Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнаут, К. М. Филиппов, О предъящичных модульных топологиях, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 12–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm241>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:35:15

УДК 512.556.5

О ПРЕДЪЯЩИЧНЫХ МОДУЛЬНЫХ ТОПОЛОГИЯХ

В. И. Арнаутов, К. М. Филиппов

Пусть R – полное топологическое тело с топологией, определяемой вещественной абсолютной величиной, M – векторное пространство над R . В настоящей работе доказано, что M допускает существование отдельной модульной топологии, предшествующей ящичной, в решетке всех модульных топологий тогда и только тогда, когда размерность векторного пространства M над R является измеримым кардиналом.

Библиография: 4 названия.

Введение. Пусть (R, τ_R) – топологическое кольцо, M – некоторый R -модуль, $\mathcal{L}_T$ – множество всех (R, τ_R) -модульных топологий на M . Известно, что множество $\mathcal{L}_T$, упорядоченное по включению, образует полную модулярную решетку. Из ее полноты, в частности, следует существование наибольшего и наименьшего элементов. Естественен вопрос о существовании «соседних» с ними топологий, т.е. атомов и коатомов в этой решетке и ее подрешетках. Коатомы в подрешетках решетки $\mathcal{L}_T$ будем называть *предмаксимальными топологиями* в этих подрешетках.

Используя лемму Цорна, несложно показать, что в любой решетке существуют неуплотняемые цепочки ее элементов. В ряде работ исследовался вопрос о существовании бесконечных цепочек в решетке всех топологий в различных алгебраических системах, в частности, существование бесконечных неуплотняемых цепочек. Однако вопрос о существовании конечных неуплотняемых цепочек топологий в алгебраических системах остался в стороне от этих исследований.

Наличие большого числа коатомов в решетке в некоторых случаях позволяет строить неуплотняемые цепочки любой конечной длины. Это может служить дополнительным аргументом изучения предмаксимальных топологий в различных алгебраических системах.

Вопрос о существовании (отделимых) предмаксимальных топологий полностью решен авторами в работах [1] и [2] для случая, когда (R, τ_R) – топологическое тело, топология которого определяется вещественной абсолютной величиной. В настоящей работе для этого случая решается вопрос существования отдельной предмаксимальной топологии в подрешетке всех топологий, которые слабее ящичной, которую будем называть *предящичной топологией*.

Заметим, что если топологическое тело (R, τ_R) неполно, то векторное пространство ${}_R M(X)$ допускает (R, τ_R) -модульную отдельную предящичную топологию тогда и только тогда, когда множество X содержит более одного элемента. Доказательство

этого утверждения может быть получено из доказательства теоремы 12 в [1] при подстановке в нем ящичной топологии вместо наибольшей (R, τ_R) -модульной. Если же топологическое тело (R, τ_R) дискретно, а множество X бесконечно, то на ${}_R M(X)$ существует отделяемая предъящичная топология (см. [1, введение].)

В настоящей работе исследуется проблема существования отделяемой предъящичной топологии для случая полного недискретного топологического тела (R, τ_R) .

Введем следующие обозначения:

R – тело;

$\| \cdot \|$ – вещественнозначная абсолютная величина на R ;

τ_R – топология на R , определяемая с помощью $\| \cdot \|$;

$s \in R$, $\|s\| < 1$, $U_n = \{r \in R \mid \|r\| < \|s^n\|\}$;

${}_R M(X) = \bigoplus_{x \in X} {}_R R_x$;

$\pi_x: {}_R M(X) \rightarrow R$ – каноническая проекция на R ;

$W(f) = \{v \in {}_R M(X) \mid \forall x \in X \pi_x(v) \in U_{f(x)}\}$;

$\mathcal{B}_b = \{W(f) \mid f: X \rightarrow \mathbb{N}\}$;

τ_b – топология на ${}_R M(X)$ с $\mathcal{B}_b$ в качестве базиса окрестностей нуля (эта топология называется *ящичной*);

$W_n = W(f)$, где $f(X) = \{n\}$;

$\mathcal{B}_c = \{W_n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

τ_c – топология на ${}_R M(X)$ с $\mathcal{B}_c$ в качестве базиса окрестностей нуля (эта топология называется *кирпичной*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Топологию τ на ${}_R M(X)$ будем называть *предъящичной*, если она (R, τ_R) -модульна и цепь $\tau_b > \tau$ максимальна в решетке (R, τ_R) -модульных топологий на ${}_R M(X)$ ¹.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если τ^* – предъящичная топология на ${}_R M(X)$, то ни одно из множеств вида $W(f)$ не является окрестностью нуля в $({}_R M(X), \tau^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $W(f)$ является окрестностью нуля в $({}_R M(X), \tau^*)$ для некоторого отображения $f: X \rightarrow \mathbb{N}$. Так как $\tau^* \neq \tau_b$, существует $g: X \rightarrow \mathbb{N}$ такое, что $W(g)$ не является окрестностью нуля в $({}_R M(X), \tau^*)$.

