. Для группы G мы используем мультипликативную запись, а для группы A аддитивную. Если y – элемент некоторого множества Y , то через $\bar{y}$ будет обозначаться функция из Y^G , тождественно равная y на G .

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей. Тогда RG обозначает групповое кольцо группы G над кольцом R . Если H – нормальная подгруппа группы G , то через $\Delta_H(G, R)$ будет обозначаться ядро гомоморфизма RG на $R(G/H)$, продолжающего по линейности естественный гомоморфизм G на G/H . Хорошо известно, что если нормальная подгруппа H группы G порождается множеством S , то $\Delta_H(G, R)$ порождается как левый и как правый идеал RG множеством $\{s - 1 \mid s \in S\}$. Напомним, что идеал $\Delta_G(G, R)$ называется *фундаментальным идеалом* кольца RG ; мы будем обозначать этот идеал через $\Delta(G, R)$. Для $n \in \mathbb{N}_1$ через $\Delta^n(G, R)$ обозначается n -я степень идеала $\Delta(G, R)$; под $\Delta^0(G, R)$ мы понимаем RG . Нам потребуется следующая лемма, вытекающая из леммы 2 работы [2] или из теоремы 9 работы [3].

ЛЕММА 1. *Идеал $\Delta(G, R)$ нильпотентен тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

- 1) $G = \{1\}$;
- 2) $R = \{0\}$;
- 3) *существует простое число p такое, что G – конечная p -группа и элемент r кольца R нильпотентен.*

Множество A^G является абелевой группой относительно операции поточечного сло-

жения. Кроме того, группа G действует справа на A^G следующим образом:

$$x(\varphi g) = (xg^{-1})\varphi, \quad \varphi \in A^G, \quad x, g \in G. \quad (1)$$

Через e всюду в настоящей работе будет обозначаться экспонента группы A (возможно, бесконечная), которая совпадает с экспонентой группы A^G . Очевидно, что группа A^G является точным унитарным правым $\mathbb{Z}_e G$ -модулем относительно действия $\mathbb{Z}_e G$, про-должающего по линейности действие (1).

Определим множества $\Phi_n(G, A) \subseteq A^G$ индукцией по $n \in \mathbb{N}_{-1}$ следующим образом:

$$\Phi_{-1}(G, A) = \{\bar{0}\}, \quad \Phi_n(G, A) = \{\varphi \in A^G \mid \varphi \Delta(G, \mathbb{Z}_e) \subseteq \Phi_{n-1}(G, A)\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Очевидно, что $\Phi_n(G, A)$ при любом $n \in \mathbb{N}_{-1}$ является подмодулем A^G и

$$\Phi_{-1}(G, A) \subseteq \Phi_0(G, A) \subseteq \dots \quad (2)$$

По существу, множества $\Phi_n(G, A)$ были определены в работе [1], хотя там группы G и A предполагались конечными абелевыми и вместо $\Phi_n(G, A)$ использовалось обозначение $\text{RM}_n(G, A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\{\bar{0}\} = M_{-1} \subseteq M_0 \subseteq \dots$ – ряд подмодулей $\mathbb{Z}_e G$ -модуля A^G , в факторах которого группа G действует тождественно (другими словами, $M_n \Delta(G, \mathbb{Z}_e) \subseteq M_{n-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$). Тогда индукция по n дает включение $M_n \subseteq \Phi_n(G, A)$ для любого $n \in \mathbb{N}_{-1}$. Это свойство ряда (2) показывает, что он является аналогом верхнего центрального ряда в группе.

ЛЕММА 2. Пусть $\varphi \in A^G$ и $n \in \mathbb{N}_{-1}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\varphi \in \Phi_n(G, A)$;
- 2) $\varphi \Delta^{n+1}(G, \mathbb{Z}_e) = \{\bar{0}\}$;
- 3) $\sum_{i_1, \dots, i_k} (-1)^{n+1-k} (xy_{i_1} \dots y_{i_k})\varphi = 0$ для всех $x, y_1, \dots, y_{n+1} \in G$, где суммирование производится по всевозможным последовательностям целых чисел $i_1, \dots, i_k$ таким, что $0 \leq k \leq n+1$ и $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1$.

