Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Безверхний, И. В. Добрынина, О нормализаторах некоторых классов подгрупп в группах кос, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 19–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm242>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 06:50:47

УДК 512.54

О НОРМАЛИЗАТОРАХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОДГРУПП В ГРУППАХ КОС

В. Н. Безверхний, И. В. Добрынина

В данной работе изучаются нормализаторы некоторых классов подгрупп группы кос B_{n+1} .

Библиография: 8 названий.

Группа кос B_{n+1} задается образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ и определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-1, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, & i, j &= 1, \dots, n, \quad |i-j| > 1.\end{aligned}$$

Известно существование гомоморфизма группы B_{n+1} в группу подстановок S_{n+1} , отображающего σ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $i = 1, \dots, n$. Коса, реализующая единичную подстановку, называется *крашеной*. Подгруппа крашенных кос группы B_{n+1} обозначается через R_{n+1} , ее образующие – косы $\sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_i^2 \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}$ ($1 \leq i < j \leq n+1$) – через $s_{i,j}$. Через U_j , $j = 1, \dots, n$, обозначается подгруппа из R_{n+1} , порожденная свободными образующими $s_{1,j+1}, s_{2,j+1}, \dots, s_{j,j+1}$. Известно, что всякая крашенная коса из R_{n+1} однозначно представима в виде произведения $F_1 F_2 \dots F_n$, где $F_i \in U_i$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть U_{m-1} – свободная группа с образующими $s_{1,m}, s_{2,m}, \dots, s_{m-1,m}$. Для любых r, p , $1 \leq r < p < m$, любого i , $1 \leq i < m$, и любого $\varepsilon = \pm 1$ справедливы соотношения [1]

$$s_{r,p}^{-\varepsilon} s_{i,m} s_{r,p}^{\varepsilon} = \begin{cases} s_{i,m}, & \text{если } r < p < i < m \text{ или } i < r < p < m, \\ (s_{r,m} s_{p,m})^{\varepsilon} s_{i,m} (s_{r,m} s_{p,m})^{-\varepsilon}, & \text{если } r < i = p < m \\ \text{или } r = i < p < m, \\ (s_{r,m} s_{p,m})^{\varepsilon} (s_{p,m} s_{r,m})^{-\varepsilon} s_{i,m} (s_{p,m} s_{r,m})^{\varepsilon} (s_{r,m} s_{p,m})^{-\varepsilon}, & \text{если } r < i < p < m. \end{cases} \quad (1)$$

В данной работе изучаются нормализаторы некоторых классов подгрупп группы B_{n+1} .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00767.

УТВЕРЖДЕНИЕ [2]. Пусть H – подгруппа конечного индекса в G . H конечно порождена тогда и только тогда, когда G конечно порождена.

Используя данное утверждение, вопрос о конечной порожденности подгруппы H в B_{n+1} сводится к вопросу о конечной порожденности подгруппы $H \cap R_{n+1}$. С помощью методов работы [3] доказывается

ТЕОРЕМА 1. Пусть H – конечно порожденная подгруппа группы B_{n+1} . Тогда существует алгоритм, строящий порождающие подгруппы $H \cap R_{n+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $m_{i,j} = \sigma_{i-1}\sigma_{i-2}\dots\sigma_j$ для $j < i$ и $m_{i,j} = 1$ в противном случае. Тогда множество $\Lambda_{n+1} = \{\prod_{i=1}^{n+1} m_{i,j} \mid 1 \leq j \leq i\}$ образует шрейерову систему представителей смежных классов B_{n+1} по R_{n+1} , а всякий элемент $w \in B_{n+1}$ можно представить в виде $w = \tilde{w}\bar{w}$, где $\bar{w} \in R_{n+1}$, $\tilde{w} \in \Lambda_{n+1}$ [4].

Пусть $S_{n+1} = \langle b_1, \dots, b_m; A_1(b_\mu), \dots, A_r(b_\mu) \rangle$ – представление группы подстановок, заданное таблицей Кэли, где $m = (n+1)!$, причем между элементами b_i , $i = 1, \dots, m$, и шрейеровыми представителями из Λ_{n+1} существует взаимно-однозначное соответствие, которое устанавливается эффективно; $R_{n+1} = \langle s_{i,j} (1 \leq i < j \leq n+1); B_1(s_{i,j}), \dots, B_k(s_{i,j}) \rangle$ – представление группы крашенных кос, где $B_t(s_{i,j})$, $t = 1, \dots, k$, – соотношение Бурау (1).

Рассмотрим группу кос

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \langle b_1, \dots, b_m, s_{i,j} (1 \leq i < j \leq n+1); B_1(s_{i,j}), \dots, B_k(s_{i,j}), \\ A_r(b_\mu) &= W_r(s_{i,j}), b_l s_{i,j} b_l^{-1} = W_{lij}(s_{p,t}), b_l^{-1} s_{i,j} b_l = V_{lij}(s_{p,t}), \end{aligned} \quad (2)$$

где соотношения $A_r(b_\mu) = W_r(s_{i,j})$, $b_l s_{i,j} b_l^{-1} = W_{lij}(s_{p,t})$, $b_l^{-1} s_{i,j} b_l = V_{lij}(s_{p,t})$, получаются подстановкой вместо b_j соответствующего шрейерова представителя и перезаписи полученных слов в образующих R_{n+1} с помощью переписывающего процесса Рейдемейстера–Шрейера [2].

Рассмотрим конечно-порожденную подгруппу $H \subset B_{n+1}$. Пусть $\alpha_1 y_1, \dots, \alpha_{k_0} y_{k_0}, y_{k_0+1}, \dots, y_{k_1}$ – образующие H , где $\alpha_i \in S_{n+1}$, $i = 1, \dots, k_0$, $y_j \in R_{n+1}$, $j = 1, \dots, k_1$. Пусть φ – гомоморфизм группы B_{n+1} на S_{n+1} : $\varphi(B_{n+1}) = S_{n+1}$, определяемый следующим образом: $\forall s_{i,j} \in R_{n+1}$, $1 \leq i < j \leq n+1$, $\varphi(s_{i,j}) = 1$, $\forall l, l = 1, \dots, m$, $\varphi(b_l) = b_l$. Тогда $\varphi(H) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{k_0} \rangle$, $\varphi(H) \subset S_{n+1}$. Выпишем все элементы подгруппы $\varphi(H)$: $1, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{k'_0}$, где $\alpha'_i = \omega_i(\alpha_p)$, $\omega_i(\alpha_p)$ – слова в образующих $\{\alpha_j\}$, $j = 1, \dots, k_0$, подгруппы $\varphi(H) \subset S_{n+1}$. Используя таблицу умножения Кэли, получим представление подгруппы $\varphi(H) \subset S_{n+1}$, задаваемой также таблицей Кэли: $\varphi(H) = \langle \alpha_0, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{k'_0}; \psi_1, \dots, \psi_\alpha \rangle$, $\psi_i = \psi_i(\alpha'_b)$, $i = 1, \dots, \alpha$, $\alpha_0 = 1$.

