Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Филевич, М. Н. Шеремета, Правильно растущие целые ряды Дирихле, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 118–131

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:35:21

УДК 517.53

ПРАВИЛЬНО РАСТУЩИЕ ЦЕЛЫЕ РЯДЫ ДИРИХЛЕ

П. В. Филевич, М. Н. Шеремета

Для целого ряда Дирихле установлены условия на коэффициенты и показатели, при которых логарифмы максимального члена и максимума модуля являются правильно изменяющимися функциями порядка $\rho \in [1, +\infty)$, а центральный показатель – правильно изменяющейся функцией порядка $\rho - 1$.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Положительная измеримая на $[a, +\infty)$ функция l называется [1] *медленно меняющейся*, если $l(cx) \sim l(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ для любого $c \in (0, +\infty)$, и называется [1] *правильно меняющейся порядка* $\rho \in [0, +\infty)$, если $l(x) = x^\rho \alpha(x)$, где α – медленно меняющаяся функция.

Для целой функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ пусть $M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n: n \geq 0\}$ – максимальный член и $\nu_f(r) = \max\{n: |a_n| r^n = \mu_f(r)\}$ – центральный индекс. По теореме Бореля $\ln M_f(r)$ является медленно возрастающей функцией тогда и только тогда, когда $\ln \mu_f(r)$ является медленно возрастающей функцией, а в [2] указано необходимое и достаточное условие на коэффициенты a_n для того, чтобы $\ln \mu_f(r)$ была медленно возрастающей функцией и поставлена задача о медленном возрастании $\nu_f(r)$. Эта задача решена в [3], где получен критерий медленного возрастания центрального индекса в терминах коэффициентов.

Непосредственным обобщением степенных разложений целых функций являются целые (абсолютно сходящиеся в $\mathbb{C}$) ряды Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s \lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

где $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_n \uparrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$). Для ряда (1) положим $M(\sigma, F) = \max\{|F(\sigma + it)|: t \in \mathbb{R}\}$, и пусть $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma \lambda_n\}: n \geq 0\}$ – максимальный член, $\nu(\sigma, F) = \max\{n: \exp\{\sigma \lambda_n\} = \mu(\sigma, F)\}$ – центральный индекс, а $\Lambda(\sigma, f) = \lambda_{\nu(\sigma, F)}$ – центральный показатель ряда (1). Так как $\ln M(\sigma, F) \geq \ln \mu(\sigma, F) \geq K\sigma$, $K \equiv \text{const} > 0$, то $\ln M(\sigma, F)$ и $\ln \mu(\sigma, F)$ не могут быть медленно возрастающими функциями. Однако $\Lambda(\sigma, f)$ может быть медленно неубывающей, а функции $\ln M(\sigma, F)$ и $\ln \mu(\sigma, F)$ могут быть правильно меняющимися функциями порядка $\rho \geq 1$. Мы покажем, что $\ln \mu(\sigma, F)$ – правильно меняющаяся функция порядка ρ тогда и только тогда, когда $\Lambda(\sigma, F)$ – правильно меняющаяся функция порядка $\rho - 1$, а для правильного изменения функции $\ln \mu(\sigma, F)$ справедлив следующий критерий.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\rho \in [1, +\infty)$. Функция $\ln \mu(\sigma, F)$ правильно меняющаяся порядка ρ тогда и только тогда, когда существует возрастающая последовательность $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ неотрицательных целых чисел такая, что при любом $k \geq 0$

$$\kappa_k := \frac{\ln |a_{n_k}| - \ln |a_{n_{k+1}}|}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \uparrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty, \quad (2)$$

$$|a_n| \exp\{\kappa_k \lambda_n\} \leq |a_{n_k}| \exp\{\kappa_k \lambda_{n_k}\}, \quad n_k < n < n_{k+1}, \quad (3)$$

$$c_k := \frac{\kappa_k \lambda_{n_{k+1}}}{\kappa_k \lambda_{n_{k+1}} + \ln |a_{n_{k+1}}|} \rightarrow \rho, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$d_k := \frac{\kappa_k \lambda_{n_k}}{\kappa_k \lambda_{n_k} + \ln |a_{n_k}|} \rightarrow \rho, \quad k \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Функции $\ln M(\sigma, F)$ и $\ln \mu(\sigma, F)$ могут не быть одновременно правильно меняющимися функциями одного и того же порядка $\rho \geq 1$, на что указывают следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для любого $\rho \in (1, +\infty)$ существует целый ряд Дирихле (1) такой, что $\ln \mu(\sigma, F) \sim \sigma \ln \sigma$ и $\ln M(\sigma, F) \sim (\rho - 1)\rho^{-1}\rho^{-\rho}\sigma^{\rho}$ при $\sigma \rightarrow +\infty$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для любых $1 < \rho_1 < \rho_2 < +\infty$ существует целый ряд Дирихле (1) такой, что $\ln \mu(\sigma, F) \sim A_1 \sigma^{\rho_1}$ и $\ln M(\sigma, F) \sim A_2 \sigma^{\rho_2}$ при $\sigma \rightarrow +\infty$, где $A_1, A_2 \equiv \text{const} > 0$.

Из этих утверждений вытекает существование целого ряда Дирихле такого, что $\ln \mu(\sigma, F)/\sigma$ – медленно меняющаяся функция и $\ln M(\sigma, F)/\sigma$ не является медленно меняющейся функцией, а также существование целого ряда Дирихле такого, что $\ln M(\sigma, F)$ – правильно меняющаяся функция порядка ρ , а $\ln \mu(\sigma, F)$ не является правильно меняющейся функцией того же порядка. Для построенных при доказательстве утверждений 1 и 2 целых рядов Дирихле

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \mu(\sigma, F)}{\ln \sigma} = \rho_1 < \rho_2 = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(\sigma, F)}{\ln \sigma}.$$

Возникают вопросы о существовании целого ряда Дирихле такого, что $\ln M(\sigma, F)/\sigma$ – медленно возрастающая функция, а $\ln \mu(\sigma, F)/\sigma$ не является медленно возрастающей функцией, и также о существовании такого целого ряда Дирихле, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \mu(\sigma, F)}{\ln \sigma} = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(\sigma, F)}{\ln \sigma} = \rho \quad (6)$$

и функции $\ln M(\sigma, F)$ и $\ln \mu(\sigma, F)$ не являются одновременно правильно меняющимися функциями порядка ρ . Положительные ответы на эти вопросы содержатся в следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для любого $\rho \in [1, +\infty)$ существует целый ряд Дирихле (1) такой, что выполняется (6), $\ln M(\sigma, F)$ – правильно меняющаяся функция порядка ρ , а $\ln \mu(\sigma, F)$ не является правильно меняющейся функцией того же порядка.