Эквивалентность условий 1 и 2 леммы 2 легко доказывается индукцией по n . Эквивалентность условий 2 и 3 этой леммы следует из того, что $\Delta^{n+1}(G, \mathbb{Z}_e)$ порождается как правый идеал $\mathbb{Z}_e G$ множеством всех элементов вида $(g_1 - 1) \dots (g_{n+1} - 1)$, где $g_1, \dots, g_{n+1} \in G$. Отметим, что $\Delta^{n+1}(G, \mathbb{Z}_e)$ порождается вышеуказанным множеством также и как левый идеал $\mathbb{Z}_e G$, а при $n \in \mathbb{N}_0$ – даже как подгруппа аддитивной группы $\mathbb{Z}_e G$.

Положим

$$\Phi_*(G, A) = \bigcup_{n=-1}^{\infty} \Phi_n(G, A).$$

Как и в работе [1], каждой функции $\varphi \in A^G$ мы сопоставим ее *степень* $\deg \varphi$ следующим образом:

$$\deg \varphi = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}_{-1} \mid \varphi \in \Phi_n(G, A)\}, & \text{если } \varphi \in \Phi_*(G, A); \\ \infty, & \text{если } \varphi \notin \Phi_*(G, A). \end{cases}$$

Тогда $\Phi_n(G, A)$ при любом $n \in \mathbb{N}_{-1}$ – это множество всех функций из A^G степени не более n , а $\Phi_*(G, A)$ – множество всех функций из A^G , имеющих конечные степени.

Пусть p – простое число. Через $Op(G)$ будет обозначаться p -*корадикал* группы G , т.е. наименьшая подгруппа в множестве всех нормальных подгрупп H группы G таких, что G/H является p -группой. Разумеется, не всякая группа обладает p -корадикалом. Однако $Op(G)$ заведомо существует, если G – конечная группа или периодическая абелева группа.

ЛЕММА 3. *Предположим, что группа G конечна. Пусть p – простое число и R – ассоциативное кольцо с единицей, в котором элемент p нильпотентен. Пусть также $l = \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \Delta^n(G/O^p(G), R) = \{0\}\}$ (это число определено ввиду леммы 1). Тогда*

$$\Delta_{O^p(G)}(G, R) = \Delta^l(G, R) = \Delta^{l+1}(G, R) = \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через S множество всех элементов группы G , порядки которых взаимно просты с p . Пусть $s \in S$ и m – порядок s . Тогда согласно формуле бинома

$$1 = ((s-1) + 1)^m = 1 + m(s-1) + \left(\sum_{i=0}^{m-2} \binom{m}{i+2} (s-1)^i \right) (s-1)^2.$$

Следовательно, $m(s-1)$ делится на $(s-1)^2$ в кольце $R\langle s \rangle$. Ввиду взаимной простоты m и p отсюда вытекает, что $s-1 = \alpha(s-1)^2$ для некоторого $\alpha \in R\langle s \rangle$. Из последнего равенства с помощью индукции по n легко получить, что $s-1 = \alpha^n(s-1)^{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$. В частности, $s-1 \in \Delta^{l+1}(G, R)$. Легко видеть, что $\langle S \rangle = O^p(G)$, поэтому $\Delta_{O^p(G)}(G, R)$ порождается как левый и как правый идеал RG множеством $\{s-1 \mid s \in S\} \subseteq \Delta^{l+1}(G, R)$. Следовательно,

$$\Delta_{O^p(G)}(G, R) \subseteq \Delta^{l+1}(G, R). \quad (3)$$

С другой стороны,

$$\Delta^l(G, R) \subseteq \Delta_{O^p(G)}(G, R), \quad (4)$$

так как $\Delta^l(G/O^p(G), R) = \{0\}$ и $\Delta_{O^p(G)}(G, R)$ – ядро гомоморфизма RG на $R(G/O^p(G))$, продолжающего по линейности естественный гомоморфизм G на $G/O^p(G)$. Утверждение леммы вытекает из включений (3) и (4) и тривиального включения $\Delta^{l+1}(G, R) \subseteq \Delta^l(G, R)$. Лемма доказана.