Легко убедиться, что множество $\{s^n \cdot W(g) \mid n \in \mathbb{N}\}$ является базисом окрестностей нуля в некоторой (R, τ_R) -модульной топологии τ_g . Так как $W(g)$ не является окрестностью нуля в $({}_R M, \tau^*)$, то $\tau_g \not\leq \tau^*$. Так как $\tau_g \leq \tau_b$ и цепь $\tau^* < \tau_b$ максимальна, то $\tau_b \geq \sup\{\tau_g, \tau^*\} > \tau^*$ и, следовательно, $\tau_b = \sup\{\tau_g, \tau^*\}$.

Определим отображение $h: X \rightarrow \mathbb{N}$ следующим образом: $h(x) = 2 \cdot \max\{f(x), g(x)\}$. Из соотношения $\tau_g \not\leq \tau^*$ получаем, что существует окрестность нуля $\overline{W}$ в $({}_R M(X), \tau^*)$ такая, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ выполнено $s^k \cdot W(g) \not\subseteq \overline{W}$.

Из равенства $\tau_b = \sup\{\tau_g, \tau^*\}$ следует, что существуют $n \in \mathbb{N}$ и окрестность нуля $\widetilde{W}$ в $({}_R M(X), \tau^*)$ такие, что $\widetilde{W} \cap s^n \cdot W(g) \subseteq W(h)$.

Положим $\widehat{W} = \overline{W} \cap \widetilde{W} \cap W(f)$.

¹Т.е. τ является коатомом в решетке всех (R, τ_R) -модульных топологий μ на ${}_R M(X)$ таких, что $\mu \leq \tau_b$.

Заметим, что из непрерывности операций в $({}_R M(X), \tau^*)$ и обратимости всех отличных от нуля элементов в U_0 следует, что $U_0 \cdot \widehat{W}$ является окрестностью нуля в $({}_R M(X), \tau^*)$.

Положим $W = \widehat{W} \cap U_0 \cdot \widehat{W}$. Заметим, что $U_0 \cdot W \subseteq W$ и что для любого $k \in \mathbb{Z}$ выполнено $s^k \cdot W \setminus W(g) \neq \emptyset$.

Пусть $w \in s^n \cdot W \setminus W(g)$. Тогда для некоторого $x \in \text{supp } w$ выполнено $\|\pi_x(w)\| \geq \|s^{g(x)}\|$.

Пусть $\lambda = \max\{\|s^{-g(x)} \cdot \pi_x(w)\| \mid x \in \text{supp } w\}$ и $x_0 \in \text{supp } w$ такой элемент, что $\lambda = \|s^{-g(x_0)} \cdot \pi_{x_0}(w)\|$.

Положим $r = s^{n+1} \cdot s^{g(x_0)} \cdot (\pi_{x_0}(w))^{-1}$. Так как $\lambda > 1$, то $\|r\| = \|s^{n+1}\|/\lambda < 1$, т.е. $r \in U_0$, и значит, $r \cdot w \in U_0 \cdot W \subseteq W$.

Кроме того, для любого $x \in \text{supp } w = \text{supp } r \cdot w$ выполнено

$$\begin{aligned} \|\pi_x(r \cdot w)\| &= \|s^{(n+1)+g(x_0)} \cdot (\pi_{x_0}(w))^{-1} \cdot \pi_x(w)\| \\ &= \|s^{n+1} \cdot s^{g(x_0)} \cdot (\pi_{x_0}(w))^{-1} \cdot \pi_x(w) \cdot s^{-g(x)} \cdot s^{g(x)}\| \\ &= \|s^{n+1}\| \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \|s^{-g(x)} \cdot \pi_x(w)\| \cdot \|s^{g(x)}\| \\ &\leq \|s^{n+1}\| \cdot \|s^{g(x)}\| < \|s^{g(x)+n}\|, \end{aligned}$$

т.е. $r \cdot w \in s^n \cdot W(g)$.