Показатели построенных при доказательстве утверждений 1–3 рядов Дирихле возрастают очень медленно (либо $\lambda_n = \ln \ln n$, либо $\lambda_n \sim (\ln n)^{(\rho-1)/\rho}$). Если же они растут несколько быстрее, то функции $\ln M(\sigma, F)$ и $\ln \mu(\sigma, F)$ являются одновременно правильно меняющимися функциями одного и того же порядка $\rho \geq 1$, на что указывает следующая

ТЕОРЕМА 2. Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} < \frac{\rho}{\rho - 1}, \quad \rho > 1, \quad (7)$$

то $\ln M(\sigma, F)$ – правильно меняющаяся функция порядка ρ тогда и только тогда, когда $\ln \mu(\sigma, F)$ – правильно меняющаяся функция того же порядка.

Если же $\ln \ln n = O(\ln \lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$, то $\ln M(\sigma, F)/\sigma$ – медленно меняющаяся функция тогда и только тогда, когда $\ln \mu(\sigma, F)/\sigma$ – медленно меняющаяся функция.

2. Доказательство теоремы 1. Начнем со следующего утверждения, имеющего самостоятельный интерес.

ЛЕММА 1. Пусть $\rho \in [1, +\infty)$. Следующие утверждения равносильны:

- а) $\ln \mu(\sigma, F)$ – правильно меняющаяся функция порядка ρ ;
- б) $\Lambda(\sigma, F)$ – правильно меняющаяся функция порядка $\rho - 1$;
- в) $\sigma \Lambda(\sigma, F)/\ln \mu(\sigma, F) \rightarrow \rho$, $\sigma \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как [4, с. 182]

$$\ln \mu(\sigma, F) = \ln \mu(\sigma_0, F) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \Lambda(x, F) dx, \quad \sigma \geq \sigma_0, \quad (8)$$

для $c > 1$ имеем

$$(c - 1)\sigma \Lambda(\sigma, F) \leq \ln \mu(c\sigma, F) - \ln \mu(\sigma, F) \leq (c - 1)\sigma \Lambda(c\sigma, F),$$

так что

$$\frac{(c - 1)\sigma \Lambda(\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} \leq \frac{\ln \mu(c\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} - 1, \quad 1 - \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\ln \mu(c\sigma, F)} \leq \frac{(c - 1)\sigma \Lambda(c\sigma, F)}{\ln \mu(c\sigma, F)},$$

т. е.

$$\frac{c}{c - 1} \left(1 - \frac{\ln \mu(\sigma/c, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} \right) \leq \frac{\sigma \Lambda(\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} \leq \frac{1}{c - 1} \left(\frac{\ln \mu(c\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} - 1 \right). \quad (9)$$

Заметим, что функция l является правильно меняющейся порядка ρ тогда и только тогда, когда $l(cx)/l(x) \rightarrow c^\rho$ при $x \rightarrow +\infty$ для любого $c \in (0, +\infty)$. Поэтому, если $\ln \mu(\sigma, F)$ – правильно меняющаяся функция порядка ρ , то $\ln \mu(c\sigma, F)/\ln \mu(\sigma, F) - 1 \rightarrow c^\rho - 1$ при $\sigma \rightarrow +\infty$ и из (9) получаем

$$(1 + o(1)) \frac{c}{c - 1} \left(1 - \frac{1}{c^\rho} \right) \leq \frac{\sigma \Lambda(\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} \leq (1 + o(1)) \frac{c^\rho - 1}{c - 1}, \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Устремляя здесь $c \downarrow 1$, получаем утверждение в).

Наоборот, если выполнено условие в), то из (8) имеем

$$\ln \mu(\sigma, F) = (1 + o(1)) \rho \int_0^{\sigma} \frac{\ln \mu(x, F)}{x} dx, \quad \sigma \rightarrow +\infty, \quad (10)$$

и достаточно показать, что функция

$$\alpha(\sigma) = \frac{1}{\sigma^\rho} \int_0^\sigma \frac{\ln \mu(x, F)}{x} dx$$

является медленно меняющейся, т. е. в силу ее непрерывной дифференцируемости достаточно показать, что $\sigma \alpha'(\sigma) / \alpha(\sigma) \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow +\infty$. Но в силу (10)

$$\frac{\sigma \alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma)} = \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\int_0^\sigma (\ln \mu(x, F) / x) dx} - \rho \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, утверждения а) и в) эквивалентны. В силу этого

$$\frac{\sigma \Lambda(\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} \rightarrow \rho, \quad \frac{c \sigma \Lambda(c \sigma, F)}{\ln \mu(c \sigma, F)} \rightarrow \rho, \quad \sigma \rightarrow +\infty,$$

и

$$\frac{\Lambda(c \sigma, F)}{\Lambda(\sigma, F)} = (1 + o(1)) \frac{\ln \mu(c \sigma, F)}{c \ln \mu(\sigma, F)} = (1 + o(1)) c^{\rho-1}, \quad \sigma \rightarrow +\infty,$$

т. е. $\Lambda(\sigma, F)$ – правильно меняющаяся функция порядка $\rho - 1$.