3. Общие свойства множеств $\Phi_n(G, A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть A является подгруппой некоторой абелевой группы B . Тогда из эквивалентности условий 1 и 3 леммы 2 вытекает, что $\Phi_n(G, A) = \Phi_n(G, B) \cap A^G$ для любого $n \in \mathbb{N}_{-1}$ (а следовательно, и для $n = *$). Поэтому если $\varphi \in A^G$, то степени φ как функции из A^G и как функции из B^G совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть η – гомоморфизм A в некоторую абелеву группу B . Тогда из эквивалентности условий 1 и 3 леммы 2 вытекает, что если $\varphi \in \Phi_n(G, A)$, то $\varphi\eta \in \Phi_n(G, B)$ для любого $n \in \mathbb{N}_{-1}$ (а следовательно, и для $n = *$). Другими словами, $\deg \varphi\eta \leq \deg \varphi$ для любой функции $\varphi \in A^G$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть η – гомоморфизм G в некоторую группу H и $\varphi \in A^H$. Тогда из эквивалентности условий 1 и 3 леммы 2 вытекает, что

$$\varphi \in \Phi_n(H, A) \implies \eta\varphi \in \Phi_n(G, A)$$

для любого $n \in \mathbb{N}_{-1}$ (а следовательно, и для $n = *$). Другими словами, $\deg \eta\varphi \leq \deg \varphi$ для любой функции $\varphi \in A^G$. Если $G\eta = H$, то из вышеуказанной эквивалентности вытекает, что

$$\varphi \in \Phi_n(H, A) \iff \eta\varphi \in \Phi_n(G, A)$$

для любого $n \in \mathbb{N}_{-1}$ (а следовательно, и для $n = *$). Другими словами, $\deg \eta\varphi = \deg \varphi$ для любой функции $\varphi \in A^G$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Легко видеть (см. также [1]), что $\Phi_0(G, A)$ есть множество всех функций–констант из A^G , а $\Phi_1(G, A)$ совпадает с множеством всех функций вида $\eta + \bar{a}$, где η – гомоморфизм из G в A и $a \in A$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Предположим, что группа G конечна, а группа A является циклической порядка $e \in \mathbb{N}_1 \cup \{\infty\}$. Для удобства мы считаем, что A – аддитивная группа кольца $\mathbb{Z}_e$, которая будет обозначаться так же, как и это кольцо. Очевидно, что функция

$$\varphi \mapsto \sum_{g \in G} (g\varphi)g, \quad \varphi \in \mathbb{Z}_e^G, \quad (5)$$

является изоморфизмом $\mathbb{Z}_e^G$ и $\mathbb{Z}_e G$ как правых $\mathbb{Z}_e G$ -модулей. Поэтому вместо функций из $\mathbb{Z}_e^G$ можно работать с их образами при изоморфизме (5). Для $n \in \mathbb{N}_{-1} \cup \{*\}$ образ модуля $\Phi_n(G, \mathbb{Z}_e)$ при изоморфизме (5) мы будем обозначать через $\text{RM}_n(G, \mathbb{Z}_e)$. Выбор такого обозначения объясняется тем, что $\text{RM}_n(G, \mathbb{Z}_e)$ при некоторых $n \in \mathbb{N}_{-1}$ является обобщением n -го кода Рида–Маллера. Это будет показано в замечании 7.