Тогда из включения $W \subseteq W(f)$ следует, что $w \in s^n \cdot W \subseteq s^n \cdot W(f)$. Используя то, что $w \notin W(g)$, получаем, что $\|s^{g(x_0)}\| \leq \|\pi_{x_0}(w)\| < \|s^{(f(x_0)+n)}\|$, т.е. что $g(x_0) > f(x_0) + n$. Из неравенства $f(x_0) \geq 1$ следует, что

$$g(x_0) > n + 1. \quad (*)$$

Из включения $W \cap s^n \cdot W(g) \subseteq W(h)$ следует, что $r \cdot w \in W(h)$ и, значит, $\|\pi_{x_0}(r \cdot w)\| < \|s^{h(x_0)}\| \leq \|s^{2g(x_0)}\|$. Из определения элементов r и w следует, что $\|\pi_{x_0}(r \cdot w)\| = \|s^{n+1} \cdot s^{g(x_0)} \cdot (\pi_{x_0}(w))^{-1} \cdot \pi_{x_0}(w)\| = \|s^{g(x_0)+n+1}\|$. Следовательно, $\|s^{g(x_0)+n+1}\| < \|s^{2g(x_0)}\|$, т.е. $g(x_0) + n + 1 > 2 \cdot g(x_0)$, или $n + 1 > g(x_0)$, что противоречит неравенству $(*)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть S_1, S_2 – множества, $f: S_1 \rightarrow S_2$ – отображение.

Если τ_1 – некоторая топология на S_1 , то существует сильнейшая топология на S_2 такая, что отображение f непрерывно. Будем называть ее фактортопологией топологии τ_1 по отображению f и обозначать τ_1/f .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если S_1, S_2 являются R -модулями, f – модульным сюръективным гомоморфизмом, а (S_1, τ_1) – топологическим (R, τ_R) -модулем, то топология τ_1/f является (R, τ_R) -модульной и отображение $f: (S_1, \tau_1) \rightarrow (S_2, \tau_1/f)$ – открытым.

ЛЕММА 5. Если топологическое кольцо (R, τ_R) полно, а τ^* – отделимая предъ-ящичная отделимая топология на ${}_R M(X)$, то для любого $x \in X$ естественная проекция $\pi_x: ({}_R M, \tau^*) \rightarrow (R_x, \tau_R)$ непрерывна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что существует $y \in X$ такой, что отображение $\pi_y: ({}_R M, \tau^*) \rightarrow ({}_R y, \tau_R)$ разрывно. Так как τ_R – сильнейшая (R, τ_R) -модульная топология на R_y , то $\tau^*/\pi_y < \tau_R$.

Так как топология τ_R определяется вещественной абсолютной величиной, из доказательства теоремы 1.1.10 в [3] легко следует, что τ_R является минимальной отделимой (R, τ_R) -модульной топологией на R_y . Следовательно, τ/π_y неотделима, т.е. $\ker \pi_y$ незамкнут в $({}_R M, \tau^*)$. Заметим, что $\ker \pi_y = \bigoplus_{x \in X \setminus \{y\}} {}_R R_x$ и обозначим его через ${}_R M_1$.

Взяв кардинальное число $\mathfrak{m}$ такое, что $|X| < \mathfrak{m}$, используя определение 4.1.24 и предложения 4.1.46 и 4.1.47 из [3], а также полноту кольца (R, τ_R) , легко доказать, что топологический модуль $({}_R M_1, \tau_b|_{M_1})$ полон. Так как топология τ_b отделима, то топологический модуль $({}_R M_1, \tau^*|_{M_1})$ неполон, иначе он был бы замкнут в $({}_R M, \tau)$. Следовательно, $\tau^*|_{M_1} < \tau_b|_{M_1}$.

Отождествим ${}_R M$ с ${}_R R \oplus {}_R M_1$, снабдим его топологией $\tau^\times$ тихоновского произведения топологических модулей $({}_R R, \tau_R)$ и $({}_R M_1, \tau^*|_{M_1})$. Очевидно, что $\tau_b > \tau^\times > \tau^*$, что противоречит предьящичности топологии τ^* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем называть ультрафильтр

- *σ -ультрафильтром*, если для любого счетного множества его элементов их пересечение непусто (и, следовательно, принадлежит ультрафильтру);
- *свободным*, если пересечение множества его элементов пусто.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Легко доказывается, что фильтр $\mathfrak{U}$ на множестве X является σ -ультрафильтром тогда и только тогда, когда из того, что $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \in \mathfrak{U}$ следует, что существует число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $U_n \in \mathfrak{U}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть X – множество. Кардинальное число $|X|$ будем называть

- *сильно недостижимым*, если для любого кардинального числа $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ выполнено $2^{\mathfrak{n}} < \mathfrak{m}$;
- *измеримым*, если на множестве X существует свободный σ -ультрафильтр.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Существование измеримых кардиналов является недоказанной и не опровергнутой гипотезой. Известно, что каждое кардинальное число, не превосходящее первого сильно недостижимого кардинального числа, неизмеримо (см. [4, глава IX, §§ 3, 4]).