Наконец, если $\Lambda(\sigma, F)$ – правильно меняющаяся функция порядка $\rho - 1$, то в силу (8)

$$\begin{aligned} \ln \mu(c \sigma, F) &= \int_0^{c \sigma} \Lambda(x, F) dx + O(1) = c \int_0^\sigma \Lambda(c x, F) dx + O(1) \\ &= (1 + o(1)) c^\rho \int_0^\sigma \Lambda(x, F) dx = (1 + o(1)) c^\rho \ln \mu(\sigma, F), \quad \sigma \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

так что $\ln \mu(\sigma, F)$ – правильно меняющаяся функция порядка ρ . Лемма 1 полностью доказана.

При $\rho = 1$ из леммы 1 получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Равносильными являются следующие предложения:*

- а) $\Lambda(\sigma, F)$ – медленно убывающая функция;
- б) $\frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma}$ – медленно меняющаяся функция;
- в) $\sigma \Lambda(\sigma, F) / \ln \mu(\sigma, F) \rightarrow 1$, $\sigma \rightarrow +\infty$.

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 1. Пусть сначала функция $\ln \mu(\sigma, F)$ является правильно меняющейся порядка $\rho \in [1, +\infty)$, а $(n_k)_{k=0}^\infty$ – возрастающая последовательность всех значений центрального индекса $\nu(\sigma, F)$. Докажем, что для этой последовательности $(n_k)_{k=0}^\infty$ выполняются соотношения (2)–(5).

Для любого $k \geq 0$ через $\varkappa_k$ обозначим точку разрыва $\nu(\sigma, F)$, в которой $\nu(\varkappa_k - 0, F) = n_k$ и $\nu(\varkappa_k, F) = n_{k+1}$. Тогда непосредственно из определений максимального члена и центрального индекса (см., например, [4, с. 180–183]) следует, что, во-первых, $(\varkappa_k)_{k=0}^\infty$ – возрастающая к $+\infty$ последовательность, и, во-вторых,

$$\Lambda(\sigma, F) = \lambda_{n_{k+1}}, \quad \mu(\sigma, F) = |a_{n_{k+1}}| \exp\{\sigma \lambda_{n_{k+1}}\} \quad (11)$$

для всех $\sigma \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1})$, причем

$$\mu(\varkappa_k, F) = |a_{n_{k+1}}| e^{\varkappa_k \lambda_{n_{k+1}}} = |a_{n_k}| e^{\varkappa_k \lambda_{n_k}}.$$

Отсюда немедленно получаем (2), а в силу неравенства $|a_n| \exp\{\varkappa_k \lambda_n\} \leq \mu(\varkappa_k, F)$ имеем (3).

Далее, согласно утверждению в) леммы 1

$$c_k = \frac{\varkappa_k \Lambda(\varkappa_k, F)}{\ln \mu(\varkappa_k, F)} \rightarrow \rho$$

при $k \rightarrow \infty$, т.е. выполняется (4). Наконец, для любого фиксированного $\delta > 0$ из того же утверждения в) получаем

$$\left| \frac{\sigma \Lambda(\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} - \rho \right| \leq \delta$$

для всех $\sigma \geq \varkappa_{k(\delta)}$. Поэтому

$$|d_{k+1} - \rho| = \lim_{\sigma \uparrow \varkappa_{k+1}} \left| \frac{\sigma \lambda_{n_{k+1}}}{\sigma \lambda_{n_{k+1}} + \ln |a_{n_{k+1}}|} - \rho \right| = \lim_{\sigma \uparrow \varkappa_{k+1}} \left| \frac{\sigma \Lambda(\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} - \rho \right| \leq \delta$$

для всех $k \geq k(\delta)$, откуда в силу произвольности δ имеем (5). Необходимость соотношений (2)–(5) доказана.

Наоборот, пусть существует возрастающая последовательность $(n_k)_{k=0}^\infty$ такая, что при $k \geq 0$ выполняются соотношения (2)–(5).

Так как асимптотическое поведение максимального члена ряда (1) не зависит от конечного числа коэффициентов, можем считать, что $a_0 = \dots = a_{n_0-1} = 0$. Тогда, как хорошо известно, из (2) и (3) немедленно следуют равенства (11) для всех $\sigma \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1})$.

Пусть k_0 – фиксированное целое число такое, что $|a_n| < 1$ для всех $n \geq n_{k_0}$. Тогда если $k \geq k_0$, то на полуинтервале $[\varkappa_k, \varkappa_{k+1})$ выражение

$$\frac{\sigma \Lambda(\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} = \frac{\sigma \lambda_{n_{k+1}}}{\sigma \lambda_{n_{k+1}} + \ln |a_{n_{k+1}}|}$$

монотонно убывает, а поэтому

$$d_{k+1} = \frac{\varkappa_{k+1} \lambda_{n_{k+1}}}{\varkappa_{k+1} \lambda_{n_{k+1}} + \ln |a_{n_{k+1}}|} \leq \frac{\sigma \Lambda(\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} \leq \frac{\varkappa_k \lambda_{n_{k+1}}}{\varkappa_k \lambda_{n_{k+1}} + \ln |a_{n_{k+1}}|} = c_k.$$

Устремляя k к ∞ , из (4) и (5) видим, что имеет место предположение в) леммы 1. Следовательно, функция $\ln \mu(\sigma, F)$ – правильно меняющаяся порядка ρ . Теорема 1 полностью доказана.