Пусть $n \in \mathbb{N}_{-1}$. Тогда из эквивалентности условий 1 и 2 леммы 2 вытекает, что $\text{RM}_n(G, \mathbb{Z}_e)$ является левым аннулятором идеала $\Delta^{n+1}(G, \mathbb{Z}_e)$ в $\mathbb{Z}_e G$. Известно, что левый аннулятор любого двустороннего идеала в кольце $\mathbb{Z}_e G$ совпадает с правым аннулятором этого идеала (см. [4, теорема 3.1.2, п. (с)] для симметрических алгебр над полями). Поэтому $\text{RM}_n(G, \mathbb{Z}_e)$ равен также правому аннулятору идеала $\Delta^{n+1}(G, \mathbb{Z}_e)$ в $\mathbb{Z}_e G$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Предположим, что G – конечная p -группа для некоторого простого числа p . Тогда идеал $\Delta(G, \mathbb{Z}_p)$ совпадает с радикалом Джекобсона (или, что в данном случае эквивалентно, с наибольшим нильпотентным идеалом) кольца $\mathbb{Z}_p G$ (см. [5, теорема 1.2], [4, теорема 3.1.9, п. (а)], а также лемму 1). В частности, идеал $\Delta(G, \mathbb{Z}_p)$ нильпотентен. Поэтому определено число $d = \max\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \Delta^n(G, \mathbb{Z}_p) \neq \{0\}\}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}_{-1}$. Согласно замечанию 6 $\text{RM}_n(G, \mathbb{Z}_p)$ совпадает с левым (или правым) аннулятором идеала $\Delta^{n+1}(G, \mathbb{Z}_p)$ в $\mathbb{Z}_p G$. Известно (см. [6], [4, теоремы 4.2.2, 3.2.2]), что при $n \in \{-1, \dots, d\}$ этот аннулятор равен $\Delta^{d-n}(G, \mathbb{Z}_p)$. Следовательно,

$$\text{RM}_n(G, \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \Delta^{d-n}(G, \mathbb{Z}_p), & \text{если } n \leq d, \\ \mathbb{Z}_p G, & \text{если } n > d. \end{cases} \quad (6)$$

Степени $\Delta(G, \mathbb{Z}_p)$ хорошо изучены в литературе (см. [5], [4, раздел 3.3] и для случая, когда группа G абелева, – [7, раздел 1]). Мы приведем здесь в качестве примера один результат, который легко получить непосредственно (см. также [7, раздел 1]).

Пусть G является прямым произведением семейства $\{C_1, \dots, C_m\}$ своих подгрупп, где $m \in \mathbb{N}_1$ и C_i – циклическая группа порядка p^{k_i} при некотором $k_i \in \mathbb{N}_1$. Пусть также c_i – некоторый порождающий элемент группы C_i . Тогда множество

$$\{(c_1 - 1)^{r_1} \dots (c_m - 1)^{r_m} \mid r_i \in \{0, \dots, p^{k_i} - 1\}, r_1 + \dots + r_m \geq l\}$$

образует базис $\Delta^l(G, \mathbb{Z}_p)$ ($l \in \mathbb{N}_0$). В частности,

$$d = \sum_{i=1}^m (p^{k_i} - 1). \quad (7)$$

Отметим, что если G – элементарная абелева p -группа (т.е. $k_1 = \dots = k_m = 1$), то при $n \leq m(p-1)$ n -й обобщенный код Рида–Маллера длины p^m над полем $\mathbb{Z}_p$ определяется в книге [4] (определение и теорема 3.3.12) как $\Delta^{m(p-1)-n}(G, \mathbb{Z}_p)$. Формулы (6) и (7) показывают, что этот код совпадает с $\text{RM}_n(G, \mathbb{Z}_p)$. Аналогичная ситуация имеет место и для классических бинарных кодов Рида–Маллера (частный случай обобщенных кодов Рида–Маллера при $p = 2$).