В качестве образующих подгруппы H возьмем элементы

$$\begin{aligned} \alpha'_1 y'_1, \alpha'_2 y'_2, \dots, \alpha'_{k'_0} y'_{k'_0}, y'_{k'_0+1}, \dots, y'_{k'_1}, \quad k'_1 = k_1 - k_0 + k'_0, \\ \forall i, \quad 1 \leq i \leq k_1 - k_0, \quad y'_{k'_0+i} = y_{k_0+i}, \quad \alpha'_j y'_j = \omega_j(\alpha_p y_p), \quad j = 1, \dots, k'_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Последнее всегда можно получить, используя преобразования (2).

Обозначим множество элементов $\{y'_{k'_0+j}\}$, $j = 1, \dots, k_1 - k_0$, через Y_0 . Соотношения ψ_i , $i = 1, \dots, \alpha$, подгруппы $\varphi(H)$ в группе B_{n+1} будут соответствовать соотношения $\psi_i = N_i$, $i = 1, \dots, \alpha$, $N_i \in R_{n+1}$.

В подгруппе H рассмотрим слова $\psi_i(\alpha'_j y'_j)$, полученные подстановкой в $\psi_i(\alpha'_j)$ вместо α'_j образующих $\alpha'_j y'_j$ подгруппы H . Используя соотношения группы B_{n+1} , заданной представлением (2), получим $\psi_i(\alpha'_j y'_j) = \psi_i(\alpha'_j) T_i(s_{i,j})$, где $\psi_i(\alpha'_j) \in S_{n+1}$, $T_i(s_{i,j}) \in R_{n+1}$. Присоединим к Y_0 все элементы вида $N_i T_i \in R_{n+1}$, $i = 1, \dots, \alpha$, получим множество Y_1 . На образующих $\{\alpha'_j y'_j\}$, $j = 1, \dots, k'_0$, из (3) подгруппы H рассмотрим всевозможные произведения вида $(\alpha'_i y'_i)^{\varepsilon_i} (\alpha'_j y'_j)^{\varepsilon_j}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\varepsilon_j = \pm 1$, $i, j \in \{1, \dots, k'_0\}$. Каждое из этих произведений приведем к виду $(\alpha'_i y'_i)^{\varepsilon_i} (\alpha'_j y'_j)^{\varepsilon_j} = \alpha_{ij}^{\varepsilon_{ij}} y_{ij}^{\varepsilon_{ij}}$. Те из соотношений, у которых $\alpha_{ij}^{\varepsilon_{ij}} = 1$ ($\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_{ij}$), присоединяем к Y_1 ; получим множество Y_2 . Затем для каждого $\alpha_{ij}^{\varepsilon_{ij}} y_{ij}^{\varepsilon_{ij}}$ с $\alpha_{ij}^{\varepsilon_{ij}} \neq 1$ из множества (3) берем элемент $\alpha'_s y'_s$ такой, что $\alpha'_s = \alpha_{ij}^{\varepsilon_{ij}}$, и составляем произведения $y_{s,ij} = y_s^{-1} y_{ij}^{\varepsilon_{ij}}$, $y_{ij,s} = \alpha_{ij}^{\varepsilon_{ij}} y_{ij}^{\varepsilon_{ij}} y_s^{-1} \alpha'^{-1}_s$, добавив которые к Y_2 , получим множество Y_3 .

Пусть $C = \text{gr}(Y_3)$. Сопрягаем C элементами $(\alpha'_i y'_i)^{\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, где $\alpha'_i y'_i$ принадлежит множеству (3). Получим подгруппы $C_{\alpha'^{\varepsilon_i}} = (\alpha'_i y'_i)^{\varepsilon_i} C (\alpha'_i y'_i)^{-\varepsilon_i}$, $i = 1, \dots, k'_0$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Покажем, что $\forall i \exists j$, $1 \leq i, j \leq k'_0$, $C_{\alpha'^{-1}_i} = C_{\alpha'_j}$. Действительно, $C_{\alpha'^{-1}_i} = (\alpha'_i y'_i)^{-1} C (\alpha'_i y'_i) = \alpha'^{-1}_i y_i^{-\alpha_i} C y_i^{\alpha_i} \alpha'_i$, где $y_i^{\alpha_i} = \alpha'_i y'_i \alpha'^{-1}_i$, $y_i^{-\alpha_i} = \alpha'_i y'_i^{-1} \alpha'^{-1}_i$. Так как $\alpha'^{-1}_i \in \varphi(H)$, существует $\alpha'_j \in \varphi(H)$ такое, что $\alpha'_j = \alpha'^{-1}_i$. Поэтому

$$C_{\alpha'^{-1}_i} = \alpha'_j y'_j (y''_i)^{-1} C y''_i y'^{-1}_j \alpha'^{-1}_j = C_{\alpha'_j},$$

где $(y''_i)^{-1} = y'^{-1}_j \alpha'^{-1}_j \alpha'^{-1}_i y_i^{-\alpha_i} \in C$.

Рассмотрим подгруппу $Y = \text{gr}(C, C_{\alpha'_1}, \dots, C_{\alpha'_{k'_0}})$ подгруппы H .

ЛЕММА 1. *Подгруппа Y является нормальным делителем подгруппы H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Подгруппу H в дальнейшем будем представлять таким образом: $H = \text{gr}(\alpha'_1 y'_1, \dots, \alpha'_{k'_0} y'_{k'_0}, Y)$.