3. Доказательство утверждений 1–3. Нам будет нужна следующая

ЛЕММА 3 [5, с. 20–22]. Пусть h – положительная дважды непрерывно дифференцируемая на $[a, +\infty)$ функция такая, что $h'(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$), $x^2 h''(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$) и $h''(u(x)) \sim h''(x)$ при $|u(x) - x| \leq A/\sqrt{h''(x)}$ ($x \rightarrow +\infty$), где A – произвольное положительное число. Тогда функция $H(x; \sigma) = -h(x) + x\sigma$ имеет при больших значениях x единственную точку максимума $x(\sigma)$ и

$$\int_a^\infty e^{H(x; \sigma)} dx = (1 + o(1)) \sqrt{\frac{2\pi}{h''(x(\sigma))}} e^{H(x(\sigma); \sigma)}, \quad \sigma \rightarrow +\infty. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. Рассмотрим целый ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=3}^{\infty} \exp\{-\ln n - (\ln \ln n)^\alpha + s \ln \ln n\}, \quad \alpha = \frac{\rho}{\rho-1} > 1. \quad (13)$$

Легко видеть, что функция $G(x; \sigma) = -\ln x - (\ln \ln x)^\alpha + \sigma \ln \ln x$ достигает своего максимума в точке $x(\sigma)$ такой, что $\ln x(\sigma) + \alpha(\ln \ln x(\sigma))^{\alpha-1} = \sigma$, т.е. $\ln x(\sigma) = (1 + o(1))\sigma$ ($\sigma \rightarrow +\infty$). Поскольку $|\nu(\sigma, F) - x(\sigma)| < 1$, отсюда следует, что $\ln \nu(\sigma, F) = (1 + o(1))\sigma$ ($\sigma \rightarrow +\infty$) и $\Lambda(\sigma, F) = \ln \ln \nu(\sigma, F) = \ln \sigma + o(1)$ ($\sigma \rightarrow +\infty$). Поэтому, используя равенство (8), получаем соотношение $\ln \mu(\sigma, F) \sim \sigma \ln \sigma$ при $\sigma \rightarrow +\infty$. Далее, для ряда (13)

$$\begin{aligned} M(\sigma, F) &= F(\sigma) = \int_3^\infty \exp\{-\ln t - (\ln \ln t)^\alpha + \sigma \ln \ln t\} dt + O(\mu(\sigma, F)) \\ &= \int_3^\infty \exp\{-x^\alpha + (\sigma + 1)x\} dx + O(\mu(\sigma, F)), \quad \sigma \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (14)$$

Легко проверить, что функция $h(x) = x^\alpha$ удовлетворяет условиям леммы 3, функция $H(x; \sigma) = -x^\alpha + \sigma x$ имеет единственную точку максимума $x(\sigma) = (\sigma/\alpha)^{1/(\alpha-1)}$ и $H(x(\sigma); \sigma) = (\alpha-1)(\sigma/\alpha)^{\alpha/(\alpha-1)}$. Поэтому по лемме 3

$$\begin{aligned} \int_3^\infty \exp\{-x^\alpha + (\sigma + 1)x\} dx &\sim \exp\left\{(\alpha-1)\left(\frac{\sigma+1}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha-1)}\right\} \\ &\times \left(\frac{2\pi}{\alpha(\alpha-1)}\left(\frac{\sigma+1}{\alpha}\right)^{(2-\alpha)/(\alpha-1)}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

при $\sigma \rightarrow +\infty$. Отсюда и из (14) вытекает соотношение

$$\ln M(\sigma, F) \sim (\alpha-1) \left(\frac{\sigma+1}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \sim (\rho-1)^{\rho-1} \rho^{-\rho} \sigma^\rho$$

при $\sigma \rightarrow +\infty$, что и требовалось показать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2. Рассмотрим целый ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=3}^{\infty} \exp\{-\lambda_n^{\rho_1/(\rho_1-1)} - \lambda_n^{\rho_2/(\rho_2-1)} + s\lambda_n\}, \quad \lambda_n = \lambda(\ln n), \quad (15)$$

где

$$\lambda(x) = x^{(\rho_1-1)/\rho_1} - \frac{x^{\rho_3}}{\ln x}, \quad \rho_3 = \frac{\rho_2\rho_1 + 1 - 2\rho_2}{\rho_1(\rho_2 - 1)}.$$

Так как $\lambda_{n+1} - \lambda_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то $\Lambda(\sigma) = x(\sigma) + o(1)$, $\sigma \rightarrow +\infty$, где $x(\sigma)$ — точка максимума функции $G(x; \sigma) = -x^{\rho_1/(\rho_1-1)} - x^{\rho_2/(\rho_2-1)} + \sigma x$ и, как нетрудно показать,

$$x(\sigma) = (1 + o(1)) \left(\frac{\rho_1 - 1}{\rho_1} \sigma \right)^{\rho_1-1}, \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Поэтому в силу (8)

$$\ln \mu(\sigma, F) = \frac{(1 + o(1))}{\rho_1} \left(\frac{\rho_1 - 1}{\rho_1} \sigma \right)^{\rho_1-1} \sigma^{\rho_1}, \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Далее, для функции (15) имеем

$$\begin{aligned} F(\sigma) &= \int_3^{\infty} \exp\{-\lambda(\ln x)^{\rho_1/(\rho_1-1)} - \lambda(\ln x)^{\rho_2/(\rho_2-1)} + \sigma \lambda(\ln x)\} dx + O(\mu(\sigma, F)) \\ &= \int_{\ln 3}^{\infty} \exp\{-\lambda(x)^{\rho_1/(\rho_1-1)} - \lambda(x)^{\rho_2/(\rho_2-1)} + x + \sigma \lambda(x)\} \frac{d\lambda(x)}{\lambda'(x)} + O(\mu(\sigma, F)) \\ &= \int_{\lambda(\ln 3)}^{\infty} \exp\{-t^{\rho_1/(\rho_1-1)} - t^{\rho_2/(\rho_2-1)} + \lambda^{-1}(t) - \ln \lambda'(\lambda^{-1}(t)) + \sigma t\} dt \\ &\quad + O(\mu(\sigma, F)) \end{aligned}$$

при $\sigma \rightarrow +\infty$. Можно показать, что

$$\lambda^{-1}(t) = t^{\rho_1/(\rho_1-1)} + \frac{1 + o(1)}{\ln t} t^{\rho_2/(\rho_2-1)}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

и

$$\ln \lambda'(\lambda^{-1}(t)) = -\frac{1}{\rho_1 - 1} \ln t + O(1), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Поэтому

$$F(\sigma) = \int_{\lambda(\ln 3)}^{\infty} \exp\left\{-t^{\rho_2/(\rho_2-1)} + \frac{1 + o(1)}{\ln t} t^{\rho_2/(\rho_2-1)} + \sigma t\right\} dt + O(\mu(\sigma, F))$$