ТЕОРЕМА 10. Если кольцо (R, τ_R) является полным, то векторное пространство ${}_R M(X)$ допускает отделимую предьящичную (R, τ_R) -модульную топологию тогда и только тогда, когда $|X|$ – измеримый кардинал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $F \subseteq X$ и $f: X \rightarrow \mathbb{N}$. Обозначим через $V(F, f)$ сумму $W(f) + {}_R \langle F \rangle$ множества $W(f)$ и R -модуля ${}_R \langle F \rangle$, порожденного множеством F , т.е. $V(F, f) = W(f) + {}_R \langle F \rangle$.

Так как $|X|$ является измеримым кардиналом, на множестве X существует свободный σ -ультрафильтр $\mathfrak{U}$. Легко проверить, что $\{V(F, f) \mid F \in \mathfrak{U}, f: X \rightarrow \mathbb{N}\}$ является базисом окрестностей нуля в некоторой (R, τ_R) -модульной топологии $\tau_{\mathfrak{U}}$ на ${}_R M(X)$, причем $\tau_{\mathfrak{U}} \leq \tau_b$.

Проверим, что множество W_1 (определение множества W_n дано в п. 1) не является окрестностью нуля в $({}_R M(X), \tau_{\mathfrak{U}})$. В самом деле, легко проверяется, что для любых

$F \in \mathfrak{U}$, $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ и $x \in F$, верно соотношение $\pi_x(W_1) = U_1 \not\supseteq \pi_x(V(F, f)) = R$ и, следовательно, $W_1 \not\supseteq V(F, f)$.

Пусть $\mathcal{T}$ – множество всех (R, τ_R) -модульных топологий τ на ${}_R M(X)$ таких, что

- i) $\tau_b \geq \tau \geq \tau_{\mathfrak{U}}$;
- ii) W_1 не является окрестностью нуля в $({}_R M(X), \tau)$.

Так как $\tau_{\mathfrak{U}} \in \mathcal{T}$, то $\mathcal{T} \neq \emptyset$.

Проверим индуктивность множества $\mathcal{T}$. Пусть $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{T}$ – некоторое линейно упорядоченное его подмножество и $\tau' = \sup \mathcal{N}$. Очевидно, что топология τ' удовлетворяет соотношению i).

Проверим выполнение соотношения ii) для топологии τ' . Для каждой (R, τ_R) -модульной топологии τ на ${}_R M(X)$ выберем произвольный базис окрестностей нуля $\mathcal{B}_\tau$. Так как множество $\mathcal{N}$ линейно упорядочено, легко видеть, что $\mathcal{B}_{\tau'} = \bigcup_{\tau \in \mathcal{N}} \mathcal{B}_\tau$ является базисом окрестностей нуля в $({}_R M(X), \tau')$. Так как $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{T}$, то для любого $\tau \in \mathcal{N}$ и для любого $W \in \mathcal{B}_\tau$ выполнено соотношение $W \not\supseteq W_1$. Следовательно, для любого $W \in \mathcal{B}_{\tau'}$ выполнено $W \not\supseteq W_1$, что означает, что топология τ' удовлетворяет свойству ii). Следовательно, множество $\mathcal{T}$ индуктивно.

По лемме Цорна в $\mathcal{T}$ существует максимальный элемент τ^* . Из свойств i) и ii) следует, что $\tau^* < \tau_b$.

Докажем, что топология τ^* является предъязычной. Пусть τ – некоторая (R, τ_R) -модульная топология и $\tau_b \geq \tau > \tau^*$. Докажем, что $\tau = \tau_b$.

Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{N}$. Проверим, что $W(f)$ является окрестностью нуля в $({}_R M(X), \tau)$. В самом деле, так как $\tau > \tau^*$, то W_1 является окрестностью нуля в $({}_R M(X), \tau)$. Из обратимости элементов s^n следует, что все множества W_n для $n \in \mathbb{N}$ являются окрестностями нуля в $({}_R M(X), \tau)$.