ЛЕММА 2. *Каждый элемент $w \in H$ единственным способом может быть представлен в виде $w = \alpha'_i y'_i u$, где $\alpha'_i y'_i$ принадлежат (3), $u \in Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ЛЕММА 3. *Имеем $H \cap R_{n+1} = Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из леммы 2.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Централизатор конечного множества элементов из R_{n+1} конечно порожден в R_{n+1} . Существует алгоритм, строящий образующие этого централизатора.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из [5], утверждения и теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Нормализатор конечного множества элементов из R_{n+1} конечно порожден в R_{n+1} . Существует алгоритм, строящий образующие этого нормализатора.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из [5], утверждения и теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Нормализатор конечно-порожденной подгруппы в R_3 конечно порожден. Существует алгоритм, строящий образующие этого нормализатора.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [6], что B_3 изоморфна группе $G = \langle x, y; x^3 = y^2 \rangle$. Рассмотрим группу $G^* = G/\langle y^2 \rangle = \langle x, y; x^3, y^2 \rangle$. Учитывая, что $y^2 = 1$, $x^2 = x^{-1}$, $x^3 = 1$, каждый элемент G^* может быть однозначно записан через элементы x , x^{-1} , y и длина его определена как число указанных элементов в данном слове. Любое конечное множество слов с помощью преобразований, аналогичных нильсеновским, может быть приведено к множеству с наименьшей суммарной длиной, позволяющему однозначно переписывать элементы, порожденные данным множеством (при этом следует заметить, что в записи элементов исключаются степени образующих, равные единице). Используя процедуру построения нормализатора конечно-порожденной подгруппы в свободной группе [2] и учитывая разрешимость проблемы вхождения в свободном произведении групп [7], получаем конечную порожденность нормализатора конечно-порожденной подгруппы в G^* и алгоритм построения данного нормализатора. Таким образом, нормализатор конечно-порожденной подгруппы из B_3 конечно порожден в B_3 и существует алгоритм, выписывающий его образующие. Отсюда по теореме 1 получаем утверждение данного следствия.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $G = F_1 \times F_2$ – прямое произведение двух свободных групп ранга 2. Пусть H – конечно-порожденная подгруппа из G . Тогда нормализатор $N_G(H)$ конечно порожден.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$H = \langle a_1 b_1, \dots, a_n b_n, a_{n+1}, \dots, a_k, b_{n+1}, \dots, b_t \rangle.$$

Будем считать, что a_i , $i = 1, \dots, k$, – свободные образующие. Допустим, что $N_G(H)$ бесконечно порожден. Рассмотрим подгруппы $L = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_k \rangle$, $K = \langle b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots, b_t \rangle$, являющиеся проекциями H на F_1 и на F_2 соответственно. Возможны следующие случаи.

1. Случай $n \geq 2$. Пусть $Z \in N_G(H)$ и $Z = AB$, где $A \in F_1$, $B \in F_2$, Z – образующий $N_G(H)$. Выберем Z таким, чтобы в смежном классе HZN элемент B имел наименьшую длину. Это означает, что B имеет наименьшую длину в смежном классе KVK . Преобразуем $\{b_j\}$, $j = 1, \dots, t$, к нильсеновскому множеству. Тогда $|B| \leq 1/2$ длины максимального нильсеновского образующего. Следовательно, элементов B – конечное число.

Известно, что $|N_{F_1}(L)/L| < \infty$ [2]. Пусть $r_1, r_2, \dots, r_m$ – представители смежных классов $N_{F_1}(L)$ по L . Тогда образующий $Z = AB$ из $N_G(H)$ можно преобразовать к виду $r_i A_l B_j$, где B_j – представитель из KVK , имеющий наименьшую длину, $A_l \in L$, r_i – некоторый указанный выше представитель. Так как элементов r_i и B_j – конечное число, то, исключая одинаковые r_i , а затем B_j (либо наоборот) из $\{r_i A_l B_j\}$, мы получим конечное число образующих вида $r_i A_l B_j$ и бесконечное число A'_l таких, что $A'_l \in N_G(H)$ и $A'_l \in L$. Тогда для $i = 1, \dots, n$ имеем: $A'_l{}^{-1} a_i A'_l b_i \in H$ и $A'_l{}^{-1} a_i A_l a_i^{-1} \in H$ ($A'_l{}^{-1} a_i A'_l a_i^{-1} = A'_l{}^{-1} a_i A'_l b_i (a_i b_i)^{-1}$). А так как $A'_l{}^{-1} a_i A'_l a_i^{-1} \in F_1$, то $A'_l{}^{-1} a_i A'_l a_i^{-1} \in H \cap F_1$. Рассмотрим следующие подгруппы: $M = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $N = \langle a_{n+1}, \dots, a_k \rangle$,

N^M – нормальное замыкание N с помощью M . Тогда $H \cap F_1 = N^M$ и $A_l'^{-1}a_iA_l'a_i^{-1} = A_{l_1}$, где $A_{l_1} \in N^M$. Элемент A_l' можем представить как $A_l' = A_{l_2}A_{l_3}$, где $A_{l_2} \in M$, а $A_{l_3} \in N^M$. Имеем $A_{l_3}^{-1}A_{l_2}^{-1}a_iA_{l_2}A_{l_3}a_i^{-1} = A_{l_1}$; отсюда $A_{l_2}^{-1}a_iA_{l_2}a_i^{-1} = A_{l_4}$, где $A_{l_4} \in N^M$. Так как $M \cap N^M = E$, где E – единичная подгруппа, то

$$A_{l_2}^{-1}a_iA_{l_2} = a_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Так как a_i – свободные образующие, то $A_{l_2} = 1$, $A_l' = A_{l_3}$. Таким образом, $A_l' \in H$.

2. Случай $n = 1$.

а) Подгруппа H имеет вид $\langle a_1b_1, a_2, \dots, a_k, b_2, \dots, b_t \rangle$.

Из (4) имеем

$$A_{l_2}^{-1}a_1A_{l_2} = a_1.$$

Следовательно, $A_{l_2} = a_1^{k_l}$ и элемент A_l' примет вид $A_l' = a_1^{k_l}A_{l_3}$, где $A_{l_3} \in N^M$, $M = \langle a_1 \rangle$. Так как $a_1^{-1}a_1b_1a_1 = a_1b_1$, $a_1^{-1}b_ja_1 = b_j$, $j = 2, \dots, t$, то $a_1 \in N_G(H)$. Поэтому в записи элементов A_l' мы можем исключить элементы $a_1^{k_l}$ и получить элементы $A_{l_3} \in N_G(H)$.

б) Подгруппа H имеет вид $\langle a_1b_1, b_2, \dots, b_k \rangle$. Пусть $Z = AB \in N_G(H)$. Из п. 1 следует, что элементов B можно взять конечное число. Если элементов Z , порождающих $N_G(H)$, бесконечно много, то, исключая одинаковые B , мы получим бесконечное число элементов A , удовлетворяющих соотношению $A^{-1}a_1A = a_1$. Следовательно, $A = x^t$, $a = x^p$, где $x \in F_1$. И так как $x \in N_G(H)$, отсюда следует, что нормализатор подгруппы H конечно порожден.

в) Подгруппа H имеет вид $\langle a_1b_1, a_2, \dots, a_k \rangle$. Доказательство проводится аналогично пункту 2а.