при $\sigma \rightarrow +\infty$. Отсюда, используя лемму 3, нетрудно получить следующее соотношение:

$$\ln F(\sigma) = \frac{(1 + o(1))}{\rho_2} \left(\frac{\rho_2 - 1}{\rho_2} \sigma \right)^{\rho_2-1} \sigma^{\rho_2}, \quad \sigma \rightarrow +\infty,$$

что и требовалось показать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3. Рассмотрим сначала случай $\rho > 1$. Выберем $n_k = [\exp_3 k]$, $q > 1$, $p \in (0, q)$ и положим $\lambda_n = (q \ln n)^{(\rho-1)/\rho}$ ($n \geq 2$), $a_0 = a_1 = 0$, $a_n = n^{-q}$ ($n \geq 2$, $n \neq n_k$) и $a_{n_k} = n_k^{-p}$ ($k \geq 1$). Тогда ряд Дирихле (1) с такими показателями и коэффициентами является целым и $F(s) = F_1(s) + F_2(s)$, где

$$F_1(s) = \sum_{n=2, n \neq n_k}^{\infty} \exp\{-q \ln n + s(q \ln n)^{(\rho-1)/\rho}\}$$

и

$$F_2(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-p \ln n_k + s(q \ln n_k)^{(\rho-1)/\rho}\}.$$

Функция $G(x; \sigma) = -q \ln x + \sigma(q \ln x)^{(\rho-1)/\rho}$ достигает своего максимума в точке

$$x(\sigma) = \exp\left\{\frac{1}{q} \left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^{\rho} \sigma^{\rho}\right\}$$

и, так как $|\nu(\sigma, F_1) - x(\sigma)| < 2$, то

$$\Lambda(\sigma, F_1) = (q \ln \nu(\sigma, F_1))^{(\rho-1)/\rho} = (1 + o(1)) \left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^{\rho-1} \sigma^{\rho-1}, \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Отсюда в силу (8) имеем

$$\ln \mu(\sigma, F_1) = \frac{(1 + o(1))}{\rho} \left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^{\rho-1} \sigma^{\rho}, \quad \sigma \rightarrow +\infty. \quad (16)$$

Обозначим

$$\varkappa_{k-1} = \frac{p \ln n_k - p \ln n_{k-1}}{(q \ln n_k)^{(\rho-1)/\rho} - (q \ln n_{k-1})^{(\rho-1)/\rho}}.$$

Тогда $\varkappa_{k-1} \uparrow +\infty$ ($k \rightarrow \infty$),

$$\varkappa_{k-1} = (1 + o(1)) p q^{-(\rho-1)/\rho} (\ln n_k)^{1/\rho}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (17)$$

и $\varkappa_k / \varkappa_{k-1} \rightarrow +\infty$ ($k \rightarrow \infty$). Отсюда для любого $c \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \ln \mu(c \varkappa_{k-1}, F_2) &= -p \ln n_k + c \varkappa_{k-1} (q \ln n_k)^{(\rho-1)/\rho} \\ &= -p \ln n_k + (1 + o(1)) p c \ln n_k, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

С другой стороны, из (16) и (17) получаем

$$\ln \mu(c \varkappa_{k-1}, F_1) = \frac{(1 + o(1))}{\rho} \left(\frac{\rho-1}{q\rho}\right)^{\rho-1} c^{\rho} p^{\rho} \ln n_k, \quad k \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует, что

$$\ln \mu(\varkappa_{k-1}, F_2) = o(\ln \mu(\varkappa_{k-1}, F_1)), \quad k \rightarrow \infty, \quad (20)$$

а если

$$\frac{c-1}{c^\rho} > \frac{1}{\rho} \left(\frac{p(\rho-1)}{q\rho} \right)^{\rho-1}, \quad (21)$$

то

$$\frac{\ln \mu(c\kappa_{k-1}, F_2)}{\ln \mu(c\kappa_{k-1}, F_1)} = (1 + o(1))\rho \left(\frac{q\rho}{p(\rho-1)} \right)^{\rho-1} \frac{c-1}{c^\rho} > 1, \quad k \geq k_0. \quad (22)$$

Так как $\mu(\sigma, F) = \max\{\mu(\sigma, F_1), \mu(\sigma, F_2)\}$, то из (20) для любого c , удовлетворяющего условию (21),

$$\begin{aligned} \frac{\ln \mu(c\kappa_{k-1}, F)}{\ln \mu(\kappa_{k-1}, F)} &= \frac{\ln \mu(c\kappa_{k-1}, F_2)}{\ln \mu(\kappa_{k-1}, F_1)} \\ &= (1 + o(1))\rho \left(\frac{q\rho}{p(\rho-1)} \right)^{\rho-1} (c-1) > c^\rho, \quad k \geq k_0, \end{aligned}$$

т. е. $\ln \mu(\sigma, F)$ не является правильно меняющейся функцией порядка ρ .

Покажем, что $\ln F(\sigma)$ – правильно меняющаяся функция порядка ρ . Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned} F_1(\sigma) &= \sum_{n=2}^{\infty} \exp\{-q \ln n + \sigma(q \ln n)^{(\rho-1)/\rho}\} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-q \ln n_k + \sigma(q \ln n_k)^{(\rho-1)/\rho}\} = F^*(\sigma) - F_*(\sigma). \end{aligned}$$

Для $F^*(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} F^*(\sigma) &= \int_1^{\infty} \exp\{-q \ln t + \sigma(q \ln t)^{(\rho-1)/\rho}\} dt + O(\mu(\sigma, F_1)) \\ &= \frac{\rho}{q(\rho-1)} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{q-1}{q}x^{\rho/(\rho-1)} + \frac{1}{\rho-1} \ln x + \sigma x\right\} dx + O(\mu(\sigma, F_1)). \end{aligned}$$