ТЕОРЕМА 1. *Равенство $\Phi_n(G, A) = A^G$ при некотором $n \in \mathbb{N}_{-1}$ справедливо тогда и только тогда, когда идеал $\Delta(G, \mathbb{Z}_e)$ нильпотентен, что в свою очередь эквивалентно дизъюнкции следующих условий:*

- 1) $G = \{1\}$;
- 2) $e = 1$ (другими словами, $A = \{0\}$);
- 3) существует простое число p такое, что G – конечная p -группа и e является степенью p (последнее условие на число e выполняется, если и только если A – p -группа конечной экспоненты).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\Phi_n(G, A) = A^G \iff A^G \Delta^{n+1}(G, \mathbb{Z}_e) = \{\bar{0}\} \iff \Delta^{n+1}(G, \mathbb{Z}_e) = \{0\}$$

для любого $n \in \mathbb{N}_{-1}$ ввиду эквивалентности условий 1 и 2 леммы 2 и точности $\mathbb{Z}_e G$ -модуля A^G . Поэтому $\Phi_n(G, A) = A^G$ при некотором $n \in \mathbb{N}_{-1}$ тогда и только тогда, когда идеал $\Delta(G, \mathbb{Z}_e)$ нильпотентен. Эквивалентность нильпотентности идеала $\Delta(G, \mathbb{Z}_e)$ и дизъюнкции условий 1–3 вытекает из леммы 1. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Равенство $\Phi_*(G, A) = A^G$ справедливо тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

- 1) $G = \{1\}$;
- 2) $A = \{0\}$;
- 3) существует простое число p такое, что G – конечная p -группа и A – p -группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $\Phi_*(G, A) = A^G$ и условия 1 и 2 не выполнены. Покажем, что в этом случае выполнено условие 3. Выберем произвольный элемент $a \in A \setminus \{0\}$ и обозначим через k его порядок (вообще говоря, бесконечный). Определим функцию $\xi \in \langle a \rangle^G$ следующим образом:

$$x\xi = \begin{cases} a, & \text{если } x = 1, \\ 0, & \text{если } x \neq 1, \end{cases} \quad x \in G.$$

Тогда $\xi \in \Phi_n(G, \langle a \rangle)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}_{-1}$ ввиду равенства $\Phi_*(G, A) = A^G$ и замечания 2. Поэтому $\xi \Delta^{n+1}(G, \mathbb{Z}_k) = \{\bar{0}\}$, так как условия 1 и 2 леммы 2 эквивалентны. Легко видеть, что если $\xi\alpha = \bar{0}$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_k G$, то $\alpha = 0$. Следовательно, $\Delta^{n+1}(G, \mathbb{Z}_k) = \{0\}$ и идеал $\Delta(G, \mathbb{Z}_k)$ нильпотентен. Ввиду леммы 1 G является конечной p -группой и k – степенью p для некоторого единственного и не зависящего от a (так как $G \neq \{1\}$) простого числа p . Это число p будет определено, так как хотя бы один элемент $a \in A \setminus \{0\}$ существует. Условие 3 вытекает теперь из произвольности выбора элемента a .

Пусть теперь выполнено хотя бы одно из условий 1–3. Если выполнено условие 1 или условие 2, то равенство $\Phi_*(G, A) = A^G$ вытекает из теоремы 1. Предположим теперь, что выполнено условие 3. Выберем произвольную функцию $\varphi \in A^G$. Тогда $\langle G\varphi \rangle$ – конечная p -группа. Ввиду теоремы 1 $\Phi_n(G, \langle G\varphi \rangle) = \langle G\varphi \rangle^G$ для некоторого $n \in \mathbb{N}_{-1}$ (вообще говоря, зависящего от φ). Следовательно, $\varphi \in \Phi_n(G, A) \subseteq \Phi_*(G, A)$ (см. замечание 2). Из этого вытекает равенство $\Phi_*(G, A) = A^G$, так как функция φ выбиралась произвольно. Теорема доказана.