г) Подгруппа H имеет вид $\langle a_1b_1 \rangle$. Пусть $Z \in N_G(H)$ и $Z = AB$, где $A \in F_1$, $B \in F_2$. Тогда $A^{-1}a_1A = a_1$ и $B^{-1}b_1B = b_1$. Следовательно, $A = x^s$, $a_1 = x^t$, $x \in F_1$, и $B = y^m$, $b_1 = y^p$, $y \in F_2$; x, y не являются истинными степенями. Поэтому $N_G(H) = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$.

3. Подгруппа H имеет вид $\langle a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, \dots, b_t \rangle$. Пусть $L = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, $K = \langle b_1, \dots, b_t \rangle$. Тогда $N_G(H) = N_{F_1}(L)N_{F_2}(K)$. Так как $N_{F_1}(L)$, $N_{F_2}(K)$ конечно порождены, то $N_G(H)$ конечно порожден.

Теорема доказана.

Рассмотрим в R_5 подгруппу Π , порожденную элементами $\sigma_1^4, \sigma_2^4, \sigma_4^2, d$, где $d = \sigma_4\sigma_3 \times \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3\sigma_4$. Известно [6], что $\Pi = \langle \sigma_1^4, \sigma_2^4 \rangle \times \langle \sigma_4^2, d \rangle$ – прямое произведение двух свободных групп ранга 2. Обозначим через τ перезапись слова $X(\sigma_1, \dots, \sigma_4) \in R_5$ в образующих $s_{i,j}$; $\tau(d) = s_{1,5}s_{2,5}s_{3,5}s_{4,5}$.

ТЕОРЕМА 3. Имеем $N_{R_5}(\Pi) = \langle \Delta^2, \Delta'^2, \Pi \rangle$, где $\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1$, $\Delta' = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z \in N_{R_5}(\Pi)$. Тогда Z переводит любое слово из Π снова в слово из Π . В частности, Z удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} Z^{-1}\sigma_1^4\sigma_4^2Z &= \varphi_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4)\psi_1(\sigma_4^2, d), \\ Z^{-1}\sigma_2^4dZ &= \varphi_2(\sigma_1^4, \sigma_2^4)\psi_2(\sigma_4^2, d), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varphi_i(\sigma_1^4, \sigma_2^4)\psi_i(\sigma_4^2, d)$ – слова из Π , $i = 1, 2$.

Представим Z в виде $Z = F_1F_2F_3F_4$, где $F_j \in U_j$.

ЛЕММА 4. В R_5 система (5) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^4 F_1 F_2 &= \varphi_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4), \\ F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^4 F_1 F_2 &= \varphi_2(\sigma_1^4, \sigma_2^4), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^{-4} F_1 F_2) F_3^{-1} (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^4 F_1 F_2) F_3 &= 1, \\ (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^{-4} F_1 F_2) F_3^{-1} (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^4 F_1 F_2) F_3 &= 1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^{-4} F_1 F_2) F_4^{-1} (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^4 F_1 F_2) F_3^{-1} \sigma_4^2 F_3 F_4 &= \psi_1(\sigma_4^2, d), \\ (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^{-4} F_1 F_2) F_4^{-1} (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^4 F_1 F_2) F_3^{-1} d F_3 F_4 &= \psi_2(\sigma_4^2, d), \end{aligned} \quad (8)$$

состоящей из систем (6), (7), (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим представление $Z = F_1 F_2 F_3 F_4$ в систему (5) и преобразуем ее следующим образом:

$$\begin{aligned} &(F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^4 F_1 F_2) (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^{-4} F_1 F_2) F_3^{-1} (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^4 F_1 F_2) \\ &\quad \times F_3 (F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^{-4} F_1 F_2 F_3) F_4^{-1} (F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^4 \\ &\quad \times F_1 F_2 F_3) F_3^{-1} \sigma_4^2 F_3 F_4 = \varphi_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4) \psi_1(\sigma_4^2, d), \\ &(F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^4 F_1 F_2) (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^{-4} F_1 F_2) F_3^{-1} (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^4 F_1 F_2) \\ &\quad \times F_3 (F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^{-4} F_1 F_2 F_3) F_4^{-1} (F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^4 \\ &\quad \times F_1 F_2 F_3) F_3^{-1} d F_3 F_4 = \varphi_2(\sigma_1^4, \sigma_2^4) \psi_2(\sigma_4^2, d). \end{aligned} \quad (9)$$

В силу однозначности представления всякого элемента $y \in R_{n+1}$ в виде $y = y_1 y_2 \dots y_n$, где $y_i \in U_i$, из (9) получаем системы (6), (7) и

$$\begin{aligned} &(F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^{-4} F_1 F_2 F_3) F_4^{-1} (F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^4 F_1 F_2 F_3) \\ &\quad \times F_3^{-1} \sigma_4^2 F_3 F_4 = \psi_1(\sigma_4^2, d), \\ &(F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^{-4} F_1 F_2 F_3) F_4^{-1} (F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^4 F_1 F_2 F_3) \\ &\quad \times F_3^{-1} d F_3 F_4 = \psi_2(\sigma_4^2, d). \end{aligned} \quad (10)$$

Используя (7), преобразуем (10) к виду (8). Обратное утверждение очевидно.

ЛЕММА 5 [6]. Пусть H_1, H_2 – две конечно-порожденные подгруппы из $\langle \sigma_1^4, \sigma_2^4 \rangle$ и ни одна из них не сопряжена с подгруппами вида $\langle \sigma_j^{4t} \rangle$, $j = 1, 2$, $t \in \mathbb{Z}$. Если при этом существует $Z \in R_3$ такое, что $H_1 Z = Z H_2$ в R_3 , то $Z = \Delta'^{2k} S(\sigma_1^4, \sigma_2^4)$, $k \in \mathbb{Z}$, где Δ' – фундаментальный элемент V_3 .

ЛЕММА 6 [6]. Если $Z' = F_1 F_2$ ($F_i \in U_i$, $i = 1, 2$) удовлетворяет системе (6), то $Z' = \Delta'^{2k} L_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4)$, $k \in \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 7. Если $F_3 \in U_3$ является решением системы (7), то $\tau(F_3) = (s_{1,4} \times s_{2,4} s_{3,4})^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, коса $F_3 = (\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3)^k$ является решением системы (7), причем $\tau(F_3) = (s_{1,4} s_{2,4} s_{3,4})^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Если существует коса $X \in U_3$, являющаяся решением (7) и $X \neq F_3$, то в силу принадлежности X и F_3 свободной группе U_3 в B_4 содержится прямое произведение двух свободных групп ранга 2 $\langle F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^4 F_1 F_2, F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^4 F_1 F_2 \rangle \times \langle X, F_3 \rangle$, что противоречит [8].