Функция

$$h(x) = \frac{q-1}{q}x^{\rho/(\rho-1)} - \frac{1}{\rho-1} \ln x$$

удовлетворяет условиям леммы 3, а функция

$$H(x; \sigma) = -\frac{q-1}{q}x^{\rho/(\rho-1)} + \frac{1}{\rho-1} \ln x + x\sigma$$

имеет единственную точку максимума $x(\sigma)$ такую, что

$$\frac{q-1}{q} \frac{\rho}{\rho-1} x(\sigma)^{1/(\rho-1)} - \frac{1}{(\rho-1)x(\sigma)} = \sigma. \quad (23)$$

Отсюда следует, что

$$x(\sigma)\sigma = \frac{q-1}{q} \frac{\rho}{\rho-1} x(\sigma)^{\rho/(\rho-1)} - \frac{1}{(\rho-1)},$$

так что

$$\begin{aligned} H(x(\sigma); \sigma) &= -\frac{q-1}{q} x(\sigma)^{\rho/(\rho-1)} + \frac{1}{(\rho-1)} \ln x(\sigma) \\ &\quad + \frac{q-1}{q} \frac{\rho}{\rho-1} x(\sigma)^{\rho/(\rho-1)} - \frac{1}{\rho-1} \\ &= \frac{1+o(1)}{\rho-1} \frac{q-1}{q} x(\sigma)^{\rho/(\rho-1)}, \quad \sigma \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Из (23) также следует, что

$$x(\sigma) = (1+o(1)) \left(\frac{\rho-1}{\rho} \frac{q}{q-1} \sigma \right)^{\rho-1}, \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Поэтому

$$H(x(\sigma); \sigma) = \frac{1+o(1)}{\rho} \left(\frac{\rho-1}{\rho} \frac{q}{q-1} \right)^{\rho-1} \sigma^\rho, \quad \sigma \rightarrow +\infty. \quad (24)$$

Используя лемму 3 и соотношения (16) и (24), нетрудно показать, что

$$\ln F^*(\sigma) = \frac{1+o(1)}{\rho} \left(\frac{\rho-1}{\rho} \frac{q}{q-1} \right)^{\rho-1} \sigma^\rho, \quad \sigma \rightarrow +\infty. \quad (25)$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln \ln n_{k+1} - \ln \ln n_k} < +\infty,$$

то [6] $F_2(\sigma) = (1+o(1))\mu(\sigma, F_2)$ при $\sigma \rightarrow +\infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, +\infty)$ конечной меры. Но

$$\begin{aligned} \ln \mu(\sigma, F_2) &= \max \{ -p \ln n_k + \sigma (q \ln n_k)^{(\rho-1)/\rho} : k \geq 1 \} \\ &\leq \max \{ -pt + \sigma (qt)^{(\rho-1)/\rho} : t \geq 0 \} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{q(\rho-1)}{p\rho} \right)^{\rho-1} \sigma^\rho \end{aligned}$$

и, поскольку множество E имеет конечную меру, то

$$\ln F_2(\sigma) \leq \frac{1+o(1)}{\rho} \left(\frac{q(\rho-1)}{p\rho} \right)^{\rho-1} \sigma^\rho, \quad \sigma \rightarrow +\infty. \quad (26)$$

В частности, при $p = q$ отсюда получаем

$$\ln F_*(\sigma) \leq \frac{1+o(1)}{\rho} \left(\frac{\rho-1}{\rho} \right)^{\rho-1} \sigma^\rho, \quad \sigma \rightarrow +\infty. \quad (27)$$

Из (25) и (27) следует, что $F_*(\sigma) = o(F^*(\sigma))$, $\sigma \rightarrow +\infty$, а если $q < p+1$, то и $F_2(\sigma) = o(F^*(\sigma))$, $\sigma \rightarrow +\infty$.

Таким образом, если $q < p+1$, то $F(\sigma) = (1+o(1))F^*(\sigma)$, $\sigma \rightarrow +\infty$, и в силу (25)

$$\frac{\ln F(\sigma)}{\sigma^\rho} = \frac{1+o(1)}{\rho} \left(\frac{\rho-1}{\rho} \frac{q}{q-1} \right)^{\rho-1}, \quad \sigma \rightarrow +\infty,$$

т. е. $\ln F(\sigma)$ – правильно меняющаяся функция порядка ρ .

Осталось показать, что для любого $\rho > 1$ существуют числа $q > 1$, $p \in (0, q)$ и $c > 1$ такие, что $q < p + 1$ и выполняется (21). Так как $(\rho - 1)^{(\rho-1)} < \rho^\rho$ для любого $\rho > 1$, то (21) выполняется, если $(c - 1)/c^\rho \geq (p/q)^{\rho-1}$, а последнее неравенство выполняется, например, если $c = 2$, $q = 1 + p/2$ и $2p/(2 + p) \leq 2^{-\rho/(\rho-1)}$. Утверждение 3 в случае $\rho > 1$ доказано.

Для доказательства утверждения 3 в случае $\rho = 1$ положим $n_k = [\exp_3 k]$, $k \geq 1$, и рассмотрим целые ряды Дирихле $F(s) = F_1(s) + F_2(s)$, где

$$F_1(s) = \sum_{n=3, n \neq n_k}^{\infty} \exp\{-\ln n - \exp\{(\ln \ln n)^{1/2}\} + s \ln \ln n\},$$

$$F_2(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-\ln^\beta n_k + s \ln \ln n_k\}, \quad \beta \in (0, 1],$$

и

$$F_3(s) = \sum_{n=3}^{\infty} \exp\{-\ln n - \exp\{(\ln \ln n)^{1/2}\} + s \ln \ln n\}.$$

Функция $G(x; \sigma) = -\ln x - \exp\{(\ln \ln x)^{1/2}\} + \sigma \ln \ln x$ достигает своего максимума в точке $x(\sigma)$ такой, что

$$\ln x(\sigma) + \frac{\exp\{(\ln \ln x)^{1/2}\}}{2(\ln \ln x)^{1/2}} = \sigma.$$