4. Свойства множеств $\Phi_n(G, A)$ в случае, когда группа G конечна. В настоящем разделе мы будем предполагать, что группа G конечна. Пусть P – множество всех простых чисел p таких, что $O^p(G) \neq G$. Легко видеть, что P совпадает с множеством всех простых делителей $|G/G'|$, где G' – коммутант группы G . Для простого числа p через ω_p мы будем обозначать естественный гомоморфизм G на $G/O^p(G)$, а через A_p – p -компоненту группы A , т.е. множество всех элементов группы A , порядки которых являются степенями p (очевидно, что это множество является подгруппой группы A). Пусть также A_P – (прямая) сумма семейства $\{A_p \mid p \in P\}$ подгрупп группы A и T – некоторое множество представителей всех смежных классов A по A_P , содержащее 0 . Если $n \in \mathbb{N}_{-1} \cup \{*\}$, то положим

$$T_n = \{t \in T \mid \bar{t} \in \Phi_n(G, A)\} = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } n = -1, \\ T, & \text{если } n \in \mathbb{N}_0 \cup \{*\} \end{cases}$$

(см. замечание 5).

ЛЕММА 4. Пусть $\varphi \in A^G$ и $n \in \mathbb{N}_{-1} \cup \{*\}$. Тогда $\varphi \in \Phi_n(G, A)$, если и только если $\varphi = \bar{t} + \psi$ для некоторых $t \in T_n$ и $\psi \in \Phi_n(G, A_P)$, причем в этом случае t и ψ , удовлетворяющие вышеуказанным условиям, определяются по φ однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \Phi_n(G, A)$. Докажем существование t и ψ , требуемых в лемме. Если $n = -1$, то $\varphi = \bar{0}$ и можно положить $t = 0$ и $\psi = \bar{0}$. Предположим теперь, что $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{*\}$. Обозначим через ν естественный гомоморфизм A на A/A_P . Тогда $\varphi\nu \in \Phi_n(G, A/A_P)$ согласно замечанию 3. Из замечания 5 вытекает, что $\Phi_n(G, A/A_P)$ есть множество всех функций-констант из $(A/A_P)^G$, так как не существует гомоморфизмов из G в A/A_P , кроме $\bar{0}$. Поэтому $\varphi\nu = \bar{t}\nu$ для некоторого $t \in T$. Очевидно, что этот элемент t и функция $\psi = \varphi - \bar{t} \in \Phi_n(G, A) \cap A_P^G = \Phi_n(G, A_P)$ (см. замечание 2) удовлетворяют условиям леммы.

Обратно, если $\varphi = \bar{t} + \psi$ для некоторых $t \in T_n$ и $\psi \in \Phi_n(G, A_P)$, то $\varphi \in \Phi_n(G, A)$, так как $\bar{t} \in \Phi_n(G, A)$ и $\psi \in \Phi_n(G, A)$ (см. замечание 2). Единственность t и ψ , удовлетворяющих вышеуказанным условиям (если такие t и ψ существуют), проверяется непосредственно. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Предположим, что группа A является прямой суммой семейства $\{A(i) \mid i \in I\}$ своих подгрупп (здесь I – некоторое множество). Для произвольного $i \in I$ обозначим через π_i проекцию A на $A(i)$ относительно вышеуказанного разложения A в прямую сумму. Тогда легко видеть, что $\mathbb{Z}_e G$ -модуль A^G является прямой суммой семейства $\{A(i)^G \mid i \in I\}$ своих подмодулей, причем для любого $i \in I$ функция $\varphi \mapsto \varphi\pi_i$ ($\varphi \in A^G$) является проекцией A^G на $A(i)^G$ относительно вышеуказанного разложения A^G в прямую сумму. Кроме того, если $\varphi \in A^G$ и $n \in \mathbb{N}_{-1}$, то из эквивалентности условий 1 и 3 леммы 2 вытекает, что

$$\varphi \in \Phi_n(G, A) \iff \varphi\pi_i \in \Phi_n(G, A(i)) \quad \text{для всех } i \in I. \quad (8)$$

Следовательно, эквивалентность (8) справедлива и при $n = *$. Таким образом, $\Phi_n(G, A)$ является прямой суммой семейства $\{\Phi_n(G, A(i)) \mid i \in I\}$ для любого $n \in \mathbb{N}_{-1} \cup \{*\}$.