ЛЕММА 8. *Справедливо равенство*

$$\tau(d)(s_{1,4} s_{2,4} s_{3,4}) = (s_{1,4} s_{2,4} s_{3,4})\tau(d) \quad \text{в } R_5.$$

Используя непосредственно равенства (1), получаем доказательство данного утверждения.

ЛЕММА 9. *В R_5 имеет место соотношение*

$$(s_{1,4} s_{2,4} s_{3,4})^{-k} s_{4,5} (s_{1,4} s_{2,4} s_{3,4})^k = (\tau(d))^k s_{4,5} (\tau(d))^{-k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим индукцией по k , используя соотношения (1) и лемму 8.

ЛЕММА 10. *Если $F_4 \in U_4$ удовлетворяет системе (8), то $F_4 = F_4(\sigma_4^2, d)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $|F_4|$ длину слова $F_4 \in U_4$ в свободных образующих $s_{4,5}, s_{3,5}, s_{2,5}, \tau(d)$. Возьмем $k \in \mathbb{N}$ такое, что k больше $3|F_4|$. Возведем левую и правую части каждого из равенств (5) в k -ю степень. Учитывая представление Z в виде $Z = F_1 F_2 F_3 F_4$, имеем

$$\begin{aligned} F_4^{-1} F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^{4k} \sigma_4^{2k} F_1 F_2 F_3 F_4 &= \varphi_1^k(\sigma_1^4, \sigma_4^4) \psi_1^k(\sigma_4^2, d), \\ F_4^{-1} F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^{4k} d^k F_1 F_2 F_3 F_4 &= \varphi_2^k(\sigma_1^4, \sigma_2^4) \psi_2^k(\sigma_4^2, d). \end{aligned} \quad (11)$$

Проводя рассуждения, изложенные в лемме 4, легко показать, что система (11) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^{4k} F_1 F_2 &= \varphi_1^k(\sigma_1^4, \sigma_2^4), \\ F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^{4k} F_1 F_2 &= \varphi_2^k(\sigma_1^4, \sigma_2^4). \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^{-4k} F_1 F_2) F_3^{-1} (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^{4k} F_1 F_2) F_3 &= 1, \\ (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^{-4k} F_1 F_2) F_3^{-1} (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^{4k} F_1 F_2) F_3 &= 1, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^{-4k} F_1 F_2) F_4^{-1} (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^{4k} F_1 F_2) \\ \times F_3^{-1} \sigma_4^{2k} F_3 F_4 &= \psi_1^k(\sigma_4^2, d), \\ (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^{-4k} F_1 F_2) F_4^{-1} (F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^{4k} F_1 F_2) \\ \times F_3^{-1} d^k F_3 F_4 &= \psi_2^k(\sigma_4^2, d), \end{aligned} \quad (14)$$

состоящей из систем (12), (13), (14).

Решения систем (12), (13) имеют вид, описанный в леммах 6 и 7.

Используя лемму 8 и переписывающий процесс τ , второе равенство из (14) перепишем следующим образом:

$$\tau(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{-4k}F_1F_2)(\tau(F_4))^{-1}\tau(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{4k}F_1F_2)(\tau(d))^k\tau(F_4) = (\tau(\psi_2(\sigma_4^2, d)))^k,$$

и так как $\tau(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{4k}F_1F_2) = \varphi_2^k(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2)$ получаем

$$\varphi_2^{-k}(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2)(\tau(F_4))^{-1}\varphi_2^k(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2)(\tau(d))^k\tau(F_4) = \psi_2^k(s_{4,5}, \tau(d)). \quad (15)$$

Слово $\tau(F_4)$ в несократимой форме в свободных образующих $s_{4,5}, s_{3,5}, s_{2,5}, \tau(d)$ представим в виде

$$\tau(F_4) = \prod_{i=1}^n Q_i(s_{4,5}, \tau(d))P_i(s_{2,5}, s_{3,5}),$$

где $Q_1(s_{4,5}, \tau(d))$ и $P_n(s_{2,5}, s_{3,5})$ могут быть равны единице. Используя равенство (1), имеем

$$\begin{aligned} & \varphi_2^{-k}(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2) \left(\prod_{i=n}^1 P_i^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}) Q_i^{-1}(s_{4,5}, \tau(d)) \varphi_2^k(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2) \right) \\ &= \prod_{i=n}^1 P_i'^{-1}(s_{1,5}, s_{2,5}, s_{3,5}) Q_i^{-1}(s_{4,5}, \tau(d)), \end{aligned}$$

где $P_i'^{-1} = \varphi_2^{-k}(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2) P_i^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}) \varphi_2^k(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2)$, $i = 1, \dots, n$, $s_{1,5}$ можно записать как $s_{1,5} = \tau(d) s_{4,5}^{-1} s_{3,5}^{-1} s_{2,5}^{-1}$. Поэтому $P_i'^{-1}(s_{1,5}, s_{2,5}, s_{3,5}) = P_i'^{-1}(\tau(d) s_{4,5}^{-1} s_{3,5}^{-1} s_{2,5}^{-1}, s_{2,5}, s_{3,5})$. Представим теперь $P_i'^{-1}$ в несократимой форме в свободных образующих $s_{2,5}, s_{3,5}, s_{4,5}, \tau(d)$ подгруппы U_4 :

$$\begin{aligned} P_i'^{-1} &= (\tau(d) s_{4,5}^{-1})^{t_{i,1}} P_{i,1}'^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}) (\tau(d) s_{4,5}^{-1})^{t_{i,2}} P_{i,2}'^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}) \dots \\ &\dots \times (\tau(d) s_{4,5}^{-1})^{t_{i,m_i}} P_{i,m_i}'^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}). \end{aligned} \quad (16)$$

Подставим полученное выражение (16) в левую часть равенства (15). Имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{i=n}^1 (\tau(d) s_{4,5}^{-1})^{t_{i,1}} P_{i,1}'^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}) (\tau(d) s_{4,5}^{-1})^{t_{i,2}} \right. \\ & \quad \times P_{i,2}'^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}) \dots (\tau(d) s_{4,5}^{-1})^{t_{i,m_i}} P_{i,m_i}'^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}) \\ & \quad \times Q_i^{-1}(s_{4,5}, \tau(d)) \left. \right) (\tau(d))^k \prod_{i=1}^n Q_i(s_{4,5}, \tau(d)) P_i(s_{2,5}, s_{3,5}) \\ &= \psi_2^k(s_{4,5}, \tau(d)). \end{aligned} \quad (17)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} & \prod_{i=n}^1 (\tau(d)s_{4,5}^{-1})^{t_{i,1}} P'^{-1}_{i,1}(s_{2,5}, s_{3,5}) (\tau(d)s_{4,5}^{-1})^{t_{i,2}} \\ & \quad \times P'^{-1}_{i,2}(s_{2,5}, s_{3,5}) \dots (\tau(d)s_{4,5}^{-1})^{t_{i,m_i}} P'^{-1}_{i,m_i}(s_{2,5}, s_{3,5}) \\ & \quad \times Q_i^{-1}(s_{4,5}, \tau(d)) = T, \\ & \prod_{i=1}^n Q_i(s_{4,5}, \tau(d)) P_i(s_{2,5}, s_{3,5}) = S. \end{aligned}$$