Следовательно, $\ln x(\sigma) \sim \sigma$, $\sigma \rightarrow +\infty$. Так как $|\nu(\sigma, F_i) - x(\sigma)| \leq 2$, где $i = 1, 3$, то $\Lambda(\sigma, F_i) = \ln \ln \nu(\sigma, F_i) \sim \ln \sigma$, $\sigma \rightarrow +\infty$, а поэтому из (8) получаем

$$\ln \mu(\sigma, F_i) \sim \sigma \ln \sigma, \quad \sigma \rightarrow +\infty, \quad i = 1, 3. \quad (28)$$

Далее,

$$\begin{aligned} F_3(\sigma) &= \int_e^{\infty} \exp\{-\ln t - \exp\{(\ln \ln t)^{1/2}\} + \sigma \ln \ln t\} dt + O(\mu(\sigma, F_3)) \\ &= \int_0^{\infty} \exp\{-\exp\{\sqrt{x}\} + (\sigma + 1)x\} dx + O(\mu(\sigma, F_3)). \end{aligned} \quad (29)$$

Функция $h(x) = \exp\{\sqrt{x}\}$ удовлетворяет условиям леммы 3, а функция $H(x; \sigma) = \exp\{\sqrt{x}\} + \sigma x$ имеет единственную точку максимума $x(\sigma)$ такую, что $\exp\{\sqrt{x}\} = 2\sigma\sqrt{x}$. Отсюда следует, что $x(\sigma) \sim \ln^2 \sigma$ и $H(x(\sigma + 1); \sigma + 1) \sim \sigma \ln^2 \sigma$ при $\sigma \rightarrow +\infty$. Поэтому из (29), воспользовавшись леммой 3 и учитывая (28), получаем

$$\ln F_3(\sigma) \sim \sigma \ln^2 \sigma, \quad \sigma \rightarrow +\infty. \quad (30)$$

Так как

$$\begin{aligned} \ln \mu(\sigma, F_2) &= \max\{-\ln^\beta n_k + \sigma \ln \ln n_k : k \geq 1\} \\ &\leq \max\{-e^{-\beta t} + \sigma t : t \geq 0\} = \frac{\sigma}{\beta} \ln \frac{\sigma}{e\beta}, \end{aligned}$$

как при исследовании F_2 в случае $\rho > 1$, имеем

$$\ln F_2(\sigma) \leq (1 + o(1)) \frac{\sigma}{\beta} \ln \sigma, \quad \sigma \rightarrow +\infty. \quad (31)$$

Далее заметим, что $F_3(\sigma) \leq F(\sigma) \leq F_3(\sigma) + F_2(\sigma)$. Следовательно, из (30) и (31) имеем $\ln F(\sigma) \sim \sigma \ln^2 \sigma$, $\sigma \rightarrow +\infty$, т.е. функция $\ln F(\sigma)$ правильно меняющаяся порядка $\rho = 1$.

Покажем, что функция $\ln \mu(\sigma, F) = \max\{\ln \mu(\sigma, F_1); \ln \mu(\sigma, F_2)\}$ не является правильно меняющейся порядка $\rho = 1$. Ясно, что

$$\varkappa_{k-1} = \frac{\ln^\beta n_k - \ln^\beta n_{k-1}}{\ln \ln n_k - \ln \ln n_{k-1}} = \frac{(1 + o(1))e \ln^\beta n_k}{e - 1 \ln \ln n_k}, \quad k \rightarrow \infty,$$

$\varkappa_k \uparrow +\infty$ и $\varkappa_{k+1}/\varkappa_k \rightarrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$, так что для фиксированного $c \geq 1$

$$\begin{aligned} \ln \mu(c\varkappa_{k-1}, F_2) &= -\ln^\beta n_k + c\varkappa_{k-1} \ln \ln n_k \\ &= -\ln^\beta n_k + \frac{(1 + o(1))ce}{e - 1} \ln^\beta n_k \\ &= (1 + o(1)) \frac{ce - e + 1}{\beta e} \varkappa_{k-1} \ln \varkappa_{k-1}, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Предположим, что $\beta e > 1$ и $(ce - e + 1)/(\beta e) > c$. Тогда в силу (28)

$$\ln \mu(\varkappa_{k-1}, F_2) = \frac{(1 + o(1))}{\beta e} \varkappa_{k-1} \ln \varkappa_{k-1} < \ln \mu(\varkappa_{k-1}, F_1)$$

и

$$\ln \mu(c\varkappa_{k-1}, F_1) = (1 + o(1))c\varkappa_{k-1} \ln \varkappa_{k-1} < \ln \mu(c\varkappa_{k-1}, F_2)$$

для всех достаточно больших k , так что

$$\frac{\ln \mu(c\varkappa_{k-1}, F)}{\ln \mu(\varkappa_{k-1}, F)} = \frac{\ln \mu(c\varkappa_{k-1}, F_2)}{\ln \mu(\varkappa_{k-1}, F_1)} = (1 + o(1)) \frac{ce - e + 1}{e\beta} > c, \quad k \geq k_0,$$

т.е. функция $\ln \mu(\sigma, F)$ не является правильно меняющейся порядка $\rho = 1$.

Осталось заметить, что если $c = 2$ и $1/e < \beta < (e + 1)/2e$, то $\beta e > 1$ и $(ce - e + 1)/(\beta e) > c$. Утверждение 3 полностью доказано.