ЛЕММА 5. Предположим, что A является p -группой для некоторого простого числа p . Пусть $\varphi \in A^G$. Тогда $\varphi \in \Phi_*(G, A)$, если и только если $x\varphi = y\varphi$ для любых $x, y \in G$ таких, что $x \equiv y \pmod{O^p(G)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду замечания 2 $\varphi \in \Phi_*(G, A)$, если и только если $\varphi \in \Phi_*(G, \langle G\varphi \rangle)$. Здесь $\langle G\varphi \rangle$ – конечная p -группа, экспоненту которой мы обозначим через k . В свою очередь, из леммы 3 и эквивалентности условий 1 и 2 леммы 2 следует, что $\varphi \in \Phi_*(G, \langle G\varphi \rangle)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \Delta_{O^p(G)}(G, \mathbb{Z}_k) = \{\bar{0}\}$, так как k является степенью p . Наконец, непосредственно проверяется, что последнее равенство справедливо в том и только том случае, когда для любых $x, y \in G$ из сравнения $x \equiv y \pmod{O^p(G)}$ следует равенство $x\varphi = y\varphi$. Лемма доказана.

Из замечания 4 и леммы 5 непосредственно вытекает

ЛЕММА 6. *Предположим, что A является p -группой для некоторого простого числа p . Пусть $n \in \mathbb{N}_{-1} \cup \{*\}$. Тогда функция $\varphi \mapsto \omega_p \varphi$ ($\varphi \in A^{G/O^p(G)}$) инъективно отображает $\Phi_n(G/O^p(G), A)$ на $\Phi_n(G, A)$.*

Роль вышеприведенных результатов настоящего раздела заключается в следующем. Пусть $n \in \mathbb{N}_{-1} \cup \{*\}$. Тогда лемма 4 сводит изучение множества $\Phi_n(G, A)$ к изучению множества $\Phi_n(G, A_P)$. Из замечания 8 следует, что изучение $\Phi_n(G, A_P)$ сводится к изучению $\Phi_n(G, A_p)$ для $p \in P$. Наконец, лемма 6 (доказательство которой использует лемму 5) позволяет свести изучение $\Phi_n(G, A_p)$ к изучению $\Phi_n(G/O^p(G), A_p)$ для каждого $p \in P$. Из этих трех результатов вытекает

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\varphi \in A^G$ и $n \in \mathbb{N}_{-1} \cup \{*\}$. Тогда $\varphi \in \Phi_n(G, A)$, если и только если*

$$\varphi = \bar{t} + \sum_{p \in P} \omega_p \varphi_p$$

для некоторых $t \in T_n$ и $\varphi_p \in \Phi_n(G/O^p(G), A_p)$, причем в этом случае t и φ_p , удовлетворяющие вышеуказанным условиям, определяются по φ однозначно.

Используя описание множеств $\Phi_n(G, A)$, данное в теореме 3, легко получить

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $\varphi \in \Phi_*(G, A)$. Тогда*

$$\deg \varphi = \max\{\deg \bar{t}, \deg \varphi_p \mid p \in P\},$$

где t и φ_p определены по φ согласно теореме 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Пусть $n \in \mathbb{N}_{-1} \cup \{*\}$. Тогда теорема 3 сводит изучение множества $\Phi_n(G, A)$ к изучению множеств $\Phi_n(G/O^p(G), A_p)$ для $p \in P$. Если группа A_p при некотором $p \in P$ является прямой суммой семейства $\{A_p(i) \mid i \in I\}$ своих циклических подгрупп (где I – некоторое множество), то ввиду замечания 8 изучение $\Phi_n(G/O^p(G), A_p)$ сводится к изучению $\Phi_n(G/O^p(G), A_p(i))$ для $i \in I$. В общем случае произвольная функция $\varphi \in A_p^{G/O^p(G)}$ ($p \in P$) принадлежит $\langle (G/O^p(G))\varphi \rangle^{G/O^p(G)}$, где $\langle (G/O^p(G))\varphi \rangle$ является конечной p -группой и, следовательно, разложима в прямую сумму циклических подгрупп. В свою очередь, изучение $\Phi_n(G/O^p(G), A_p(i))$, где $A_p(i)$ – циклическая p -группа, сводится к изучению $\text{RM}_n(G/O^p(G), \mathbb{Z}_{|A_p(i)|})$ (см. замечание 6).