Тогда (17) примет вид

$$T(\tau(d))^k S = \psi_2^k(s_{4,5}, \tau(d)).$$

Выполним сокращения в T в свободной группе $\langle \tau(d), s_{2,5}, s_{3,5}, s_{4,5} \rangle$, причем сокращения между Q_i и $(\tau(d)s_{4,5}^{-1})^t$ будем выполнять следующим образом. Если

$$(Q_i(\tau(d)s_{4,5}^{-1})^t)^\eta = (Q'_i s_{4,5}^{-1}(\tau(d)s_{4,5}^{-1})^{t'})^\eta, \quad |t'| < |t|, \quad \eta = \pm 1,$$

либо

$$(Q_i(\tau(d)s_{4,5}^{-1})^t)^\varepsilon = (Q'_i(\tau(d))^{-1}(\tau(d)s_{4,5}^{-1})^{t'})^\varepsilon, \quad |t'| < |t|, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

то в первом случае к Q'_i присоединяем $s_{4,5}^{-1}$, во втором — $(\tau(d))^{-1}$. При этом $|Q'_i| \leq |Q_i|$. В результате выполненных сокращений возможны следующие случаи:

- 1) $T = 1$;
- 2) $T = T_1 P(s_{2,5}, s_{3,5})$;
- 3) $T = T_1 P(s_{2,5}, s_{3,5}) (\tau(d)s_{4,5}^{-1})^p Q'(\tau(d), s_{4,5}^{-1})$;
- 4) $T = T_1 (\tau(d)s_{4,5}^{-1})^p$, $p \neq 0$.

В 1-м случае, так как $\sum_{j=1}^n |Q_j| \leq 2|F_4| < k$, для выполнения равенства (17) в рассматриваемой свободной подгруппе необходимо, чтобы $P_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, так как в противном случае в левой части (17) будет стоять несократимое слово в свободных образующих $s_{2,5}, s_{3,5}, s_{4,5}, \tau(d)$, а справа в $s_{4,5}, \tau(d)$.

Случай 2) аналогичен случаю 1).

В случае 3) в силу того, что $|Q'| \leq 2|F_4| < k$, сокращение между T и $(\tau(d))^k$ может прийти до $(\tau(d)s_{4,5}^{-1})^p$ и сократится только один образующий $(\tau(d))^\varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1$), а между $(\tau(d))^k$ и S полностью сократится Q_i . Но в силу выбора k для выполнения (17), как и в рассмотренных выше случаях, необходимо, чтобы $P_i = 1$, $i = 1, \dots, n$.

Случай 4) аналогичен случаю 3). Из приведенных рассуждений следует доказательство леммы.

ЛЕММА 11. *Элемент Z , удовлетворяющий системе (5), имеет вид $Z = \Delta'^{2p} \Delta^{2n} L_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4) L_2(\sigma_2^4, d)$, где Δ' — фундаментальный элемент B_3 , Δ — фундаментальный элемент B_5 , $p, n \in \mathbb{Z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $Z = F_1 F_2 F_3 F_4$, $F_i \in U_i$. По лемме 6 $F_1 F_2 = \Delta'^{2k} \times L_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4)$, из леммы 7 $\tau(F_3) = (s_{1,4} s_{2,4} s_{3,4})^t$, а $F_3 = (\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3)^t$, где $t \in \mathbb{Z}$. Известно, что $\Delta_{B_{n+1}}^{2b} = (\sigma_n \dots \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_n)^b \Delta_{B_n}^{2b}$. Тогда $\Delta^{2t} = d^t (\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3)^t \Delta'^{2t}$, откуда

$$F_3 = \Delta^{2t} d^{-t} \Delta'^{-2t}. \quad (18)$$

По лемме 10 $F_4 = L_2(\sigma_4^2, d)$. Поэтому

$$Z = \Delta'^{2k} L_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4) \Delta^{2t} d^{-t} \Delta'^{-2t} L_2(\sigma_4^2, d) = \Delta'^{2p} \Delta^{2n} L_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4) L_2(\sigma_4^2, d).$$

Из леммы 11 следует доказательство теоремы 3.

Пусть H – произвольная конечно-порожденная подгруппа из $\Pi = \langle \sigma_1^4, \sigma_2^4 \rangle \times \langle \sigma_4^2, d \rangle$ с образующими $a_1, a_2, \dots, a_n$, имеющими вид

$$a_i = L_i(\sigma_1^4, \sigma_2^4) M_i(\sigma_4^2, d), \quad i = 1, \dots, n.$$

Подгруппу H_1 , порожденную $L_i(\sigma_1^4, \sigma_2^4)$, $i = 1, \dots, n$, будем называть проекцией H на $\Pi_1 = \langle \sigma_1^4, \sigma_2^4 \rangle$, а подгруппу H_2 , порожденную $M_i(\sigma_4^2, d)$, $i = 1, \dots, n$, – проекцией H на $\Pi_2 = \langle \sigma_4^2, d \rangle$.

ТЕОРЕМА 4. Если H_1 и H_2 не являются циклическими, то $N_{R_5}(H) \subset N_{R_5}(\Pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать L_i , $i = 1, \dots, n$, свободными образующими. Пусть $Z \in N_{R_5}(H)$. Тогда

$$Z^{-1} L_i(\sigma_1^4, \sigma_2^4) M_i(\sigma_4^2, d) Z = \varphi_i(\sigma_1^4, \sigma_2^4) \psi_i(\sigma_4^2, d), \quad i = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Представим Z в виде $Z = F_1 F_2 F_3 F_4$. Тогда (19) примет вид

$$F_4^{-1} F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} L_i(\sigma_1^4, \sigma_2^4) M_i(\sigma_4^2, d) F_1 F_2 F_3 F_4 = \varphi_i(\sigma_1^4, \sigma_2^4) \psi_i(\sigma_4^2, d), \quad i = 1, \dots, n. \quad (20)$$

ЛЕММА 12. Система (20) эквивалентна системе

$$F_2^{-1} F_1^{-1} L_i F_1 F_2 = \varphi_i(\sigma_1^4, \sigma_2^4), \quad i = 1, \dots, n, \quad (21)$$

$$(F_2^{-1} F_1^{-1} L_i^{-1} F_1 F_2) F_3^{-1} (F_2^{-1} F_1^{-1} L_i F_1 F_2) F_3 = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (22)$$

$$(F_2^{-1} F_1^{-1} L_i^{-1} F_1 F_2) F_4^{-1} (F_2^{-1} F_1^{-1} L_i F_1 F_2) \times F_3^{-1} M_i F_3 F_4 = \psi_i(\sigma_4^2, d), \quad i = 1, \dots, n. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы аналогично доказательству леммы 4.