4. Доказательство теоремы 2. Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4. Пусть ψ – положительная непрерывная возрастающая $\kappa + \infty$ на $[0, +\infty)$ функция,

$$|a_n| \leq \exp\{-\lambda_n \psi(\lambda_n)\}, \quad n \geq n_0, \quad (32)$$

и для любого $\eta \in (0, +\infty)$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\psi(\eta r)} \int_1^r \frac{\ln n(t)}{t^2} dt = 0, \quad (33)$$

где $n(t)$ – считающая функция последовательности (λ_n) . Тогда

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu((1 + o(1))\sigma, F), \quad \sigma \rightarrow +\infty. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [7] показано, что при выполнении условий (32) и (33) $\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F)$ при $\sigma \rightarrow +\infty$ вне некоторого множества $E \in [0, +\infty)$ нулевой плотности, причем, как видно из доказательства леммы 1 из [7], $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} [R_n + \tau_{n-1}, R_n + \tau_n)$, где $R_n \uparrow +\infty$, $0 < \tau_{n-1} < \tau_n = o(R_n)$, т.е. $R_n + \tau_n = (1 + o(1))(R_n + \tau_{n-1})$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что если $\sigma \in [R_n + \tau_{n-1}, R_n + \tau_n)$, то

$$\begin{aligned} \ln \mu(\sigma, F) &\leq \ln M(\sigma, F) \leq \ln M(R_n + \tau_n, F) \\ &= (1 + o(1)) \ln \mu(R_n + \tau_n, F) = (1 + o(1)) \ln \mu((1 + o(1))(R_n + \tau_{n-1}), F) \\ &\leq (1 + o(1)) \ln \mu((1 + o(1))\sigma, F), \quad \sigma \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

что и требовалась доказать.

Теперь докажем первую часть теоремы 2. Из правильного изменения одной из функций $\ln M(\sigma, F)$ или $\ln \mu(\sigma, F)$ вытекает существование медленно возрастающей функции l такой, что $\ln \mu(\sigma, F) \leq \sigma^\rho l(\sigma)$ для всех $\sigma \geq \sigma_0$. Так как функция $l(x^q)$ также медленно возрастающая, существует медленно возрастающая функция α такая, что

$$0 < \frac{1}{\alpha(x)^{\rho-1}} l\left(\frac{x^{1/(\rho-1)}}{\alpha(x)}\right) \leq \frac{1}{\alpha(x)^{\rho-1}} l(x^{1/(\rho-1)}) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Из неравенства $\ln \mu(\sigma, F) \leq \sigma^\rho l(\sigma)$ вытекает неравенство $\ln |a_n| \leq \sigma^\rho l(\sigma) - \sigma \lambda_n$ для всех $\sigma \geq \sigma_0$ и $n \geq 0$. Выбрав здесь $\sigma = \sigma_n = \lambda_n^{1/(\rho-1)}/\alpha(\lambda_n)$, имеем

$$\begin{aligned} \ln |a_n| &\leq \frac{1}{\alpha(\lambda_n)^\rho} \lambda_n^{\rho/(\rho-1)} \left(\frac{\lambda_n^{1/(\rho-1)}}{\alpha(\lambda_n)} \right) - \frac{\lambda_n^{\rho/(\rho-1)}}{\alpha(\lambda_n)} \\ &= -(1 + o(1)) \frac{\lambda_n^{\rho/(\rho-1)}}{\alpha(\lambda_n)}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, существует медленно возрастающая функция (обозначим ее снова через α) такая, что выполняется неравенство (32) с $\psi(x) = x^{1/(\rho-1)}/\alpha(x)$. Из условия (7) следует, что $\ln n(t) \leq t^\beta$ для всех $t \geq t_0$, где $0 < \beta < \rho/(\rho-1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi(\eta r)} \int_1^r \frac{\ln n(t)}{t^2} dt &\leq (1 + o(1)) \eta^{-1/(\rho-1)} \alpha(r) r^{-1/(\rho-1)} \int_1^r t^{\beta-2} dt \\ &= O(\alpha(r) r^{\beta-\rho/(\rho-1)}) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

т.е. выполнено условие (33), и по лемме 4 имеет место соотношение (34). Из (34) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\ln \mu(c\sigma, F)}{(1 + o(1)) \ln \mu((1 + o(1))\sigma, F)} &\leq \frac{\ln M(c\sigma, F)}{\ln M(\sigma, F)} \\ &\leq \frac{(1 + o(1)) \ln \mu((1 + o(1))c\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} \end{aligned}$$

при $\sigma \rightarrow +\infty$, откуда легко следует справедливость первой части теоремы 2.

Докажем ее вторую часть. Из медленного возрастания одной из указанных функций вытекает существование медленно возрастающей функции l такой, что $\ln |a_n| \leq \sigma l(\sigma) - \sigma \lambda_n$ для всех $\sigma \geq \sigma_0$ и $n \geq 0$. Выбрав здесь $\sigma = l^{-1}(\lambda_n/2)$, имеем

$$\ln |a_n| \leq -\frac{\lambda_n}{2} l^{-1}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right), \quad n \geq n_0,$$

т. е. условие (22) с $\psi(x) = \frac{1}{2}l^{-1}(x/2)$, и чтобы воспользоваться леммой 4, достаточно показать, что для любого $\eta \in (0, +\infty)$

$$\frac{1}{l^{-1}(\eta x)} \int_1^x \frac{\ln n(t)}{t^2} dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (35)$$

Но из условия $\ln \ln n = O(\ln \lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$, следует, что $\ln n(t) \leq t^K$, $K = \text{const} > 0$. В то же время из медленного возрастания функции l вытекает, что $x^K = o(l^{-1}(x))$, $x \rightarrow +\infty$, для любого $K < +\infty$. Поэтому (35) выполняется и, как выше, из леммы 4 получаем справедливость второй части теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
- [2] Заболоцкий Н. В., Шеремета М. Н. О медленном возрастании основных характеристик целых функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 2. С. 206–214.
- [3] Скасків О. Б., Тракало О. М. Про повільне зростання лічильної функції додатної послідовності // Вісник Львів. нац. ун-ту. Сер. мех-матем. 2000. Вип. 57. С. 36–40.
- [4] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
- [5] Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
- [6] Скасків О. Б. Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1984. № 11. С. 22–24.
- [7] Шеремета М. Н. Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле // Матем. заметки. 1987. Т. 42. № 2. С. 215–226.

Львовский национальный университет им. Ивана Франко
E-mail: tftj@franko.lviv.ua

Поступило
20.06.2001