Согласно теореме 3 $\varphi \in \Phi_*(G, A)$, если и только если $\varphi = \bar{t} + \sum_{p \in P} \omega_p \varphi_p$ для некоторых $t \in T$ и $\varphi_p \in \Phi_*(G/O^p(G), A_p) = A_p^{G/O^p(G)}$ (последнее равенство вытекает из теоремы 2). Кроме того, $O^p(A_P)$ равен (прямой) сумме семейства $\{A_q \mid q \in P \setminus \{p\}\}$ для любого простого числа p . Из этого нетрудно вывести

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\varphi \in A^G$. Тогда $\varphi \in \Phi_*(G, A)$, если и только если выполнены два следующих условия:

- 1) $x\varphi \equiv y\varphi \pmod{A_P}$ для любых $x, y \in G$;
- 2) $x\varphi \equiv y\varphi \pmod{O^p(A_P)}$ для любых $p \in P$ и $x, y \in G$ таких, что $x \equiv y \pmod{O^p(G)}$.

Предположим теперь, что группа G нильпотентна. Для произвольного простого числа p обозначим через G_p (единственную) силовскую p -подгруппу группы G . Тогда G является прямым произведением семейства $\{G_p \mid p \in P\}$, так как если $G_p \neq \{1\}$ для некоторого простого числа p , то $O^p(G) \neq G$ и, следовательно, $p \in P$. Очевидно, что $O^p(G)$ равен прямому произведению семейства $\{G_q \mid q \in P \setminus \{p\}\}$ для любого простого числа p . Поэтому для произвольного $p \in P$ существует изоморфизм $\iota_p: G/O^p(G) \rightarrow G_p$ такой, что $\omega_p \iota_p$ – проекция G на G_p . Из сказанного выше ввиду теоремы 3 и замечания 4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Предположим, что группа G нильпотентна. Пусть $\varphi \in A^G$ и $n \in \mathbb{N}_{-1} \cup \{*\}$. Тогда $\varphi \in \Phi_n(G, A)$, если и только если существуют элемент $t \in T_n$ и семейство функций $\{\varphi_p \mid p \in P\}$ такие, что $\varphi_p \in \Phi_n(G_p, A_p)$ для всех $p \in P$ и

$$\left(\prod_{p \in P} x_p \right) \varphi = t + \sum_{p \in P} x_p \varphi_p$$

при любых $x_p \in G_p$ (здесь через G_p обозначена единственная силовская p -подгруппа группы G).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Логачёв О. А., Сальников А. А., Яценко В. В. Некоторые характеристики “нелинейности” групповых отображений // Дискретный анализ и исследование операций. (В печати).
- [2] Лихтман А. И. О групповых кольцах p -групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1963. Т. 27. № 4. С. 795–800.
- [3] Connell I. G. On the group ring // Canad. J. Math. 1963. V. 15. № 4. P. 650–685.
- [4] Zimmermann K.-H. Beiträge zur algebraischen Codierungstheorie mittels modularer Darstellungstheorie. Bayreuther mathematische Schriften, Heft 48, 1994.
- [5] Jennings S. A. The structure of the group ring of a p -group over a modular field // Trans. Amer. Math. Soc. 1941. V. 50. № 1. P. 175–185.
- [6] Hill E. T. The annihilator of radical powers in the modular group ring of a p -group // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 25. № 4. P. 811–815.
- [7] Берман С. Д. К теории групповых кодов // Кибернетика. 1967. № 1. С. 31–39.