Аналогично доказательству лемм 6 и 7 доказывается, что $F_1 F_2 = \Delta'^{2l} L_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4)$, $l \in \mathbb{Z}$, $F_3 = (\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3)^t$, $t \in \mathbb{Z}$, $\tau(F_3) = (s_{1,4} s_{2,4} s_{3,4})^t$.

Используя равенство (18), систему (23) можно переписать в виде

$$(F_2^{-1} F_1^{-1} L_i^{-1} F_1 F_2) F_4^{-1} (F_2^{-1} F_1^{-1} L_i F_1 F_2) d^t M_i d^{-t} F_4 = \psi_i(\sigma_4^2, d), \quad i = 1, \dots, n. \quad (24)$$

Обозначим $M'_i = d^t M_i d^{-t}$.

ЛЕММА 13. Если $F_4 \in U_4$ удовлетворяет системе (24), то $F_4 = F_4(\sigma_4^2, d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть снова $|F_4|$ – длина слова $F_4 \in U_4$ в свободных образующих $s_{2,5}, s_{3,5}, s_{4,5}, \tau(d)$. Возьмем $k \in \mathbb{N}$ такое, что $k > 5|F_4|$. Возведем равенства (19) в k -ю степень. Пусть $\tau(F_4) = \prod_{i=1}^n Q_i(s_{4,5}, \tau(d)) P_i(s_{2,5}, s_{3,5})$, где $Q_1(s_{4,5}, \tau(d))$ и $P_n(s_{2,5}, s_{3,5})$ могут быть равны единице.

Проводя рассуждения, аналогичные изложенным в первой части доказательства леммы 10, и учитывая лемму 12, получаем равенства

$$T_i(\tau(M'_i))^k S = \psi_i^k(\sigma_4^2, \tau(d)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (25)$$

Выполнив в T_i все указанные выше сокращения, получим следующие случаи.

1) $T_i = 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$, т.е. $(\tau(M'_i))^k S = \psi_i^k(\sigma_4^2, \tau(d))$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Из этих равенств следует, что S не содержит подслов вида $N(s_{2,5}, s_{3,5})$.

2) $T_i = T_{1i} P_i(s_{2,5}, s_{3,5})$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Подставляя в (25), получаем, что S не содержит подслов вида $N(s_{2,5}, s_{3,5})$.

3) $T_i = T_{1i} P_i(s_{2,5}, s_{3,5}) Q'_i(s_{4,5}, \tau(d))$, $i \in \{1, \dots, n\}$. В силу того, что $\sum |Q_i| \leq |F_4|$, для выполнения (25) требуется, чтобы S не содержало подслов вида $N(s_{2,5}, s_{3,5})$.

В дальнейшем положим $R = \tau(d) s_{4,5}^{-1}$.

4) $T_i = T_{1i} P_i(s_{2,5}, s_{3,5}) R^{p_i}$. В данном случае возможны два варианта:

а) S не начинается на $Q(s_{4,5}, \tau(d))$ для $i = 1, \dots, n$;

б) $S = Q(s_{4,5}, \tau(d)) P^*(s_{2,5}, s_{3,5}) S_1$.

Случай а) невозможен для всех i , так как все M_i лежали бы в одной циклической группе, что противоречит условию.

Для случая б) равенство (25) имеет вид

$$T_{1i} P_i(s_{2,5}, s_{3,5}) R^{p_i} (\tau(M'_i))^k Q(s_{4,5}, \tau(d)) P^*(s_{2,5}, s_{3,5}) S_1 = \psi_i^k(s_{4,5}, \tau(d)),$$

где S_1 не начинается на $P^*(s_{2,5}, s_{3,5})$. Для выполнения данного равенства требуется, чтобы

$$(\tau(M'_i))^k = R^{-p_i} Q^{-1}, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (26)$$

Из равенства (26) следует, что $\overline{M_i} = R^{\alpha_i}$ либо $\overline{M_i} = R^{*\alpha_i}$, где R^* – циклическая перестановка R , $\overline{M_i}$ – циклически несократимая часть M_i , т.е. $M_i = A_i \overline{M_i} A_i^{-1}$. Пусть $\overline{M_i} = R^{\alpha_i}$ для всех i . По условию теоремы существует M_j , $j \neq i$, такое, что $M_j = B R^{\beta_j} B^{-1}$, $M_i = A R^{\alpha_i} A^{-1}$, $A \neq B R^x$, где $x \in \mathbb{Z}$. Выберем числа $\delta, \gamma \in \mathbb{Z}$ таким образом, чтобы произведение $M_i^\delta M_j^\gamma$ имело вид $a R^n b R^m c$, где b отлично от единицы и не содержало ни слева, ни справа степени R . Очевидно, $Z = F_1 F_2 F_3 F_4$ должно удовлетворять соотношению

$$F_4^{-1} F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} (L_i^\delta L_j^\gamma M_i^\delta M_j^\gamma)^k F_1 F_2 F_3 F_4 = \varphi_i^\delta \varphi_j^\gamma \psi_i^\delta \psi_j^\gamma. \quad (27)$$

Для равенства (27) проведем все вышеизложенные рассуждения. Тогда (25) примет вид

$$T_{ij}(\tau(d^t M_i^\delta M_j^\gamma d^{-t}))^k S = \psi_i^{\delta k} \psi_j^{\gamma k}, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (28)$$

Но для этого равенства случай б) возможен только тогда, когда S не содержит подслов $N(s_{2,5}, s_{3,5})$, так как в данном случае сокращение не проходит через $(\tau(d^t M_i^\delta M_j^\gamma d^{-t}))^k$.

Пусть теперь все $\overline{M_i} = R^{*\alpha_i}$. Тогда по условию теоремы вновь существует $M_j = BR^{*\beta_j}B^{-1}$, $j \neq i$. Так как $M_i = AR^{*\alpha_i}A^{-1}$, можно выбрать числа $\delta, \gamma \in \mathbb{Z}$ таким образом, чтобы произведение $M_i^\delta M_j^\gamma$ имело вид $aR^{*n}bR^{*m}c$, где b отлично от степени R^* , не равно единице и не содержит ни слева, ни справа степени R^* . В этом случае также можно показать, что соотношение вида (28) невозможно.