Так как $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(i)$, в силу замечания 8 существует $i_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $f^{-1}\{i_0\} \in \mathfrak{U}$. Проверим, что $V(f^{-1}\{i_0\}, f) \cap W_{i_0} \subseteq W(f)$.

Обозначим множество $f^{-1}\{i_0\}$ через F . Заметим, что $V(f^{-1}\{i_0\}, f) \cap W_{i_0} = V(F, f) \cap W_{i_0} = (W(f) + {}_R \langle F \rangle) \cap W_{i_0} = (W(f) \cap {}_R \langle X \setminus F \rangle + {}_R \langle F \rangle) \cap W_{i_0} = (W(f) \cap {}_R \langle X \setminus F \rangle \cap W_{i_0}) + ({}_R \langle F \rangle \cap W_{i_0}) \subseteq W(f) \cap {}_R \langle X \setminus F \rangle + ({}_R \langle F \rangle \cap W_{i_0})$.

Это значит, что для любого $v \in V(f^{-1}\{i_0\}, f) \cap W_{i_0}$ существуют элементы $v_1, v_2 \in {}_R M(X)$ такие, что $v = v_1 + v_2$, причем $v_1 \in W(f) \cap {}_R \langle X \setminus F \rangle$, а $v_2 \in {}_R \langle X \setminus F \rangle \cap W_{i_0}$. Следовательно, если $x \in \text{supp } v$, то $x \in \text{supp } v_1 \subseteq X \setminus F$ или $x \in \text{supp } v_2 \subseteq F$.

Докажем, что $v \in W(f)$, т.е. что для любого $x \in \text{supp } v$ выполнено $\pi_x(v) \in U_{f(x)}$. Пусть $x \in \text{supp } v$. Если $x \in \text{supp } v_1$, то $\pi_x(v) = \pi_x(v_1)$. Так как $v_1 \in W(f)$, то $\pi_x(v_1) \in \pi_x(W(f)) = U_{f(x)}$. Если же $x \in \text{supp } v_2$, то $\pi_x(v) = \pi_x(v_2)$. Так как $v_2 \in {}_R \langle X \setminus F \rangle \cap W_{i_0}$, то $x \in F$ и $\pi_x(v_2) \in U_{i_0}$. Но из определения множества F следует, что $i_0 = f(x)$, откуда следует, что $\pi_x(v_2) \in U_{f(x)}$. Включение $V(f^{-1}\{i_0\}, f) \cap W_{i_0} \subseteq W(f)$ доказано.

Так как W_{i_0} и $V(f^{-1}\{i_0\}, f)$ являются окрестностями нуля в $({}_R M(X), \tau)$ то и $W(f)$ также является окрестностью нуля в $({}_R M(X), \tau)$, что и требовалось.

Достаточность. Пусть ${}_R M(X)$ допускает отделимую предъязычную (R, τ_R) -модульную топологию τ с базисом окрестностей нуля $\mathcal{B}$. Для каждого $W \in \mathcal{B}$ обозначим через F_W множество всех элементов $x \in X$, удовлетворяющих следующим условиям:

- существует $w \in W$ такое, что $x \in \text{supp } w$, $\|\pi_x(w)\| \geq 1$;
- для любого $y \in \text{supp } w$ выполнено неравенство $\|\pi_y(w)\| \leq \|\pi_x(w)\|$.

Проверим, что множество $\{F_W | W \in \mathcal{B}\}$ является базисом некоторого фильтра. Проверим вначале, что $F_W \neq \emptyset$ для любого $W \in \mathcal{B}$. В силу предложения 3 множество W_0 не является окрестностью нуля в $({}_R M(X), \tau)$. Тогда $W \not\subseteq W_0$ и поэтому существует $w \in W$ и $y \in \text{supp } w$ такие, что $\|\pi_y(w)\| \geq 1$. Тогда если $x \in \text{supp } w$ таков, что $\|\pi_x(w)\| = \max\{\|\pi_y(w)\| | y \in \text{supp } w\}$, то $x \in F_W$.

Очевидно, что для любых $W_1, W_2 \in \mathcal{B}$ выполнено $F_{W_1 \cap W_2} \subseteq F_{W_1} \cap F_{W_2}$. Следовательно, $\{F_W | W \in \mathcal{B}\}$ является базисом некоторого фильтра.