Пусть теперь $\overline{M_i} = R^{\alpha_i}$, $\overline{M_j} = R^{*\beta_j}$, т.е. $M_i = AR^{\alpha_i}A^{-1}$, а $M_j = BR^{*\beta_j}B^{-1}$. В данном случае также можно подобрать δ и γ так, чтобы произведение $M_i^\delta M_j^\gamma$ имело вид $aR^{\alpha}bR^{*\beta}c$, так как по условию теоремы все M_i не лежат в одной циклической группе. В этой ситуации для выполнения (28) требуется, чтобы S не содержало подслов $N(s_{2,5}, s_{3,5})$.

5) Теперь рассмотрим случай, когда

$$T_i = T_{1i}P_i(s_{2,5}, s_{3,5})R^{\alpha_{0i}}Q'_{1i}(s_{4,5}, \tau(d))R^{\alpha_{1i}} \dots Q'_{ni}(s_{4,5}, \tau(d))R^{\alpha_{ni}},$$

где α_{ni} может быть равно нулю. Покажем, что в произведениях $Q'_{ji}R^{\alpha_{ji}}Q'_{(j+1)i}$, $1 \leq i < n$, и в $Q'_{ni}(s_{4,5}, \tau(d))R^{\alpha_{ni}}$ показатели α_{pi} не превосходят $\sum |Q_i|$. Действительно, в слове $\varphi^{-k}(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2)P(s_{2,5}, s_{3,5})\varphi^k(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2)$ на основании равенств (1) R возникает в суммарной нулевой степени, а поэтому при выполнении сокращений R с $Q_i(s_{4,5}, \tau(d))$ в слове T_i указанным выше способом суммарная степень R по модулю не превосходит $\sum |Q_i|$. Отсюда следует, что длина слова $Q'_{1i}R^{\alpha_{1i}} \dots Q'_{ni}R^{\alpha_{ni}}$ ограничена длиной $2|F_4|$.

Если α_{0i} равно k , то доказательство проводится аналогично случаю 4. Если α_{0i} мало, то доказательство очевидно. Лемма доказана.

ЛЕММА 14. Элемент Z , удовлетворяющий системе (19), имеет вид $Z = \Delta'^{2p} \times \Delta^{2n} L_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4) L_2(\sigma_4^2, d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 11.

Из леммы 14 следует доказательство теоремы.

ЛЕММА 15 [6]. Пусть H_1, H_2 – две подгруппы из B_m . Если H_1 и H_2 сопряжены в B_n ($n > m$), то они сопряжены и в B_m .

Пусть a_ν – образующие H_1 . Из леммы 15 следует, что если $a_\nu z = z w_\nu(b_\mu)$, где $w_\nu(b_\mu)$ – слова из H_2 , а $z \in B_n$, то существует элемент $z' \in B_m$ такой, что

$$a_\nu z' = z' w_\nu(b_\mu).$$

Пусть H – подгруппа из B_m и $m < n$.

ЛЕММА 16. Имеем $N_{B_m}(H)/\mathbb{C}_{B_m}(H) \simeq N_{B_n}(H)/\mathbb{C}_{B_n}(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть r_i , $i \in J$, – представители смежных классов $N_{B_m}(H)$ по $\mathbb{C}_{B_m}(H)$, т.е. $N_{B_m}(H)/\mathbb{C}_{B_m}(H) = \bigcup_{i \in J} r_i \mathbb{C}_{B_m}(H)$. Зададим отображение $\varphi: N_{B_m}(H)/\mathbb{C}_{B_m}(H) \rightarrow N_{B_n}(H)/\mathbb{C}_{B_n}(H)$ следующим образом: $\varphi(r_i \mathbb{C}_{B_m}(H)) = r_i \mathbb{C}_{B_n}(H)$. Проверим сюръективность данного отображения. Пусть $r_0 \mathbb{C}_{B_n}(H) \in N_{B_n}(H)/\mathbb{C}_{B_n}(H)$, где $r_0 \in N_{B_n}(H)$. Если $a_1, \dots, a_n, \dots$ – образующие H , то

$$r_0 a_i r_0^{-1} = W_i(a_\nu). \quad (29)$$

По лемме 15 существует $r'_m \in N_{B_m}(H)$ такое, что

$$r'_m a_i r_m'^{-1} = W_i(a_\nu). \quad (30)$$

Из (29) и (30) имеем $r_m'^{-1} r_0 = a_i^{-1} r_m'^{-1} r_0 a_i$, откуда $a_i r_m'^{-1} r_0 = r_m'^{-1} r_0 a_i$, т.е. $r_0 = r_m' z'$, где $z' \in \mathbb{C}_{B_n}(H)$. Пусть r_m – представитель смежного класса, содержащего r'_m . Тогда из последнего равенства $r_0 = r_m z$, где $z \in \mathbb{C}_{B_n}(H)$. Таким образом, прообраз класса $r_0 \mathbb{C}_{B_n}(H)$ есть класс $r_m \mathbb{C}_{B_m}(H)$. Инъективность данного отображения очевидна. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Нормализатор подгруппы $H \subset B_m$ в B_n , $n > m$, является расширением централизатора подгруппы H в B_n с помощью факторгруппы $N_{B_m}(H)/\mathbb{C}_{B_m}(H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 16. Из теоремы 5 получаем, что нормализаторы подгрупп, рассматриваемых в теоремах 3 и 4, конечно порождены в группе B_n , $n > 5$.

Выражаем благодарность рецензенту за внимательное отношение к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Марков А. А. Основы алгебраической теории кос // Тр. МИАН СССР. 1945. Т. 16. С. 1–54.
- [2] Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
- [3] Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некотором классе групп. I // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1990. С. 40–52.
- [4] Бардаков В. Г. К теории групп кос // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 6. С. 3–42.
- [5] Гурзо Г. Г. О централизаторах конечных множеств элементов группы кос // Матем. заметки. 1985. Т. 37. № 1. С. 3–6.
- [6] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О неразрешимости проблемы сопряженности подгрупп в группе крашенных кос R_5 // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 1. С. 15–22.
- [7] Михайлова К. А. Проблема вхождения для свободного произведения групп // Матем. сб. 1968. Т. 75. № 2. С. 199–210.
- [8] Акименков А. М. О подгруппах группы кос B_4 // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 6. С. 3–13.

Тульский государственный университет им. Л. Н. Толстого

Поступило
27.06.2001