Проверим, что $\bigcap_{W \in \mathcal{B}} F_W = \emptyset$. В самом деле, так как в силу леммы 6 для любого $x \in X$ проекция $\pi_x: ({}_R M(X), \tau) \rightarrow (R, \tau_R)$ непрерывна, для любого $x \in X$ существует $W \in \mathcal{B}$ такая, что $\pi_x(W) \subseteq U_1$, т.е. такая, что $x \notin F_W$.

Пусть $\mathcal{U} \supseteq \{F_W | W \in \mathcal{B}\}$ – некоторый ультрафильтр. В силу последнего замечания он является свободным.

Докажем, что он является σ -ультрафильтром.

Предположим противное, т.е. что существует последовательность $\{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ элементов фильтра $\mathcal{U}$ такая, что $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Не ограничивая общности, считаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $A_n \supseteq A_{n+1}$.

Определим отображение $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \\ n+1, & \text{если } x \in A_n \setminus A_{n+1}. \end{cases}$$

Согласно предложению 3 $\tau_c \not\leq \tau$. Тогда в силу предъявительности топологии τ выполнено равенство $\tau_b = \sup(\tau, \tau_c)$. Поэтому существуют $W \in \mathcal{B}$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $W \cap W_n \subseteq W(f)$. Не ограничивая общности, считаем, что $n > 1$.

Пусть $x \in F_W \cap A_{2n}$. Тогда существует $w \in W$ такое, что $\|\pi_x(w)\| \geq 1$ и что $\|\pi_x(w)\| = \max\{\|\pi_y(w)\| | y \in \text{supp } w\}$.

Положим $r = s^{n+1} \cdot (\pi_x(w))^{-1}$. Заметим, что $\|r\| < 1$ и поэтому $r \in U_0$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \max\{\|\pi_y(r \cdot w)\| | y \in \text{supp } r \cdot w\} &= \max\left\{\frac{\|s^{n+1}\|}{\|\pi_x(w)\|} \cdot \|\pi_y(w)\| \mid y \in \text{supp } w\right\} \\ &= \frac{\|s^{n+1}\|}{\|\pi_x(w)\|} \cdot \|\pi_x(w)\| = \|s^{n+1}\| < \|s^n\|, \end{aligned}$$

и, значит, $r \cdot w \in W_n$. Следовательно, $r \cdot w \in W \cap W_n \subseteq W(f)$, и, значит, $\|\pi_x(r \cdot w)\| < \|s^{f(x)}\|$. Так как $x \in A_{2n}$, то $f(x) > 2n$ и, следовательно, $\|s^{n+1}\| = \|\pi_x(w)\| < \|s^{f(x)}\| \leq \|s^{2n}\|$, откуда получаем, что $n+1 > 2n$, т.е. $1 > n$, что противоречит выбору n .

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Пусть абсолютная величина $\|\cdot\|$ на кольце R является неархимедовой. Обозначим через $\mathcal{L}_G$ решетку всех (R, τ_R) -модульных топологий на ${}_R M(X)$, допускающих базис окрестностей нуля из подгрупп. Легко видеть, что верны следующие утверждения:

- τ_b является наибольшим элементом в $\mathcal{L}_G$;
- $W(f)$ является подгруппой в ${}_R M(X)$ для любого $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$;
- $V(F, f)$ является подгруппой в ${}_R M(X)$ для любых $F \subseteq X$ и $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 12. Если кольцо (R, τ_R) полно и абсолютная величина $\|\cdot\|$ неархимедова, то векторное пространство ${}_R M(X)$ допускает отделимую (R, τ_R) -модульную предмаксимальную в $\mathcal{L}_G$ топологию (т.е. являющуюся коатомом в $\mathcal{L}_G$) тогда и только тогда, когда кардинал $|X|$ измерим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является дословным повторением доказательства теоремы 11 с учетом замечания 12.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнаут В. И., Филиппов К. М. О предмаксимальных топологиях на векторных пространствах // Buletinul Academiei de Ştiinţă Republicii Moldova. Matematica. 1996. Т. 20. № 1. С. 96–105.
- [2] Арнаут В. И., Филиппов К. М. О максимальных цепях в решетке модульных топологий // Сиб. матем. ж. 2001. Т. 42. № 3. С. 491–506.
- [3] Arnautov V. I., Glavatski S. T., Michalev A. V. Introduction to the Theory of Topological Rings and Modules. Marcel Dekker, 1996.
- [4] Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.

Институт математики и информатики АН РМ, Кишинёв, Молдова
E-mail: `arnautov@math.md`
`filippov@math.md`

Поступило
 26.01.1999
 исправленный вариант
 14.01.2002